

2 Modelo de rede de capilares

Os modelos de rede de capilares podem ser subdivididos em três partes essenciais à modelagem computacional de escoamentos em meios porosos:

1. Uma estrutura discretizada que represente a geometria e topologia do espaço poroso. Esta estrutura é formada por elementos simplificados em sua geometria para possibilitar o cálculo do escoamento;
2. Uma abordagem apropriada do escoamento do fluido e, eventualmente, do transporte de particulados, reações químicas e transferência de calor, contendo equações de transporte e regras para avanço das interfaces ou frentes de concentração baseadas na física do problema;
3. Métodos de seleção do passo de tempo (parâmetro crítico na simulação), critérios de parada e convergência, estrutura de dados, verificação, otimização computacional, etc.

Estudos acerca das propriedades estruturais dos meios porosos e mecanismos de escoamento vêm sendo desenvolvidos com vistas a aumentar a capacidade preditiva dos modelos de escoamento em meio poroso.

2.1. Topologia da rede

Uma grande variedade de modelos de rede foi desenvolvida com base na configuração estrutural constituída por dois elementos básicos (Wardlaw, 1976): espaços porosos relativamente grandes em volume, denominados poros, interconectados por constrictões estreitas, representados no modelo de rede por tubos capilares (figura 2.1). Neste trabalho, ambos serão referidos de forma

genérica como “elementos” ou “canais porosos” quando as propriedades ou fenômenos físicos ocorrerem de forma idêntica em ambos.



Figura 2.1 Arranjo básico de meio poroso e sua representação via modelo de rede

Os primeiros modelos de rede reproduziam apenas o volume dos poros e a conectividade entre estes, não representando a estrutura real do meio poroso. Este trabalho utiliza uma rede tridimensional não-estruturada obtida por um grupo de pesquisa do *Departamento de Engenharia e Ciências da Terra do Imperial College London*, Inglaterra, denominado *Imperial College Consortium on Pore-Scale Modelling*. A rede foi gerada através da análise de imagens obtidas por micro-tomografia computacional tridimensional. Os arquivos de dados que descrevem a rede são disponibilizados na página do grupo (Imperial College, 2011), e contêm:

- Dimensões da rede e quantidade de poros e capilares;
- Raio inscrito, comprimento e volume poroso de cada elemento;
- Fator de forma e fator geométrico, utilizados no cálculo dos semiângulos internos, condutâncias e na identificação da seção transversal de cada elemento;
- Índices dos poros e capilares conectados a cada poro, índices dos poros conectados às extremidades de cada capilar e posição de cada poro no sistema cartesiano de coordenadas, possibilitando localização na rede não-estruturada e visualizações diversas;
- Índice dos elementos conectados à entrada e à saída;
- Volume de argila (volume vazio contido na rugosidade das paredes), para eventual modelagem de filme do fluido molhante em escoamento multifásico.

A seguir, são descritos os parâmetros geométricos adicionais da estrutura porosa e sua forma de cálculo, tornando o modelo mais completo e permitindo inclusive uma eventual representação de outros mecanismos de escoamento, como o fluxo de fluido molhante pelos vértices dos elementos (para escoamento bifásico).

2.2. Geometria do espaço poroso

As características geométricas do espaço poroso que exercem maior influência no comportamento do escoamento são o número de coordenação (quantidade de poros vizinhos conectados a cada poro) e a distribuição dos tamanhos dos canais internos, representada no modelo de rede pelos raios inscritos dos poros e capilares.

A fig. 2.2 apresenta a distribuição de tamanho dos poros e capilares da rede utilizada neste estudo, que representa a estrutura de uma amostra de arenito Berea. Maiores detalhes da rede são apresentados na tab.1.

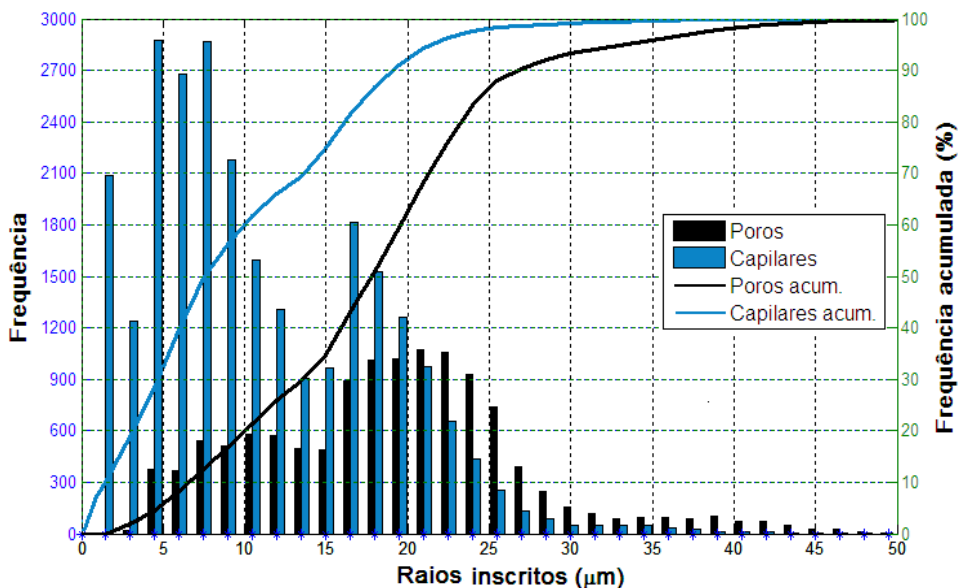


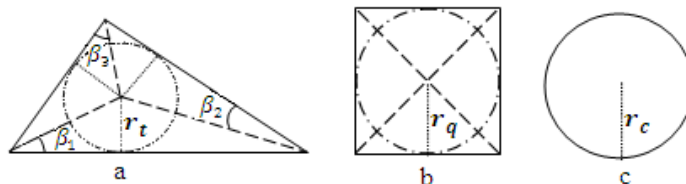
Figura 2.2 Distribuição dos raios inscritos dos poros e capilares da rede utilizada

Tabela 1 Principais características da rede de capilares utilizada

Item	Capilares	Poros	Total
Quantidade	26146	12349	38495
Porosidade	4,56	13,74	18,31
Seções quadradas (%)	7,54	4,34	6,51
Seções circulares (%)	1,73	0,17	1,23
Seções triangulares (%)	90,72	95,51	92,26
Raio inscrito mínimo (μm)	0,90	3,62	0,90
Raio inscrito médio (μm)	10,97	19,16	13,60
Raio inscrito máximo (μm)	56,85	73,53	73,53
Número de coordenação médio	-	4,19	-
Número de coordenação máximo	-	19	-
Volume total (mm^3)	-	-	27

Os primeiros modelos de rede continham elementos de seção transversal circular. No entanto, a maioria dos canais internos das rochas-reservatório possui seção irregular, que podem ser representados de forma simplificada por elementos de seção transversal triangular, quadrada ou circular (figura 2.3). Esta aproximação mostra-se suficiente para representar a geometria interna essencial do meio poroso e permite, em simulações de escoamento multifásico, o estudo do fluxo de fluido molhante adjacente aos vértices dos poros.

Segundo Patzek (2000), a geometria dos elementos triangulares pode ser representada por três parâmetros: o raio do círculo inscrito, r_t , o fator de forma M_t , e o conjunto dos semiângulos, $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$. Cada semiângulo está situado entre um lado do triângulo e a reta ligando um vértice ao centro do círculo inscrito.

**Figura 2.3** Formatos das seções transversais dos elementos da rede

O fator de forma de Mason & Morrow (1991) para uma geometria genérica é obtido pela adimensionalização do raio hidráulico, R_h , a partir da sua divisão pelo perímetro do elemento, h . Para um duto de seção circular com área A :

$$M = \frac{R_h}{h} = \frac{A}{h^2} \quad (2.1)$$

O raio hidráulico é utilizado em modelos do escoamento multifásico em meios porosos nos cálculos da curvatura média das interfaces, da diferença de pressão através das mesmas e na estimativa da pressão crítica de invasão em elementos de seção arbitrária. O uso do fator de forma contribui para o aumento da capacidade preditiva dos modelos de rede e será utilizado no cálculo das condutâncias hidráulicas (seção 2.3.1) e na definição dos semiângulos dos elementos não-circulares.

Para triângulos equiláteros, o valor de cada semiângulo é $\pi/6$ radianos e $M_t^{eq} = M_{t,max} = \sqrt{3}/6$. No entanto, canais porosos de geometria irregular são mais bem representados por triângulos escalenos, onde o fator de forma é função dos valores dos semiângulos, $0 \leq M_t^{esc} < \sqrt{3}/6$.

O cálculo do semiângulos inicia-se a partir de β_2 , referente aos semiângulos situados entre os dois lados maiores do triângulo. A partir da faixa-limite para o fator de forma, e sabendo-se que $\beta_{2,min}(M_t) \leq \beta_2 \leq \beta_{2,max}(M_t)$, obtêm-se os valores-limite para β_2 (Patzek, 2000):

$$\beta_{2,max} = \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\eta) \right] \quad (2.2)$$

$$\beta_{2,min} = \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\eta + \frac{4\pi}{3} \right) \right], \quad (2.3)$$

onde $\eta = \arccos(-12\sqrt{3}M_t/3)$ (este termo foi discriminado apenas para facilitar a leitura). Após a escolha aleatória de β_2 entre $\beta_{2,max}$ e $\beta_{2,min}$, β_1 e β_3 são obtidos por:

$$\beta_1 = -0,5\beta_2 + 0,5\arcsen\left(\frac{\tan\beta_2 + 4M_t}{\tan\beta_2 - 4M_t}\text{sen}\beta_2\right) \quad (2.4)$$

$$\beta_3 = \pi/2 - (\beta_1 + \beta_2) \quad (2.5)$$

Os elementos de seção quadrada têm fator de forma $M_q = 1/16$ e apresentam oito semiângulos idênticos, $\beta_q = \pi/4$. Elementos circulares têm $M_c = 1/(4\pi)$ e não contêm vértices ou ângulos. As áreas dos elementos triangulares, quadrados e circulares são obtidas por $A_t = r_t^2/(4M_t)$, $A_q = 4r_q^2$ e $A_c = \pi r_c^2$, respectivamente.

2.3. Modelo de escoamento

Em simulações de escoamento em meios porosos, as interfaces e/ou frentes de concentração são atualizadas a cada passo de tempo. O escoamento através da rede é determinado pelas diferenças de pressões dos poros. Em modelos dinâmicos, o cálculo da pressão em cada poro é realizado considerando-se todas as interfaces fixas (Koplik & Lassester, 1984). No escoamento de emulsão, de forma análoga, o perfil de concentração. Foi considerado fixo para o cálculo de distribuição de pressão na rede.

2.3.1. Escoamento em regime permanente

O cálculo da distribuição de pressão se dá pela imposição da conservação de massa em cada poro. Em se tratando de escoamento incompressível, pode-se usar o termo conservação de volume. Obtém-se, para cada poro, uma equação similar à equação de Kirchhoff para redes de resistores elétricos. Cada equação i referente a um poro P_i simboliza a soma das vazões, Q_{ij} , observadas nos capilares que o conectam aos n poros vizinhos, P_j .

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = 0 \quad (2.6)$$

Por analogia com a lei de Ohm para circuitos elétricos, o termo de vazão pode ser expresso pela razão entre a diferença de pressão e a resistência hidráulica, definida como a razão entre o comprimento do elemento e sua condutância hidráulica ($R_{ij} = l_{ij}/g_{ij}$).

Assim, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{l_{ij}} (p_i - p_j) = 0 \quad (2.7)$$

Definindo-se uma equação para cada poro, obtém-se um sistema esparso com número de equações igual ao de poros, cujas incógnitas são as pressões em cada poro. Para escoamento monofásico de um fluido newtoniano, a condutância (seção 2.3.2) de cada elemento é uma função somente da geometria e da viscosidade do fluido, assumida como constante; sendo assim, o sistema algébrico obtido é linear.

Neste trabalho, este sistema é resolvido através do método iterativo de mínimos resíduos (Saad e Schultz, 1986), conhecido como GMRES (*Generalized Minimal Residual*), com o pacote para solução de problemas de álgebra linear desenvolvido por Saad e disponibilizado em seu website. Assim, obtém-se a distribuição de pressão na rede. As expressões para as condutâncias são derivadas na seção a seguir. O cap. 3 trata o problema não-linear, obtido ao se considerar o efeito do bloqueio do escoamento na condutância dos elementos da rede.

2.3.2. Condutância hidráulica

A condutância hidráulica em um escoamento monofásico de um fluido newtoniano em tubos de seção transversal uniforme pode ser estabelecida pela equação de Hagen-Poiseuille, que é derivada das equações de Navier-Stokes considerando-se as hipóteses de escoamento laminar, desenvolvido, incompressível, isotérmico e em regime permanente. Nos modelos de rede, ainda são considerados desprezíveis os efeitos de perda de carga inerentes às entradas e

saídas de cada capilar. Azzam e Dullien (1977) apontam erros desprezíveis gerados por esta abordagem para capilares com razão entre comprimento e raio maior que 2. Na rede de capilares utilizada, aproximadamente 83% dos capilares atendem a este critério.

Para capilares de seção transversal circular, a condutância é obtida de forma analítica a partir do componente axial (direção z) das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, para escoamento laminar e desenvolvido:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}, \quad (2.8)$$

onde μ representa a viscosidade, u_z a velocidade axial do fluido e p a pressão.

A solução da equação com a condição de contorno de não deslizamento na parede do tubo, $u_z = 0$ em $r = R$, resulta no perfil parabólico de velocidade:

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) (R^2 - r^2) \quad (2.9)$$

Assim, a vazão pode ser obtida pela integração do perfil de velocidade sobre a área transversal do tubo, resultando na equação de Hagen-Poiseuille. A vazão é linearmente proporcional ao gradiente de pressão. A constante de proporcionalidade, g , é chamada de condutância hidráulica e é função do raio do tubo, R , e da viscosidade do líquido, μ . l é o comprimento do duto.

$$Q = \int_0^R u_z 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \frac{g}{l} \Delta p \quad (2.10)$$

Note-se que a condutância hidráulica varia com a quarta potência do raio do tubo. Como os raios das gargantas de um meio poroso variam de duas a quatro ordens de magnitude, as condutâncias hidráulicas dos canais do meio poroso podem estar distribuídas em uma faixa de até dezesseis ordens de grandeza. Este fato confere características de transporte por percolação ao escoamento, tornando-o espacialmente heterogêneo (Kirkpatrick, 1973). Esta característica contribui

para a baixa eficiência de varrido nos meios porosos com a injeção de um fluido simples, dada a dificuldade em se varrer todos os canais do meio.

A condutância de um capilar circular pode ser expressa em termos da área de sua seção transversal ($g_{c,c} = AR^2/(8\mu)$, vide equação anterior). Patzek & Silin (2000) desenvolveram recentemente expressões para o cálculo da condutância em elementos de seção não-circular, usando-se outros dois parâmetros: fator de forma (seção 2.2) e fator geométrico, ϵ . A condutância é obtida a partir da definição da condutância adimensional, \tilde{g} (Patzek, 1999):

$$g = \tilde{g} \frac{A^2}{\mu} = \epsilon M \frac{A^2}{\mu} \quad (2.11)$$

O fator geométrico ϵ é o coeficiente angular da reta $\tilde{g} \propto M$. Para um tubo cuja seção transversal é um triângulo equilátero, a condutância adimensional é igual a $3M_t^{eq}/5$ (Bakke, 2002). A solução para um triângulo arbitrário aproxima-se de uma reta com o mesmo coeficiente angular, $\epsilon_t = 3/5$. Assim, pode-se aproximar a condutância de elementos de seção triangular arbitrária como:

$$g_t = \epsilon_t \frac{A_t^2}{\mu} M_t = \frac{3}{5} \frac{A_t^2}{\mu} M_t \quad (2.12)$$

Neste trabalho, obteve-se, para elementos de seção quadrada, o fator geométrico $\epsilon_q = 0,5623$. Para seções circulares, $\epsilon_c = 0,5$.

Como as equações do balanço de volume para cada poro são resolvidas simultaneamente, a vazão em cada capilar depende das resistências no próprio capilar e nos poros conectados nas duas extremidades. Assim, conhecidas as condutâncias de cada elemento, pode-se calcular resistência hidráulica entre os centros dos poros. Para tanto, cada arranjo elementar será composto por um tubo capilar de comprimento l_c situado entre dois poros, P_i e P_j , como mostrado na

figura 2.4. Este arranjo elementar tem similaridade com a estrutura de amostras reais, e representa uma constrição que liga dois poros em uma constrição.

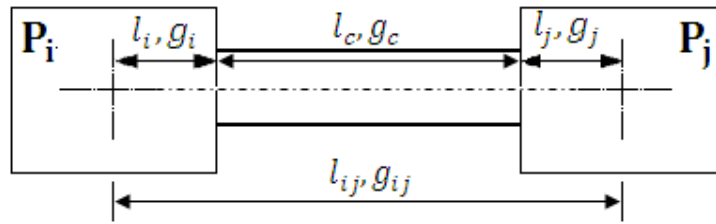


Figura 2.4 Estrutura elementar de poro e capilar para cálculo das condutâncias

Dados que as resistências hidráulicas (\mathfrak{R}) somam-se em um circuito em série, a resistência total em uma célula elementar de cálculo é a soma das resistências de seus segmentos:

$$\mathfrak{R}_{ij} = \mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_j \quad (2.13)$$

$$\frac{g_{ij}}{l_{ij}} = \left(\frac{l_i}{g_i} + \frac{l_c}{g_c} + \frac{l_j}{g_j} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

Uma vez conhecidas as resistências hidráulicas de todos os arranjos elementares e obtida a distribuição de pressão na rede (conforme seção anterior), pode-se voltar na eq. 2.4 e calcular a vazão em cada capilar da rede [$Q_{ij} = g_{ij}(p_i - p_j)/l_{ij}$].

Dada a distribuição de vazão na rede, podem-se calcular as características adicionais de transporte de interesse, como o avanço de concentração ou de interfaces. Este cálculo é realizado com a aplicação de modelos de transporte na rede de capilares.

2.3.3. Modelo dinâmico do escoamento

Há dois tipos fundamentais de modelos de rede utilizados em simulação de escoamento em meios porosos na escala de poros. A principal diferença entre eles está relacionada aos métodos de simulação de escoamentos bifásicos.

A aplicação de cada modelo depende da faixa de número de capilaridade em que o escoamento ocorre, sendo o número de capilaridade definido pela razão entre as forças viscosas e capilares,

$$Ca \equiv \frac{\mu V_D}{\sigma}, \quad (2.15)$$

onde μ é a viscosidade do fluido injetado, V_D é a velocidade de Darcy (vazão volumétrica por unidade de área) e σ é tensão interfacial entre as duas fases.

Os modelos *quasi*-estáticos podem ser aplicados na simulação de escoamentos água/óleo dominados por forças capilares, que apresentam tipicamente baixo número de capilaridade ($Ca \cong 10^{-7}$). Neste tipo de modelo, o campo de pressão na rede é calculado assumindo a configuração de fluidos para o equilíbrio estático.

Entretanto, em muitos dos métodos de recuperação melhorada de petróleo, as forças viscosas tornam-se significantes, tipicamente com números de capilaridade maiores que 10^{-4} (Dullien, 1992). Nestes casos, os modelos dinâmicos tornam-se imprescindíveis, onde os efeitos das forças viscosas são considerados durante o cálculo das variações da pressão.

Estas alterações nas pressões locais ocorrem devido a dois fenômenos irreversíveis distintos, que tornam as equações de transporte não-lineares. Tais fenômenos são:

1) O comportamento não-linear do fluxo das duas fases: este comportamento é consequência do complexo mecanismo de escoamento, que na

abordagem empregada neste trabalho é representado pelo efeito de bloqueio das gotas da emulsão nas gargantas dos poros (seção 3.2). Assim, cada condutância hidráulica local (e conseqüentemente a vazão) é função do fator de bloqueio de fluxo (f), que é função da vazão: $Q = Q[f(Q, \dots)]$.

Este problema não-linear é resolvido de forma iterativa, onde a primeira estimativa (chute inicial) para a vazão de cada elemento é a vazão calculada para fluxo da fase contínua, conforme a eq. 2.16:

$$Q_{ele}^0 = Q_{ele}^{fc} \quad (2.16)$$

Nos passos seguintes da simulação, a primeira estimativa para a vazão passa a ser a vazão do passo de tempo anterior.

2) A redistribuição de fluidos: representada pelo avanço da frente de concentração da fase dispersa da emulsão ou pelo avanço das interfaces, no caso de escoamento bifásico. Como o efeito da nova concentração local (emulsão) ou proporção de fluidos em cada elemento (fluxo bifásico) sobre a variação na distribuição de pressão da rede não é conhecido *a priori*, é necessário utilizar-se as distribuições de pressão do passo de tempo anterior para se calcular a nova configuração de fluidos, conforme as eqs. 3.8 - 3.10 do cap. 3.

Assim, impõe-se um pequeno avanço dos fluidos e, em seguida, atualiza-se a influência da nova configuração sobre a distribuição de pressão. Utilizam-se equações de concentração e/ou saturação desacopladas das equações de pressão, de forma similar ao esquema de solução de sistemas de equações diferenciais para reservatórios conhecido como IMPES, do inglês *Implicit in Pressure, Explicit in Saturation* (Sheldon *et al.*, 1959; Stone & Gardner, 1961; Aziz & Settari, 1979).

Deste modo, impondo-se como condições de contorno uma vazão constante através da rede e uma pressão manométrica nula na saída, obtêm-se as pressões em cada poro e da distribuição de vazão ao longo da rede. O modelo dinâmico do escoamento permite o avanço da frente de concentração considerando-se passos

de tempo pequenos, calculados conforme mostrado na seção a seguir. Um diagrama de fluxo é mostrado ao final do cap. 3, que descreve o modelo dinâmico usado neste trabalho e os detalhes do escoamento de emulsões em meios porosos.

2.3.4. Passo de tempo

O passo de tempo é um critério essencial para o funcionamento básico de modelos dinâmicos de escoamento em meios porosos. Para simulação de escoamento em escala de reservatórios (macro escala), devem-se adotar passos de tempo com valor baixo o suficiente para garantir a estabilidade na solução das equações de transporte. Em simulações na escala de poros através de modelos de rede, podem-se usar passos de tempo fixos, o que torna a simulação mais lenta, ou estabelecer regras adaptativas baseadas na física do problema

Tratando-se a emulsão como um fluido monofásico, utiliza-se uma análise do volume máximo de fluido que cada elemento pode receber à dada vazão, resultando na seguinte expressão:

$$\Delta t = \min \left\{ \theta, \min_{i=1, \dots, NP} \left(\frac{V_i}{Q_i} \right) \right\}, \quad (2.17)$$

onde N é o número total de elementos na rede, V_i é o volume do elemento i e o máximo volume que o elemento pode receber dos elementos vizinhos. A razão V_i/Q_i garante que no máximo um elemento da rede é completamente preenchido a cada passo de tempo. O termo θ estabelece um passo de tempo pequeno o suficiente para garantir a estabilidade nas simulações e pode ser função da vazão média na rede, aumentando a eficiência computacional.