



**João Paulo de Freitas Araujo**

**Algoritmos para acelerar a computação  
de Árvores de corte de Gomory e Hu**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Madiagne Diallo

Rio de Janeiro  
Abril de 2011



**João Paulo de Freitas Araujo**

**Algoritmos para acelerar a computação de árvores de  
corte de Gomory e Hu**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Madiagne Diallo**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Nélío Domingues Pizzolato**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Fernanda Maria Pereira Raupp**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de abril de 2011

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**João Paulo de Freitas Araujo**

Graduou-se em Física pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2006.

Ficha Catalográfica

Araujo, João Paulo de Freitas

Algoritmos para acelerar a computação de árvores de corte de Gomory e Hu / João Paulo de Freitas Araujo ; orientador: Madiagne Diallo. – 2011.

71 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2011.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Fluxos em redes multiterminais. 3. Fluxos paramétricos. 4. Análise de sensibilidade. 5. Corte mínimo. 6. Árvore de cortes. I. Diallo, Madiagne. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

A todos.

## Agradecimentos

Aos orientadores Madiagne Diallo e Pascal Berthomé, pela confiança, dedicação e contribuição em minha formação. Pela parceria para a concretização deste trabalho.

À CAPES e à PUC - Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores que participaram da Comissão Examinadora.

À Claudia e à Ana, e a todos os professores e funcionários do DEI.

Aos meus pais, Sergio e Teresa, pela educação, atenção, e carinho em toda minha vida.

Ao meu irmão, Luiz Fernando, e a todos os meus amigos, que sempre me apoiaram e me ajudaram de alguma forma.

## Resumo

Araujo, João Paulo de Freitas; Diallo, Madiagne. **Algoritmos para acelerar a computação de árvores de corte de Gomory e Hu**. Rio de Janeiro, 2011. 71p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O problema do fluxo máximo multiterminal é uma extensão do conhecido problema de fluxo máximo entre um nó origem e um nó destino de uma rede. Este problema surge no contexto de fluxos em redes, tema que possui diversas aplicações, especialmente nos campos de transporte, telecomunicações e energia. No caso multiterminal, o fluxo máximo é calculado entre todos os pares de nós da rede. No referente a uma rede simétrica, este problema pode ser resolvido, obviamente, pela execução do algoritmo de fluxo máximo  $n(n-1)/2$  vezes, onde  $n$  é o número de nós da rede. Os tradicionais métodos encontrados na literatura o conseguem com apenas  $n-1$ . O presente trabalho busca elaborar um algoritmo capaz de resolver o problema multiterminal com uma complexidade menor do que os métodos da literatura. A recente teoria da análise de sensibilidade, em que se estuda a influência da variação de capacidade de uma aresta nos fluxos máximos multiterminais, é utilizada para a construção do algoritmo. Técnicas dos tradicionais métodos, como a de contração de nós, também compõem o método. Ao final, o algoritmo é testado computacionalmente com todas as suas variações e heurísticas adicionadas. Para um determinado caso, o algoritmo se mostrou com eficiência semelhante a dos métodos tradicionais. Novas variações e heurísticas são listadas para futuras pesquisas.

## Palavras-chave

Fluxos em redes multiterminais; fluxos paramétricos; análise de sensibilidade; corte mínimo; árvore de cortes.

## Abstract

Araujo, João Paulo de Freitas; Diallo, Madiagne (Advisor). **Algorithms for performing the computation of Gomory Hu cut-trees.** Rio de Janeiro, 2011. 71p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The multi-terminal maximum flow problem is an extension of the well known single source-single terminal maximum flow problem. These problems arise in the context of network flows, theme which has various applications, especially in the fields of transport, telecommunications and energy. In the multi-terminal case, the maximum flow is calculated between all pairs of nodes. Clearly, this problem can be solved, in a symmetric network, by computing the maximum flow algorithm  $n(n-1)/2$  times, where  $n$  is the number of nodes of the network, but the traditional methods found in the literature can do it with only  $n-1$  computations. This paper seeks to elaborate an algorithm able to solve the multi-terminal problem with a complexity lower than the methods of the literature. The recent theory of sensitivity analysis, which studies the influence of an edge capacity variation on multi-terminals maximum flows, is employed on the construction of the algorithm. Techniques of the traditional methods, such as the contraction of nodes, are also part of the method. Finally, the algorithm is computationally tested with all its variations and added heuristics. For a given case, the algorithm showed an efficiency very close to the ones of traditional methods. New variations and heuristics are listed for future research.

## Keywords

Multi-terminal network flows; parametric flows; sensitivity analysis; minimum cut; cut tree.

# Sumário

<b>1. Introdução</b>	<b>9</b>
1.1 Estrutura do Trabalho	11
<b>2. Definição do Problema</b>	<b>12</b>
2.1 Formulação Matemática	12
2.2 Revisão Bibliográfica	20
2.2.1 Método de Gomory e Hu	22
2.2.2 Método de Gusfield	28
<b>3. Análise de Sensibilidade de fluxos máximos multiterminal</b>	<b>34</b>
3.1 Elmaghraby	34
3.2 Determinando capacidades críticas com duas árvores de cortes	37
3.2.1 Generalizando para várias capacidades paramétricas	41
3.3 Computação de Árvores de Cortes	42
<b>4. Algoritmo</b>	<b>47</b>
4.1 Algoritmo A2	54
<b>5. Variações e Heurísticas</b>	<b>56</b>
5.1 Variações na função Árvore Geradora	56
5.2 Heurísticas	59
<b>6. Experimentos Computacionais</b>	<b>62</b>
<b>7. Conclusão</b>	<b>66</b>
<b>8. Recomendações para Trabalhos Futuros</b>	<b>68</b>
<b>9. Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>