1
Introdução

O problema do fluxo máximo multiterminal é uma derivação do famoso problema do fluxo máximo entre um nó origem e um nó destino de uma rede. Este problema surge no contexto de fluxos em redes, tema que possui diversas aplicações, especialmente nos campos de transporte, telecomunicações e energia. Mais especificamente, fluxos em redes aborda questões como o problema de alocação, com a produção de fornecedores suprindo demandas de clientes, problemas de custo mínimo, que objetivam reduzir os custos das operações em uma rede, e problemas de fluxo máximo, que buscam obter o valor do maior fluxo para estas operações. Exemplos podem ser encontrados em [15, 19, 21, 27, 29].

Enquanto que no problema singular de fluxo máximo considera-se o fluxo apenas entre um par de nós, no multiterminal, em um caso de rede simétrica, levam-se em conta todas as possibilidades não ordenadas de pares de nós, ou seja, $n(n-1)/2$ fluxos, onde n é o número de nós da rede.

Na década de 50, Ford e Fulkerson [6] popularizaram o problema do fluxo máximo com seu método de resolução. Eles, especialmente, demonstraram a relação entre o fluxo máximo e o corte mínimo. Assim, o problema multiterminal, por sua vez, estava resolvido, bastando aplicar o algoritmo $n(n-1)/2$ vezes para determinar o fluxo máximo entre todos os pares de nós.

Alguns anos mais tarde, Gomory e Hu [9] desenvolveram um método capaz de resolver o problema multiterminal executando apenas $n-1$ vezes o algoritmo de fluxo máximo. O resultado do algoritmo é exposto através de uma árvore de cortes, que reflete todos os fluxos máximos. Em 1990, Gusfield [10] apresenta um modo mais simples de obter-se a mesma árvore de cortes, mas também utilizando $n-1$ algoritmos de fluxo máximo.

Estudos mostraram que, apesar do algoritmo de Gusfield não utilizar contrações de nós, um dispendioso processo computacional, sua complexidade é igual ou maior do que o método de Gomory e Hu. Isto se explica pelo fato de o algoritmo de fluxo máximo ser sempre aplicado à rede original em Gusfield, enquanto que em Gomory e Hu, devido às contrações, é aplicado a redes menores que a original.

A análise de sensibilidade em fluxos multiterminais teve seu início na década de 60 com Elmaghraby [4, 5]. Ele estudou os efeitos nos fluxos máximos de uma rede quando fosse permitida a variação de capacidade de uma única aresta (paramétrica) da rede. Frente a esta variação, observou que, para determinados valores de capacidade, alguns fluxos máximos alteravam seus comportamentos. Ele nomeou estes valores de *capacidades críticas*, e transferiu a análise de sensibilidade de fluxos multiterminais para o problema de determinar todas as capacidades críticas. Por fim, concluiu que era necessário calcular uma árvore de cortes para obter cada capacidade crítica.

Recentemente, Berthomé *et al.* [2] e Diallo [14] demonstraram que, com apenas duas árvores de cortes, é possível determinar todas as capacidades críticas. Eles expandiram este resultado para o caso de uma rede com k arestas paramétricas, observando que 2^k árvores de cortes são suficientes para calcular todos os fluxos máximos para quaisquer valores dos parâmetros.

Com o objetivo de diminuir a complexidade dos algoritmos que necessitam calcular duas ou mais árvores de cortes em seqüência, para o caso de uma única aresta paramétrica na rede, Barth *et al.* [23] mostraram como utilizar as informações de uma árvore de cortes já calculada para construir a seguinte. Sendo $|P_{i,j}|$ o número de nós do único caminho entre as extremidades i e j da aresta paramétrica e na árvore existente, são necessárias $|P_{i,j}|-1$ execuções do algoritmo de fluxo máximo para computar a árvore seguinte.

Uma extensão à teoria de Barth *et al.* [23] exposta acima é apresentada nesta dissertação englobando não somente o caso de uma única aresta paramétrica na rede, mas, também, quando há mais de uma.

Utilizar as informações de uma árvore de cortes já calculada para computar a próxima é a idéia central do algoritmo proposto neste trabalho. Com o auxílio das técnicas de contração de Gomory e Hu e da rotina algorítmica de Gusfield de construção de árvores de cortes, o método busca construir a árvore de cortes de uma rede através de árvores intermediárias, procurando sempre aplicar os algoritmos de fluxos máximos a redes consideravelmente menores do que a original.

O objetivo deste trabalho é descrever este algoritmo em detalhes, assim como as suas variações e as teorias que o servem de base, e expor os resultados dos experimentos computacionais realizados com os mesmos.

1.1
Estrutura do Trabalho

A dissertação está dividida em nove capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles.

O Capítulo 2 formula, matematicamente, o problema e apresenta os métodos de resolução de Gomory e Hu [9] e Gusfield [10], tradicionais na literatura.

No Capítulo 3 é apresentada a teoria da análise de sensibilidade em fluxos multiterminal, a qual servirá de base para a construção do algoritmo proposto neste trabalho. A extensão para o caso paramétrico é brevemente abordada.

O Capítulo 4 apresenta, em detalhes, o algoritmo tema deste trabalho. Um exemplo é utilizado para ilustrar com maior clareza seu funcionamento.

O Capítulo 5 expõe as heurísticas utilizadas a fim de aumentar a eficiência do algoritmo.

No Capítulo 6 experimentos computacionais são realizados, sendo feita uma análise dos resultados obtidos.

No Capítulo 7 encontra-se a conclusão do trabalho; no Capítulo 8, as recomendações para trabalhos futuros e, por fim, no Capítulo 9, as referências bibliográficas.