

4 Método Numérico

Para determinar os campos de velocidade, pressão e temperatura resultantes do escoamento de um jato espiralado incidindo em uma placa quente, utilizou-se o programa comercial FLUENT (Fluent, 2010), o qual é baseado no método de Volumes Finitos.

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é uma das técnicas de discretização mais versáteis utilizadas na dinâmica dos fluidos computacional. Esta técnica tem como primeiro passo dividir o domínio computacional em vários volumes de controle, onde a variável de interesse está localizada no centróide do volume de controle. O próximo passo é integrar a forma diferencial das equações de governo sobre cada volume de controle, onde são utilizados perfis de interpolação para descrever a variação da variável procurada (velocidade, pressão, temperatura e/ou outras grandezas de interesse) entre os centróides de cada volume de controle. A equação resultante é chamada de equação de discretização. Desta forma, a equação de discretização expressa o princípio da conservação para a variável procurada dentro do volume de controle.

A característica mais atraente do MVF é que a solução resultante satisfaz a conservação de quantidades como massa, quantidade de movimento, energia e espécies, sendo totalmente satisfeita para qualquer volume de controle, assim como para todo o domínio computacional e qualquer número de volumes de controle. Mesmo a solução em uma malha grosseira apresenta conservação das variáveis integradas.

Métodos numéricos devem satisfazer algumas propriedades interdependentes: *consistência*, *estabilidade* e *convergência*. A *consistência* implica que o problema discreto é uma aproximação do diferencial. Um método de solução é *estável* se os erros da solução diminuem durante o procedimento de solução. *Convergência* implica que a medida que a malha é refinada, a solução do problema discreto aproxima-se da solução do problema diferencial. De acordo com o teorema de equivalência de Lax apresentado em Tannehill (1997), que é

válido para determinados problemas lineares de valor inicial, a seguinte relação é verdadeira: *consistência + estabilidade* \Leftrightarrow *convergência*. Nos casos não lineares, a convergência não é garantida, porém, a presença da estabilidade do método facilita substancialmente a obtenção de solução convergida.

Para aproximar as equações diferenciais selecionou-se diferentes esquemas. No caso da metodologia de turbulência RANS foram utilizados os esquemas *Power Law* (Patankar, 1980) e QUICK (Leonard e Mokhtari, 1991). O esquema *Power-Law* é mais estável e de fácil convergência, enquanto que o esquema QUICK é mais preciso. Em geral, a solução era inicializada com o esquema *Power-Law* e num segundo momento, buscando aumentar a ordem de precisão da discretização, o esquema QUICK era adotado. Já para a metodologia LES é fundamental utilizar pelo menos um esquema de segunda ordem, e o esquema de Diferenças Centrais foi empregado.

Nas simulações RANS o acoplamento velocidade e pressão foi resolvido com o algoritmo SIMPLE (Patankar, 1980), enquanto que nas simulações LES, pelo fato de serem transientes, o algoritmo PISO (Issa, 1986) foi utilizado com a finalidade de se obter uma maior estabilidade nas simulações.

Finalmente, para resolver o sistema algébrico empregou-se a técnica de Multigrid (Hutchinson & Raithby, 1986), juntamente com o algoritmo de Gauss-Seidel (Patankar, 1980).

4.1 Discretização da Equação Geral de Transporte

De modo a descrever as técnicas de discretização, a equação de transporte para uma quantidade transportada genérica ϕ é considerada. Todas as equações de conservação têm a forma desta equação; através da substituição apropriada para ϕ , da difusividade Γ e de um termo fonte genérico $S_\phi = S_c + S_p \phi$.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + S_c + S_p\phi \quad (4.1)$$

Tal como foi mencionado anteriormente o Método dos Volumes Finitos consiste em integrar a equação de transporte, Eq. (4.1) sobre cada volume de controle, gerando uma equação de discretização que expresse a lei de conservação

no volume de controle.

A discretização das equações de governo do escoamento pode ser obtida integrando a Eq. (4.1) em um volume de controle \forall limitado por uma superfície fechada S . Aplicando o teorema de divergência de Gauss, tem-se

$$\int_{\forall} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\forall + \int_A \rho \phi u_j n_j dA = \int_A \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA + \int_{\forall} (S_c + S_p \phi) d\forall \quad (4.2)$$

onde n_j é o vetor normal à superfície do volume de controle, apontando para fora do elemento, dA é a magnitude do elemento de área da superfície de controle.

Considerando um volume de controle i com N_i faces, tem-se

$$\left. \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right|_i \forall_i + \sum_{f=1}^{N_i} (\rho u_j \phi n_j A)_f = \sum_{f=1}^{N_i} \Gamma \phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right|_f (n_j A)_f + (S_c + S_p \phi)_i \forall_i \quad (4.3)$$

onde f significa que a grandeza deve ser avaliada na face do volume de controle.

O número de células vizinhas de cada volume de controle depende da malha construída, sendo normalmente igual ao número de faces que forma o volume de controle. A Fig. 4.1 ilustra uma célula típica, triangular bidimensional.

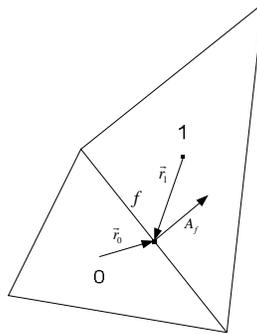


Figura 4.1 – Volume de controle tipo, na discretização da equação de transporte.

Os valores discretos do campo escalar ϕ são obtidos nos centros dos volumes de controle i (0 e 1 da Fig. 4.1), cuja posição é dada por:

$$x_i = \frac{1}{\forall_i} \int_{\forall_i} x d\forall, \quad (4.4)$$

O somatório referente ao fluxo líquido convectivos da Eq. (4.3) podem ser reescritos

$$\sum_{f=1}^{N_i} (\rho u_j \phi n_{jA})_f = \sum_{f_A=1}^{N_A} \dot{m}_{f_A} \phi_{f_A} - \sum_{f_B=1}^{N_B} \dot{m}_{f_B} \phi_{f_B} \quad (4.5)$$

onde

$$\dot{m}_f = (\rho u_n A)_f \quad (4.6)$$

é o fluxo de massa que cruza a face, sendo u_n o componente de velocidade normal à face f . f_A e f_B correspondem às faces onde os fluxos saem e entram, respectivamente

Os valores das faces ϕ_f são necessários nos termos advectivos da Eq. (4.5) e devem ser interpolados através dos valores centrais dos volumes de controle ϕ_i . No presente trabalho foram utilizados os seguintes esquemas: Power-Law, Quick e Diferenças Centrais. Para os termos difusivos da Eq. (4.3) utiliza-se o esquema de Diferenças Centrais.

4.1.1

Esquema *Power-Law*

O esquema *Power-Law* (Patankar, 1980) é um ajuste de lei de potência do esquema Exponencial desenvolvido por Spalding (Patankar, 1980), o qual é baseado na solução exata da equação convecção-difusão unidimensional, sem fontes e em regime permanente. O fluxo total (convectivo e difusivo) na face é aproximado de forma acoplada por,

$$J_f = \left(\rho u \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_f = \dot{m}_f \phi_o - (\phi_1 - \phi_o) a_f \quad (4.7)$$

$$a_f = D_f \mathbf{A}(|Pe_f|) + \left\| -\dot{m}_f, 0 \right\| \quad (4.8)$$

$$D_f = \left(\frac{\Gamma \phi A}{L} \right)_f ; \mathbf{A}(|Pe_f|) = \left\| 0, (1 - 0,1|Pe_f|)^5 \right\| \quad (4.9)$$

onde $Pe_f = \dot{m}_f / D_f$ é o número de Peclet, sendo D_f a condutância e \dot{m}_f o fluxo de massa avaliados na face do volume de controle e L é a distância entre os dois centróides o e 1 adjacentes a montante e a jusante da face em consideração. O

símbolo $\|a,b\|$ representa o máximo entre a e b .

4.1.2 Esquema Diferenças Centrais

O esquema de Diferenças Centrais (*Central differencing scheme*) é baseado na expansão de série de Taylor, apresentando segunda ordem de precisão. Este esquema surgiu como uma das primeiras tentativas de se encontrar o valor da variável nas faces do volume de controle. O valor da variável na face do volume de controle ϕ_f é calculado da seguinte forma no esquema de Diferenças Centrais

$$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_0 \cdot \vec{r}_0 + \nabla\phi_1 \cdot \vec{r}_1) \quad (4.10)$$

sendo os índices o e l referentes às células que compartilham a face f (Fig. 4.1), os gradientes $\nabla\phi_0$ e $\nabla\phi_1$ são calculados utilizando-se

$$\nabla\phi_i = \frac{1}{\forall_i} \sum_{f=1}^{N_i} \phi_f A_f \vec{n}_f \quad (4.11)$$

e \vec{r} é o vetor direcionado do centro do volume de controle à face correspondente do volume de controle.

A Eq. (4.10), a qual descreve o esquema de Diferenças Centrais, é uma escolha ideal para Simulação de Grandes Escalas (LES), pois é um esquema que apresenta baixa difusão numérica. A desvantagem deste esquema é que conduz a oscilações fisicamente incoerentes na solução do problema, além de introduzir perturbações que podem dificultar a convergência. A solução deste problema é trabalhar com uma variante do método, o método de diferenças centrais limitado (*bounded central differencing scheme*), o qual é baseado no Diagrama das Variáveis Normalizadas (*Normalized Variable Diagram - NVD*) proposto por Leonard (1991).

Para ilustrar o procedimento para limitar o esquema de diferenças centrais é conveniente introduzir a normalização de Leonard (1991), a qual para escoamento no sentido indicado na Fig. 4.2 é

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_W}{\phi_E - \phi_W} \tag{4.12}$$

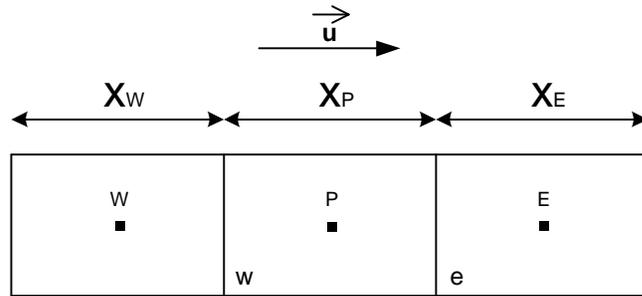


Figura 4.2 – Volume de controle unidimensional.

A Figura 4.3 apresenta um diagrama da variável ϕ na face e normalizada de acordo com os principais esquemas de interpolação utilizadas no processo de estabilização o método de Diferenças Centrais.

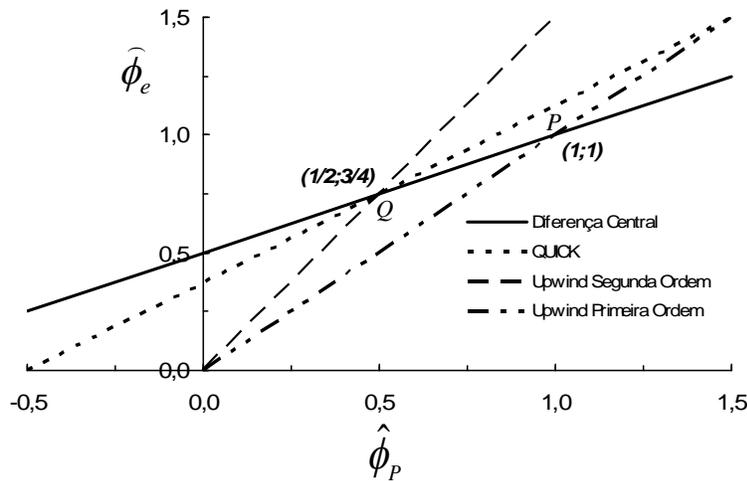


Figura 4.3 – Diagrama das variáveis normalizadas, *NVD* (Choi et. al., 1995).

O critério do esquema de *Diferenças Centrais Limitado* (DCL) é definir uma função crescente e contínua ou a união de trechos de funções contínuas e crescentes H , relacionando o valor normalizado interpolado de face $\hat{\phi}_e$ ao valor normalizado do centro do nó a montante $\hat{\phi}_p$, ou seja, $\hat{\phi}_e = H(\hat{\phi}_p)$. Deste modo o critério de DCL estabelece os limites da função H , detalhados a seguir:

(i) para $0 \leq \hat{\phi}_p \leq 1$, H é limitada inferiormente pela função $\hat{\phi}_e = \hat{\phi}_p$ e superiormente pelo valor unitário que passa pelos pontos (0,0) e (1,1).

(ii) para $\hat{\phi}_p < 0$ e $\hat{\phi}_p > 1$, H é igual a $\hat{\phi}_p$.

A importância do DCL é fornecer uma condição necessária e suficiente para garantir uma solução sem oscilações.

De acordo com Leonard (1991), as principais características relativas à função de interpolação H no NVD (Figura 4.3) são

(i) Se a função H passa pelo ponto Q , então a precisão é de segunda ordem,

(ii) Se a função H passa pelo ponto Q , com inclinação S_Q igual a 0,75 (para malha uniforme), então a precisão é de terceira ordem.

Os fatores geométricos de interpolação podem ser definidos em termos das dimensões do volume de controle, de acordo com

$$X_Q = \frac{C_2}{C_1 + C_2}; \quad Y_Q = \frac{C_2(1 + C_1)}{C_1 + C_2} \quad \text{e} \quad S_Q = (1 + C_1)(1 - C_2) \quad (4.13)$$

onde

$$C_1 = \frac{X_P}{X_P + X_W} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{X_P}{X_P + X_E} \quad (4.14)$$

Neste trabalho foi utilizado o esquema proposto por Zhu & Rodi (1991), que emprega partes de funções lineares que passam pelos pontos $(0,0)$, Q e P , segundo o NVD (Figura 4.3), ou seja

$$\hat{\phi}_e = \begin{cases} a_e + b_e \hat{\phi}_p & \text{se } 0 \leq \hat{\phi}_p \leq X_Q \\ c_e + d_e \hat{\phi}_p & \text{se } X_Q \leq \hat{\phi}_p \leq 1 \\ \hat{\phi}_p & \text{se } \hat{\phi}_p < 0 \text{ ou } \hat{\phi}_p > 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

onde

$$a_e = 0; \quad b_e = \frac{Y_Q}{X_Q}; \quad c_e = \frac{(Y_Q - X_Q)}{1 - X_Q} \quad \text{e} \quad d_e = \frac{(1 - Y_Q)}{1 - X_Q} \quad (4.16)$$

A Eq. (4.13) indica que as constantes da Eq. (4.16) variam de acordo o tamanho do volume de controle. O esquema de Zhu & Rodi (1991) é composto pelos esquemas *Upwind* de Segunda Ordem, Diferença Central e *Upwind* de Primeira Ordem. De acordo com Leonard (1991), este esquema é de segunda ordem.

4.1.3 Esquema QUICK

O esquema de discretização QUICK, “*Quadratic Upstream Interpolation for the Convection Kinematics*” foi proposto por Leonard (1979) e utiliza um perfil quadrático para avaliar os fluxos nas faces dos volumes controles, sendo que dois pontos localizam-se a montante da face e um ponto à jusante. Leonard & Mokhtari (1991) otimizaram o esquema utilizando uma média ponderada das interpolações através das aproximações de Diferenças Centrais e *Upwind* de Segunda Ordem. Por exemplo, para a face e do volume de controle apresentado na Fig. 4.2, considerando que a direção do escoamento é da esquerda para a direita, o valor da variável convectada ϕ_e é dado por:

$$\phi_e = \theta \left[\frac{X_E}{X_P + X_E} \phi_P + \frac{X_P}{X_P + X_E} \phi_E \right] + (1 - \theta) \left[\frac{X_W + 2X_P}{X_W + X_P} \phi_P - \frac{X_P}{X_W + X_P} \phi_W \right] \quad (4.17)$$

Na Eq. 4.17, caso $\theta = 1$ equivale ao esquema Diferença Central, caso $\theta = 0$ resulta no esquema *Upwind* de Segunda Ordem. O esquema QUICK tradicional (Leonard, 1979) é obtido com $\theta = 1/8$. Tipicamente, este esquema é mais preciso que os restantes utilizados em malhas estruturadas, sendo que possui um erro de truncamento de 3ª Ordem e os erros de falsa difusão são reduzidos significativamente. No entanto, dependendo do modo como é formulado, poderá conduzir a coeficientes da matriz de discretização negativos e a problemas de convergência.

4.1.4 Discretização Temporal

A expressão genérica para a evolução temporal de uma variável ϕ é dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) \quad (4.18)$$

onde F é o termo correspondente à parte convectiva e difusiva do fluxo através da face do volume, além do termo de geração. Na aplicação deste trabalho, nas

simulações LES, foi utilizada discretização temporal de segunda ordem.

A discretização temporal de segunda ordem é obtida a partir de uma expansão em série de Taylor, utilizando o instante de tempo presente n , passado $n-1$ e futuro $n+1$.

$$\phi^{n+1} = \frac{4}{3}\phi^n - \frac{1}{3}\phi^{n-1} + \frac{2}{3}\Delta t F(\phi^{n+1}) \quad (4.19)$$

onde o termo F deve ser obtido no instante de tempo futuro.

Recomenda-se a utilização de um passo de tempo que garanta o número de Courant, baseado na velocidade máxima u_{\max} ($C_o = u_{\max}\Delta t / \Delta x$), abaixo de 1,0.

O processo de discretização resulta num sistema de equações algébricas para cada volume de controle, do tipo

$$a_p \phi_{c_0} = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (4.20)$$

onde o sub-índice nb refere-se às células vizinhas, a_p e a_{nb} são os coeficientes principal e vizinhos linearizados para solução a solução de ϕ e de ϕ_{nb} respectivamente.

4.2. Discretização das Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier Stokes: equação da continuidade e equação de quantidade de movimento, governantes do escoamento são casos particularizados da equação de transporte, Eq. (4.1).

Para discretizar a equação de quantidade de movimento, todo o esquema proposto na seção 4.2 pode ser aplicado. Porém, como a pressão não é conhecida é conveniente explicitar a pressão na equação discretizada. O componente x da equação de quantidade de movimento pode ser definida como:

$$a_p u_{c_0} = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \sum_f p_f n_f A_f + b \quad (4.21)$$

sendo que o campo de pressão e os fluxos de massa nas faces não são conhecidos e devem ser obtidos como parte da solução. Note que é necessário conhecer o

valor da pressão na face, entre as células 0 e 1 da Fig. 4.1. O algoritmo de discretização utilizado pelo Fluent utiliza esquema co-localizado, isto é, os valores de pressão e velocidade encontram-se armazenados no mesmo ponto, no centro do volume de controle. Dessa forma, a pressão na face é interpolada através da expressão proposta por Rhie & Chow (1983)

$$p_f = \frac{p_{c_0} / a_{p,c_0} + p_{c_1} / a_{p,c_1}}{1/a_{p,c_0} + 1/a_{p,c_1}} \quad (4.22)$$

onde a_{p,c_0} e a_{p,c_1} são os coeficientes obtidos na equação de quantidade de movimento, Eq. (4.21), associados aos respectivos centróides dos volumes de controle.

O fluxo de massa também deve ser conhecido nas faces, e este deve ser determinado de forma a garantir conservação de massa, a qual pode ser escrita na forma discretizada como

$$\sum_f \rho_f u_{nf} A_f = 0 \quad (4.23)$$

Para satisfazer a Eq. (4.23) é necessário relacionar a velocidade normal à face do volume de controle, u_{nf} , com as velocidades armazenadas no centro da célula. Para isso, u_{nf} é interpolado através de uma expressão (Rhie & Chow, 1983) que utiliza os coeficientes a_p da equação de quantidade de movimento, Eq. (4.21), como fatores de ajuste, assim

$$u_{nf} = \hat{u}_f + d_f (p_{c_0} - p_{c_1}) \quad (4.24)$$

onde

$$\hat{u}_f = \frac{a_{p,c_0} u_{nc_0} + a_{p,c_1} u_{nc_1}}{a_{p,c_0} + a_{p,c_1}} ; d_f = \frac{A_f}{(a_{p,c_0} + a_{p,c_1})/2} \quad (4.25)$$

O termo \hat{u}_f contém influência das velocidades de ambas as células vizinhas, p_{c_0} , p_{c_1} e u_{nc_0} , u_{nc_1} são, respectivamente, as pressões e as velocidades

normais dentro de dos volumes de controle, situados a cada lado da face f da Fig. 4.1.

4.2.1 Acoplamento pressão-velocidade

Com a finalidade de resolver o acoplamento pressão-velocidade foram utilizados os algoritmos SIMPLE (Patankar,1980) e PISO (Issa, 1986). Estes algoritmos utilizam passos com estimativa e correção, baseados no método de Chorin (Chorin, 1968, 1969). Ambos os métodos determinam o campo de velocidade a partir de um campo de pressão estimado, resolvendo a equação de conservação de quantidade de movimento. O campo de pressão deve ser corrigido de forma a satisfazer a equação de conservação de massa. Considera-se que o campo de velocidade u^* é obtido da equação de quantidade de movimento se o campo de pressão for p^* .

O algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) desenvolvido por Patankar (1980) relaciona a correção da velocidade $u'_f = u_f - u_f^*$ com a correção de pressão $p'_{c_o} = p_{c_o} - p_{c_o}^*$ a partir da equação de conservação de quantidade de movimento, como

$$u'_f = d_f (p'_{c_o} - p'_{c_l}) \quad (4.26)$$

A correção de pressão é obtida de forma a garantir conservação de massa. A fórmula de correção de velocidade é substituída na equação discretizada de conservação de massa, resultando em

$$a_p p'_{c_o} = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b \quad ; \quad b = \sum_f \rho_f u_f^* A_f \quad (4.27)$$

onde o termo b corresponde à fonte de massa que deve se anular quando o esquema convergir.

Uma vez que a solução da equação de correção de pressão é obtida, a pressão do centro do volume de controle e o fluxo de massa nas faces dos volumes de controle são corrigidos através de,

$$p_{c_0} = p_{c_0}^* + \alpha_{p_{c_0}} p'_{c_0} \quad ; \quad u_f = u_f^* + d_f (p'_{c_0} - p'_{c_1}) \quad (4.28)$$

sendo, $\alpha_{p_{c_0}}$ o fator de relaxamento da pressão.

Considerando dois níveis de correção, obtém-se o algoritmo PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) desenvolvido por Issa (1986), o qual gera uma estimativa melhor do campo de velocidade e pressão quando comparada com o algoritmo SIMPLE, já que utiliza dois níveis de correções de pressão e velocidade. O procedimento é análogo ao SIMPLE, porém, dois níveis de correção de velocidade e pressão são utilizados.

Uma vantagem do algoritmo PISO implementado no Fluent com relação a estimativa de correção de fluxo de massa é a utilização de uma correção associada à não ortogonalidade da malha. Este processo referenciado como “*Skewness Correction*” reduz significativamente a dificuldade de convergência associado com malhas altamente não estruturadas.

O algoritmo PISO requer um maior tempo de computação por iteração, mas pode diminuir drasticamente o número de iterações necessárias para a convergência, especialmente para problemas transientes. Desta forma o algoritmo de PISO é recomendado para problemas transientes, pois apesar de levar mais tempo em uma iteração, espera-se que irá requerer menos iterações que o algoritmo SIMPLE. Para casos permanentes recomenda-se o algoritmo SIMPLE.

Uma comparação entre os dois algoritmos mostra que o método computacional PISO mostra uma significativa redução de tempo de 60% em relação ao SIMPLE, independentemente do passo de tempo ou do refinamento da malha.

4.3

Metodologia de Solução do Sistema Algébrico

Com o objetivo resolver o sistema algébrico, FLUENT utiliza o esquema *Multigrid* de Correção Aditiva, proposto por (Hutchinson & Raithby, 1986), o qual acelera a convergência através de correções em uma série de níveis de refinamento da malha. A utilização do esquema *Multigrid* reduz significativamente o número de iterações e o tempo de processamento necessário para obter uma solução convergida, particularmente quando a malha contém um

grande número de volumes de controle.

O método *Multigrid* baseia-se na observação de que cada faixa de frequência do erro deve ser suavizada no espaçamento mais adequado para tal. Para que os componentes do erro de baixa frequência possam ser eliminados com eficiência, o método *Multigrid* procura trabalhar com uma seqüência de malhas M_1, M_2, \dots, M_n , cada vez mais grossas, onde então o erro pode ser rapidamente suavizado. Em cada nível de malha, os componentes do erro correspondentes são eficientemente reduzidos, acelerando o processo de convergência.

A técnica *Multigrid* permite que o erro global seja diminuído por meio do refinamento de uma seqüência de malhas sucessivas. Este método é baseado no princípio de que o erro global (baixa frequência) correspondente a uma malha fina possa ser representado em uma malha grosseira (menos refinada). Visto que os cálculos podem ser realizados em um decaimento exponencial em termos de tempo computacional e memória de armazenamento em malhas mais grosseiras, existe o potencial para uma eliminação eficiente de erro global.

Um exemplo de uma seqüência de malhas para a metodologia de solução do esquema *Multigrid* é apresentado a seguir.

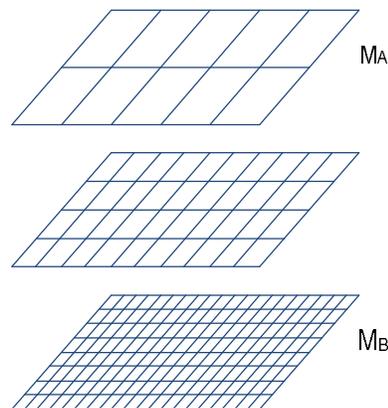


Figura 4.4 – Seqüência de malhas para o esquema Multigrid.

O sistema algébrico deve convergir a cada nível de malha. O resíduo normalizado R_ϕ da equação de transporte discretizada, Eq. (4.20) pode ser escrito através da seguinte relação

$$R_\phi = \frac{\sum_{nb} \left[\sum a_{nb} \phi_{nb} + b - a_P \phi_{c_o} \right]}{\sum_{N_T} [a_P \phi_{c_o}]} \quad (4.29)$$

Para todos os casos analisados neste trabalho, considerou-se a solução convergida para $R_\phi < 10^{-6}$ no nível mais fino.