3 Modelamento Matemático

A Figura 3.1 ilustra uma camada limite turbulenta, onde pode-se observar que o escoamento externo à camada limite se desloca com velocidade U, enquanto os vórtices se movem com flutuações de velocidades aleatórias da ordem de um décimo de U. O tamanho do maior vórtice ℓ é comparado à espessura da camada limite δ . O escoamento turbulento é caracterizado por este movimento de agitação local, cuja dimensão característica é a escala de turbulência local.

A turbulência apresenta um espectro contínuo de escalas. Os grandes vórtices (escalas maiores) são responsáveis pela maior parte de energia cinética do escoamento, a qual é transferida para os pequenos vórtices (escalas menores), os quais dissipam a energia em forma de calor por meio da ação da viscosidade molecular, caracterizando a turbulência como um processo de cascata. Uma das características mais importante da turbulência é a elevada taxa de mistura, responsável pelo aumento considerável da transferência de massa, quantidade de movimento e energia.



Figura 3.1: Grandes vórtices na camada limite turbulenta. O escoamento externo à camada limite é estacionário, sendo U constante; os vórtices se movem com flutuações de velocidades aleatórias da ordem de um décimo de U. O tamanho do maior vórtice (ℓ) é comparado à espessura da camada limite (δ) . (Corrsin e Kistler, 1954).

As não-linearidades da equação de *Navier-Stokes* levam a interações entre os diferentes comprimentos de onda, em todas as direções. O principal processo físico que propaga o movimento em uma vasta gama de comprimentos de onda é o denominado "*vortex stretching*" (alongamento ou esticamento do vórtice). A turbulência ganha energia se os vórtices são orientados na direção na qual os gradientes de velocidade média são maiores. Esta energia está associada aos grandes vórtices, que ao se esticarem formam os pequenos vórtices, para os quais transferem energia. O processo se repete continuamente, até atingir a escala de Kolmogorov, quando a energia é dissipada e os vórtices desaparecem.

Devido ao mecanismo descrito acima, observa-se que o escoamento turbulento possui um elevado número de graus de liberdade Ngl, o qual é proporcional a razão entre a macro escala do escoamento L e a micro escala (escala de Kolmogorov) l_d , o que por sua vez é proporcional ao número de Reynolds (Silveira Neto, 1998).

$$Ngl = \left(\frac{L}{l_d}\right)^3 = \operatorname{Re}^{9/4}$$
(3.1)

As equações de conservação independem do regime de escoamento, porém o regime turbulento é sempre transiente e tri-dimensional, e possui uma vasta gama de escalas de comprimento. Este elevado número de graus de liberdade é a principal dificuldade de se resolver escoamentos turbulentos.

Escoamentos turbulentos podem ser estudados seja por métodos analíticos e/ou numéricos, com diferentes níveis de aproximação, obtendo-se uma maior ou menor descrição das características do escoamento (Piomelli, 1999). Entre as diversas modelagens numéricas existentes para avaliar as características físicas de escoamentos turbulentos, as três metodologia mencionadas a seguir são as de maior importância.

1. Simulação Numérica Direta (DNS)

A simulação numérica direta (Direct Numerical Simulation, DNS) resolve todas as escalas de turbulência. Logo, para uma perfeita resolução espacial do escoamento, é preciso utilizar uma malha fina o suficiente para captar todas as escalas, isto é, o número de pontos nodais deve ser proporcional a Re^{9/4}, o que requer uma enorme capacidade computacional, o que pode se tornar inviável para altos números de Reynolds. Teoricamente, com esta metodologia, a turbulência não necessita de nenhuma modelagem, porém, métodos numéricos de alta precisão e robustos precisam ser utilizados.

2. Simulação de Equações de Médias de Reynolds (RANS)

Esta simulação considera o conceito de decomposição das escalas, através da aplicação de um processo de média temporal, decompondo a velocidade em uma parte média e outra temporal. As Equações Médias de Reynolds (*Reynolds Average Navier-Stokes*, RANS) são estabelecidas através de um processo de média temporal, o qual elimina todas as flutuações físicas do escoamento, reduzindo substancialmente os requisitos de capacidade computacional. Porém, introduz novas variáveis que precisam de um modelo para fechamento do conjunto de equações e incógnitas.

3. Simulação de Grandes Escalas (LES)

A simulação de grandes escalas (Large Eddy Simulation, LES) é caracterizada por ser uma metodologia intermediária à Simulação Numérica Direta e a simulação via Equações Médias de Reynolds. Com esta modelagem as escalas maiores, responsáveis pelo maior parte do transporte de energia são diretamente calculadas, e somente as escalas menores, mais homogêneas e isotrópicas são modeladas via um modelo sub-malha.

As metodologias RANS e LES possuem origens distintas, porém ambas são obtidas através processos de filtragens. Em ambos os casos, uma variável filtrada pode ser definida através da operação de convolução:

$$\overline{a}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\left[x - x', t - t', \Delta(x,t), \theta(x,t)\right] a(x',t') dx' dt', \qquad (3.2)$$

onde a = a (x, t) é a variável original (variável instantânea que pode ser um vetor ou um escalar), \overline{a} é a variável filtrada, G é o filtro de Kernel, o qual é apropriadamente escolhido para eliminar as flutuações nas escalas menores que a largura Δ ou θ . Os parâmetros $\Delta(x,t) = \theta(x,t)$ controlam respectivamente as larguras dos filtros espaciais e temporais descritos pela função G.

Na metodologia RANS, a filtragem é temporal, enquanto que na metodologia LES a filtragem é feita espacialmente. Uma terceira abordagem, denominada Simulação de Vórtices Descolados ou DES (*Detached Eddy* *Simulation*) busca mesclar as duas técnicas de forma a tirar partido das vantagens que cada uma delas propicia.

Simulações LES exigem um menor esforço computacional que a simulação numérica direta (DNS), mas um maior esforço comparado com a modelagem (RANS). Por outro lado, a metodologia LES apresenta um menor grau de aproximação que a metodologia RANS, sendo mais precisa e fornecendo um nível muito maior de detalhes do escoamento em comparação a esta última. Uma representação entre estas modelagens associado ao custo computacional requerido é apresentado na Fig. 3.2 a seguir.



Figura 3.2: Comparação entre as diferentes modelagens da turbulência.

No presente trabalho as duas metodologias LES e RANS foram empregadas para avaliar o fenômeno do jato incidente com transferência de calor. Avaliou-se diversos modelos RANS de duas equações diferencias e um modelo de tensões de Reynolds. Já com a metodologia LES, o modelo de sub-malha selecionado foi o modelo dinâmico de Smagorisnky.

Os seguintes modelos RANS foram empregados: κ - ε RNG (Yakhot e Orszag, 1992), κ - ω SST (Menter, 1994, 2003), e RSM (Launder et al., 1975; Gibson e Launder, 1978; Launder, 1989), tal como indicado na seção 1.1. A seleção destes modelos foi baseada considerando as vantagens de cada um desses modelos para a obtenção de bons resultados. O modelo κ - ε RNG implementado no Fluent foi ajustado empiricamente para prever bem jatos livres, assim como escoamentos espiralados, i.e., dois dos fenômenos presentes no escoamento de interesse aqui. Este modelo necessita do uso de lei de parede, uma vez que não pode ser aplicado nas regiões onde a contribuição molecular é dominante. Desta

forma, selecionou-se também o modelo $\kappa-\omega$ SST, o qual é obtido com uma combinação do modelo $\kappa-\omega$ padrão (Wilcox, 1998) com o modelo $\kappa-\varepsilon$ padrão. Na região de parede, o modelo $\kappa-\omega$ padrão é empregado amortecendo a turbulência com funções de amortecimento, e em regiões mais afastadas, onde a turbulência domina, o modelo $\kappa-\varepsilon$ padrão é utilizado. Finalmente, investigou-se o desempenho do modelo RSM (Reynolds Stress Model), o qual envolve a solução de uma equação de conservação para cada um dos componentes da tensão de Reynolds e apresenta como principal vantagem em relação aos outros modelos selecionados a capacidade de prever a existência de anisotropias no escoamento.

Na simulação de grandes escalas, LES, foi selecionado o modelo Smagorinsky Dinâmico proposto por (Germano et al., 1991; Lilly, 1992). Este modelo é uma evolução com relação ao modelo original de Smagorinsky, pois o parâmetro do modelo de sub-malha é ajustado em função do próprio escoamento e diversos relatos otimistas com relação a aplicação deste modelo podem ser encontradas na literatura disponível para uma variedade de situações.

Na seção seguinte são apresentadas as equações governantes do fenômeno do jato incidente com transferência de calor: equação de conservação de massa, equação de quantidade de movimento e equação de energia. A seguir, os modelos RANS e LES selecionados para serem avaliados neste trabalho são descritos.

3.1 Equações Governantes

O problema de interesse consiste de um jato axi-simétrico espiralado de água saindo de um bocal com diâmetro *D*, com propriedades conhecidas escoando em um meio de ar não perturbado e atingindo um disco aquecido afastado *H* do bocal. Um fluxo de calor constante q_s'' é imposto no disco. Considera-se as propriedades (massa específica e propriedades termofísicas) constantes.

Escoamentos não isotérmicos, no regime turbulento, são governados pelas mesmas equações de conservação que os escoamentos no regime laminar, porém escoamentos turbulentos são sempre tri-dimensionais e transientes. As equações de conservação de massa, quantidade de movimento linear e energia podem ser descritas por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\upsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$
(3.4)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$
(3.5)

onde t é o tempo, u_i é o componente do vetor velocidade, $p_r = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z z$ é a pressão modificada, p é a pressão termodinâmica, \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade, z e \mathbf{e}_z correspondem a coordenada vertical e o unitário na direção vertical. T é a temperatura, ρ é a massa específica do fluido, $\upsilon = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática, onde μ a viscosidade absoluta ou dinâmica, $\alpha = k/(\rho c_p)$ é a difusividade térmica, sendo k a condutividade térmica e c_p é o calor específico a pressão constante.

Adimensionalizando as equações anteriores com

$$U_{i} = \frac{u_{i}}{U_{o}} ; X_{i} = \frac{x_{i}}{D} ; t^{*} = \frac{t U_{o}}{D} ; p^{*} = \frac{p_{r}}{\rho U_{o}^{2}/2} ; \theta = \frac{T - T_{o}}{q_{s}^{"} D/k} (3.6)$$

onde U_o e T_o correspondem à velocidade média e temperatura média do jato na saída do bocal com o diâmetro igual a D, e q''_s é o fluxo de calor na parede onde o jato é incidente; mostra-se que as equações anteriores dependem somente do número de Reynolds **Re** e do número de Prandtl, **Pr**.

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho \, U_o \, D}{\mu} \quad ; \quad \mathbf{Pr} = \frac{\mu \, c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \tag{3.7}$$

Apesar das filtragens utilizadas nas metodologias RANS e LES serem, fundamentalmente, diferentes, os termos delas derivados apresentam muitas semelhanças e são comumente modelados como termos difusivos, usando-se a hipótese de Boussinesq de 1877 (Ref. Hinze,J. O, 1975) que será apresentada adiante.

3.2 Equações de Médias de Reynolds - RANS

A ferramenta básica requerida para derivar as equações RANS, a partir das equações de Navier-Stokes é a decomposição do Reynolds. A decomposição do Reynolds é baseada na separação dos campos instantâneos ϕ como sendo um somatório entre a média da grandeza no tempo $\overline{\phi}$ e uma flutuação instantânea ϕ' , que descreve as variações em torno do valor médio, isto é

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{3.8}$$

onde o valor médio temporal é obtido por,

$$\overline{\phi} = \lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi \, dt \right]$$
(3.9)

Naturalmente que a média de uma flutuação $\overline{\phi}$ é zero.

Substituindo os valores instantâneos das grandezas pelos valores médios mais suas flutuações e aplicando o operador média temporal sobre um intervalo de tempo finito nas equações de Navier-Stokes, obtêm-se as equações médias de Reynolds, as quais são apresentadas a seguir

Equação de continuidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.10}$$

Equação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \overline{u_j}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p_r}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\upsilon \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} - \overline{u_i u_j} \right)$$
(3.11)

Equação de energia:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \overline{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\upsilon}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - \overline{u'_i T'} \right)$$
(3.12)

As equações médias de conservação (Eq.3.10 a Eq.3.12) são aplicáveis para regime transiente (simulações de casos 3D). Já para os casos permanentes ou 2D, os termos $\partial u_i/\partial t$ e $\partial T/\partial t$ das equações de quantidade de movimento e de energia respectivamente são nulos. Estas equações médias de conservação são quase iguais às equações originais, com exceção do aparecimento dos termos adicionais $-u_i'u_j'$ e $-u_i'T'$ nas equações de quantidade de movimento e energia. Como estes termos surgem devido ao fato do escoamento ser turbulento, o qual apresenta um comportamento difusivo, estes termos são interpretados como tensão e fluxo de calor adicional ao movimento e são denominados tensão de Reynolds turbulento, e fluxo de calor turbulento, respectivamente.

Com o aparecimento do tensor de Reynolds e do fluxo turbulento de calor ocorre um desbalanceamento entre o número de incógnitas e o número de equações, gerando o denominado problema de fechamento da turbulência. Para solucionar este problema é preciso introduzir modelos para avaliar o tensor de Reynolds e o fluxo de calor turbulento.

Duas abordagens são utilizadas para modelar o tensor de Reynolds: modelos de viscosidade turbulenta proposta por Boussinesq em 1877 (Hinze, 1975) e os modelos de fechamento diretos ou de segunda ordem.

Os modelos de viscosidade turbulenta propõem que a contribuição das tensões turbulentas na transferência de quantidade de movimento seja descrita de forma análoga à observada pela ação da viscosidade molecular do fluido, sendo proporcional ao tensor taxa de deformação do escoamento médio S_{ij} . Deste modo se introduz o conceito de viscosidade turbulenta, v_t .

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2 \ \upsilon_t \ S_{ij} - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \tag{3.13}$$

onde

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$
(3.14)

 δ_{ij} representa o delta de Kronecker e κ a energia cinética turbulenta por unidade de massa, representada por

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'_{i} u'_{i}}) = \frac{1}{2} (\overline{u'^{2}} + \overline{v'^{2}} + \overline{w'^{2}})$$
(3.15)

O último termo da equação (3.13) pode ser interpretado com uma tensão normal adicional para representar a flutuação da pressão dinâmica do escoamento e pode ser incorporado dentro da pressão reduzida como $P = p_r + 2/3 \kappa$

O fluxo de calor turbulento também é definido a partir de uma analogia com o fluxo de calor por difusão molecular, podendo ser avaliado como

$$-\overline{u_i'T'} = \frac{\upsilon_t}{\mathbf{Pr}_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}$$
(3.16)

onde \mathbf{Pr}_t é o número de Prandtl turbulento. \mathbf{Pr}_t é uma constante empírica considerada como constante na grande maioria das aplicações.

Ao contrário da viscosidade molecular v, a viscosidade turbulenta v_t não é uma propriedade do fluido, mas do escoamento, devendo, portanto embutir em sua formulação parâmetros que caracterizem adequadamente as tensões turbulentas. Em termos dimensionais, a viscosidade turbulenta pode ser expressa como um produto entre valores característicos de velocidade V_c e comprimento L_c . O que diferencia a grande maioria dos modelos de turbulência é a identificação da velocidade e comprimento característico da turbulência. Existem modelos com diversos níveis de complexidade, precisão e generalidade. Estes variam desde modelos algébricos (modelos de zero equações) até modelos de quatro equações diferenciais, passando pelos modelos de uma, duas e três equações diferenciais. Os modelos de duas equações diferenciais são os mais populares, por uma questão de custo benefício e foram selecionados para serem investigados neste trabalho.

Todos os modelos de viscosidade turbulenta selecionados aqui consideram que a velocidade característica da turbulência pode ser avaliada a partir da energia cinética turbulenta, isto é, $V_c = \kappa^{1/2}$. Uma das diferenças entre a maioria dos modelos diz respeito a escala característica de comprimento. Os modelos da família κ - ε , como os selecionados neste trabalho, relacionam a escala característica com a taxa de dissipação da energia cinética ε , ao considerar que a potência dissipada por um turbilhão, pode ser estimada pelo produto da força de arraste pela velocidade característica (*Pot* = $F_d V_c$). Por sua vez, o arraste é proporcional a velocidade ao quadrado ($F_d \approx \rho V_c^2 L_c^2$), logo

$$\varepsilon = \frac{Pot}{\rho \forall} = \frac{F_d V_c}{\rho L_c^3} \approx \frac{\rho V_c^2 L_c^2 V_c}{\rho L_c^3} \Longrightarrow L_c \approx \frac{V_c^3}{\varepsilon} \approx \frac{\kappa^{3/2}}{\varepsilon}$$
(3.17)

A taxa de dissipação é definida a partir do gradiente das flutuações como

$$\varepsilon = \upsilon \frac{\overline{\partial u_i'} \partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$$
(3.18)

O modelo $\kappa - \omega$ SST é baseado na taxa de dissipação específica, sendo definida como a razão de ε por κ , isto é, $\omega = \varepsilon/\kappa$.

Os modelos baseados na hipótese da viscosidade turbulenta usualmente são chamados "modelos isotrópicos", uma vez que as tensões de Reynolds normais são iguais. Visando eliminar esta restrição, surgem os modelos de fechamento direto ou de segunda ordem, que visam modelar diretamente as tensões de Reynolds a partir de equações de conservação para estas variáveis.

Uma descrição dos diversos modelos utilizados no presente trabalho é apresentada a seguir.

3.2.1 Modelo *κ–ε* padrão

O modelo κ - ε padrão é sem dúvida o modelo que tem recebido mais atenção, principalmente pelos trabalhos de Launder e Spalding (1972, 1974). Neste modelo a viscosidade turbulenta é definida baseada nas escalas características como descrito acima, de acordo com

$$\upsilon_t = \frac{\mu_t}{\rho} = c_\mu \, \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.19}$$

onde $c_{\mu} = 0,09$ é uma constante empírica.

As equações de transporte de energia cinética turbulenta κ e a dissipação de energia cinética turbulenta ε podem ser derivadas a partir das equações de Navier-Stokes, podendo ser escritas como

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + P_\kappa - \varepsilon$$
(3.20)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} P_{\kappa} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\kappa}$$
(3.21)

onde a produção de energia cinética turbulenta P_{κ} ou taxa de transferência de energia do escoamento médio pelo o mecanismo de turbulência é

$$P_{\mathcal{K}} = -\overline{u_i' \, u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{3.22}$$

A qual pode ser rescrita com o auxílio da Eq. (3.12), para escoamentos incompressíveis, como

$$P_{\kappa} = 2 \upsilon_t S_{ij}$$
 ou $P_{\kappa} = \upsilon_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$ (3.23)

Este modelo introduz além de c_{μ} , mais 4 constantes empíricas: os números de Prandtl da energia cinética turbulenta $\sigma_{\kappa} = 1,0$ e da taxa dissipação de κ , $\sigma_{\varepsilon} = 1,3$, além das constantes $c_{1\varepsilon} = 1,44$ e $c_{2\varepsilon} = 1,92$.

3.2.2 Modelo *κ−ε* Realizável

Em geral o modelo κ – ε Realizável (Shih et al, 1995) fornece uma previsão mais acurada da taxa de cisalhamento de jatos planos e circulares em relação ao modelo tradicional. Também fornece uma melhor predição para escoamentos envolvendo rotação, com fortes gradientes de pressão adversos. Neste modelo, a viscosidade turbulenta é dada pela mesma Eq. (3.19), com a diferença de que o parâmetro c_{μ} não é mais uma constante. Este parâmetro é ajustado de forma a garantir que o modelo seja realizável, isto é, não viola a desigualdade de Schwartz (Pope, 2000)

$$\overline{u'_i u'_j}^2 \le \overline{u'^2_i} \overline{u'^2_j} \quad e \quad \overline{u'_i u'_i} \ge 0$$
(3.24)

Assim, para garantir $\overline{u'u'} \ge 0$, tem-se que

$$\overline{u'u'} = \frac{2}{3}\kappa - 2\upsilon_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{2}{3}\kappa - 2\frac{c_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$$
(3.25)

Logo para que a tensão normal seja positiva é preciso que

$$c_{\mu} > \frac{1}{3} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^{-1}$$
(3.26)

Dessa forma o parâmetro c_{μ} é ajustado em função do escoamento médio. Na sub-camada inercial de uma camada limite em equilíbrio c_{μ} é aproximadamente 0,09; e para um escoamento homogêneo cisalhante é igual a 0,05.

Neste modelo o parâmetro c_{μ} é definido como sendo função da taxa de deformação do escoamento médio S_{ij} e taxa de rotação do escoamento médio Ω_{ij} , de acordo com

$$c_{\mu} = \frac{1}{A_{o} + A_{s} \frac{\kappa U^{*}}{\varepsilon}}$$
(3.27)

onde U^* é uma velocidade de referência

$$U^* \equiv \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \tag{3.28}$$

sendo

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \qquad ; \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \qquad (3.29)$$

e os parâmetros empíricos A_o e A_s são dados por:

$$A_o = 4,04$$
 ; $A_s = \sqrt{6}\cos\phi$; $\phi = \frac{1}{3}\cos^{-1}(\sqrt{6}W)$ (3.30)

onde

$$W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{S^3} \quad ; \quad S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \tag{3.31}$$

A equação de transporte da energia cinética turbulenta κ é idêntica a do modelo κ - ε padrão, Eq. (3.20). Já a equação de transporte para ε é ligeiramente modificada, uma vez que a mesma é baseada na equação dinâmica da raiz quadrada média da flutuação da taxa de dissipação específica, sendo igual a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_1 S \varepsilon - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\kappa + \sqrt{\upsilon \varepsilon}}$$
(3.32)

onde

$$C_1 = \max\left[0, 43; \frac{\eta}{\eta + 5}\right] \quad ; \qquad \eta = S \frac{\kappa}{\varepsilon} \tag{3.33}$$

Uma limitação do modelo $\kappa - \varepsilon$ Realizável é a geração de viscosidades turbulentas não físicas em regiões estacionárias e em movimento. Nas equações acima o termo de produção de ε , $C_1 S \varepsilon$, segundo termo do lado direito da Eq. (3.32) não envolve a produção de κ como o modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão. De acordo com o manual do Fluent (FLUENT, 2010), acredita-se que esta expressão para a geração de ε represente melhor a transferência espectral de energia. Outra diferença está no termo de destruição, o qual não apresenta nenhuma singularidade, quando κ tende a zero.

Os valores das constantes empíricas são: $\sigma_{\kappa} = 1,0$; $\sigma_{\varepsilon} = 1,2$; $c_{1\varepsilon} = 1,44$; e $c_{2\varepsilon} = 1,9$.

Uma limitação deste modelo, no entanto é o fato que o mesmo produz viscosidades turbulentas não físicas em situações em que o domínio computacional contém ao mesmo tempo zonas rotacionais e estacionárias de fluido. Isso ocorre porque o modelo inclui os efeitos da rotação média na viscosidade turbulenta.

3.2.3 Modelo *κ–ε* RNG

O modelo de turbulência κ - ε RNG (Yakhot and Orszag, 1992) tem sua origem baseada uma técnica estatística rigorosa, chamada "Teoria dos Grupos de Renormalização" (RNG, Renormalization Group Theory), na qual utiliza-se um processo de eliminação de escalas, para derivar as equações de transporte. As equações de transporte para $\kappa \in \varepsilon$ são bem semelhantes às do modelo κ - ε padrão, porém alguns parâmetros são determinadas analiticamente e outros deixam de ser constantes, como é o caso dos números de Prandtl da energia cinética turbulenta κ , e de sua taxa de dissipação ε , sendo determinados através de relações analíticas, obtidas em função da viscosidade turbulenta.

A equação de transporte de κ se mantém praticamente igual à do modelo κ - ε padrão, com uma pequena mudança no coeficiente de difusão de κ

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_{\kappa} \upsilon_{ef} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + P_{\kappa} - \varepsilon$$
(3.34)

onde α_{κ} é o inverso do número de Prandtl de κ e $\upsilon_{ef} = \upsilon + \upsilon_t$.

A equação de transporte para ε também apresenta uma modificação no coeficiente de difusão de ε . Porém, a grande diferença de desempenho deste modelo está relacionada com uma modificação no termo de destruição de ε na sua equação de transporte de forma a aumentar ou diminuir a destruição de ε dependendo se a taxa de deformação do escoamento encontra-se acima ou abaixo de certo limiar. A equação para ε pode ser escrita como

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_{\varepsilon} \upsilon_{ef} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} P_{\kappa} - c_{2\varepsilon}^* \frac{\varepsilon}{\kappa}$$
(3.35)

onde α_{ε} é o inverso do número de Prandtl de ε e $c^*_{2\varepsilon}$ depende da taxa de deformação do escoamento.

O inverso do número de Prandtl de κ e ε pode ser obtido da seguinte equação

$$\left|\frac{\alpha_{\kappa/\varepsilon} - 1,3929}{\alpha_o - 1,3929}\right|^{0,6321} \left|\frac{\alpha_{\kappa/\varepsilon} - 2,3929}{\alpha_o - 2,3929}\right|^{0,3679} = \frac{\upsilon}{\upsilon_{ef}}$$
(3.36)

onde $\alpha_o = 1$. Para altos números de Reynolds $\alpha_{\kappa} = \alpha_{\varepsilon} = 1,393$.

O procedimento de eliminação de escalas utilizado pela teoria RNG fornece uma equação diferencial para a viscosidade turbulenta, porém para altos números de Reynolds, a mesma equação para a viscosidade turbulenta do modelo $\kappa -\varepsilon$ padrão, Eq. (3.19), $v_t = c_{\mu} \kappa^2 / \varepsilon$ é obtida, sendo que a constante c_{μ} é obtida analiticamente como $c_{\mu} = 0,0845$.

O modelo κ – ε RNG implementado no Fluent (FLUENT, 2010) oferece uma opção para levar em consideração efeitos de rotação na turbulência, através de modificações na viscosidade turbulenta, em função de um número de *swirl* avaliado pelo próprio Fluent.

Como mencionado, a principal diferença de desempenho do modelo $\kappa - \varepsilon$ RNG e o modelo padrão está relacionado com o termo adicional na equação de ε , (Yakhot and Orszag, 1992). Este termo é introduzido através do parâmetro $c_{2\varepsilon}^{*}$

$$c_{2\varepsilon}^{*} = c_{2\varepsilon} + \frac{c_{\mu} \eta^{3} (1 - \eta / \eta_{o})}{1 + \beta \eta^{3}} \quad ; \quad \eta = S \frac{\kappa}{\varepsilon}$$
(3.37)

onde $\beta = 0,012$ e $\eta_0=4,38$. Note que nas regiões onde $\eta < \eta_0$, o termo adicional fornece contribuição positiva, com $c_{2\varepsilon}^*$ se tornando maior que $c_{2\varepsilon}$, aumentando a destruição de ε . Para $\eta > \eta_0$ a destruição de ε é diminuída.

O modelo $\kappa - \varepsilon$ RNG apresenta melhores resultados que o modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão em aplicações que apresentam deformações rápidas e linhas de corrente com curvatura. As constantes $c_{1\varepsilon}$ e $c_{2\varepsilon}$ são determinadas pela teoria do grupo de normalização sendo iguais a $c_{1\varepsilon} = 1,42$ e $c_{2\varepsilon} = 1,68$.

3.2.4 Modelo *κ–ω* SST

O modelo $\kappa - \omega$ SST (Shear Stress Transport) foi desenvolvido por Menter et al. (2003) visando tirar vantagem das melhores características dos modelos $\kappa - \omega$

padrão (Wilcox, 1998) e κ - ε padrão (Launder and Spalding, 1972).

O modelo κ - ε padrão apresenta bom equilíbrio entre precisão e robustez, com boa previsão nas regiões longe da parede.

Já o modelo κ – ω padrão apresenta bons resultados em regiões próximas às paredes, ao utilizar funções de amortecimento. Também tem mostrado bom desempenho na presença de gradientes de pressão adverso.

O modelo $\kappa - \omega$ SST combina as vantagens dos modelos de turbulência $\kappa - \omega$ padrão e $\kappa - \varepsilon$ padrão, mas ainda falha na previsão do ponto de separação do escoamento em uma superfície lisa. Com o objetivo de corrigir essa deficiência, Menter propôs a adoção de um limitador para o valor da viscosidade turbulenta, de forma a utilizar cada modelo em distintas regiões do escoamento.

Uma vantagem desta formulação é o tratamento próximo à parede para baixos números de Reynolds.

O modelo $\kappa - \omega$ SST combina os dois modelos através de funções de mistura F_1 e F_2 , que ponderam a contribuição dos diferentes parâmetros de cada modelo. As funções de mistura têm por objetivo selecionar o modelo $\kappa - \omega$ padrão na região da camada limite turbulenta (região da parede) e o modelo $\kappa - \varepsilon$ para as regiões longe da parede.

As equações e transporte para a energia cinética turbulenta κ e taxa de dissipação específica ω são:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_i}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + P_\kappa - \beta^* \kappa \omega$$
(3.38)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_i}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{\alpha}{\upsilon_i} P_\kappa - \beta \ \omega^2 + 2(I - F_i) \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$$
(3.39)

Uma característica do modelo SST é a introdução de um limite superior de tensão de cisalhamento na camada limite para evitar níveis excessivos de tensão de cisalhamento tipicamente previstos em modelos de viscosidade turbulenta de Boussinesq. A viscosidade turbulenta no modelo SST é definida como:

$$\upsilon_t = \frac{\kappa}{\omega} \frac{1}{\max\left(\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{a_1 \, \omega}\right)} \tag{3.40}$$

onde $a_1=0,31$ é uma constante empírica, $\Omega = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$ representa uma medida da taxa de rotação, onde Ω_{ij} é a taxa de rotação do escoamento médio definida por:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(3.41)

 α^* é um coeficiente que amortece a viscosidade turbulenta para baixos números de Reynolds

$$\alpha^* = \left(\frac{\beta_i / 3 + \mathbf{Re}_t / 6}{1 + \mathbf{Re}_t / 6}\right) \qquad ; \qquad \mathbf{Re}_t = \frac{\kappa}{\upsilon \,\omega} \tag{3.42}$$

onde $\beta_i = F_1 \beta_{i_1} + (1 - F_1) \beta_{i_2}$, sendo $\beta_{i_1} = 0,075$ e $\beta_{i_2} = 0,0828$. A função β pode tomar o valor de β_{i_1} ou β_{i_2} .

A função de mistura F_1 é dada por

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4) \tag{3.43}$$

$$\Phi_{1} = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{0,09 \,\omega \, y}, \frac{500 \,\upsilon}{y^{2} \omega}\right), \frac{4 \,\rho \,\kappa}{\sigma_{\omega 2} \, D_{\omega}^{+} \, y^{2}}\right]$$
(3.44)

$$D_{\omega}^{+} = \max\left(2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_{i}} \frac{\partial \omega}{\partial x_{i}}, 10^{-20}\right)$$
(3.45)

onde y é a distância à parede e $\sigma_{\omega 2}$ =1,168 é uma constante empírica do modelo.

 F_2 é uma função de mistura semelhante a F_1 .

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) \tag{3.46}$$

$$\Phi_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{0,09\,\omega\,y}, \frac{500\,\upsilon}{y^2\omega}\right) \tag{3.47}$$

Os números de Prandtl são obtidos de acordo com

$$\sigma_{\kappa} = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\kappa,1} + (1 - F_1) / \sigma_{\kappa,2}} \quad ; \quad \sigma_{\omega} = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega,1} + (1 - F_1) / \sigma_{\omega,2}} \quad (3.48)$$

onde $\sigma_{\kappa,1}=1,176$; $\sigma_{\kappa,2}=1,0$; $\sigma_{\omega,1}=2,0$; $\sigma_{\omega,2}=1,168$.

O termo de produção de energia cinética turbulenta κ no modelo $\kappa-\omega$ SST é definido pela mesma equação que nos modelos $\kappa-\varepsilon$ padrão, Eq. (3.23). No termo de destruição de κ , tem-se que

$$\beta^* = 0,09 \left(\frac{4/15 + (\mathbf{Re}_t/8)^4}{1 + (\mathbf{Re}_t/8)^4} \right)$$
(3.49)

Os parâmetros dos termos de geração de ω depende de,

$$\alpha = \frac{\alpha_{\infty}}{\alpha^*} \left(\frac{1/9 + \operatorname{Re}_t/2,95}{1 + \operatorname{Re}_t/2,95} \right)$$
(3.50)

onde $\alpha_{\infty} = F_1 \alpha_{\infty 1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty 2}$, sendo

$$\alpha_{\infty 1} = \frac{\beta_{i1}}{0.09} - \frac{0.41^2}{0.3 \sigma_{\omega 1}} \quad ; \quad \alpha_{\infty 2} = \frac{\beta_{i2}}{0.09} - \frac{0.41^2}{0.3 \sigma_{\omega 2}} \tag{3.51}$$

3.2.5 Modelo do Tensor de Reynolds, RSM

Os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta fornecem resultados satisfatórios para escoamentos turbulentos bidimensionais sobre superfícies planas, mas não são capazes de prever corretamente os efeitos da curvatura de linhas de corrente sobre o escoamento. Outra limitação dessa classe de modelos acontece na avaliação das tensões normais de Reynolds, de grande importância em escoamentos com separação. Uma alternativa para a solução desses problemas é a obtenção das tensões de Reynolds diretamente de suas equações de transporte (*Reynolds Stress Model – RSM*). Estes modelos são considerados como modelos de fechamento direto ou de segunda ordem (Launder, 1989).

As tensões de Reynolds fornecem uma melhor alternativa quando as escalas

Modelamento Matemático

de comprimento e velocidade variam significativamente com a direção. Este modelo é, portanto indicado para escoamentos anisotrópicos e escoamento com a presença da componente angular de velocidade (escoamento espiralado).

As equações de transporte para as tensões de Reynolds também podem ser obtidas a partir das equações de Navier-Stokes, conforme mostrado por Launder et al. (1984), Warsi (1992) e Alho e Ilha (2006). A equação de transporte para as tensões de Reynolds é apresentada a seguir:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_\ell}}{\partial x_\ell} \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\partial x_\ell} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$
(3.52)

onde D_{ij} é o termo de transporte difusivo, P_{ij} é a produção das tensões de Reynolds, enquanto que ε_{ij} é o termo de destruição. Π_{ij} é o termo de pressão.

Existem diversas modelagens para o termo de transporte difusivo das tensões de Reynolds (Hanjalic & Launder, 1972; Lumley, 1978; Dekeyser & Launder, 1983; Hanjalic, 1994; Daly & Harlow, 1970). O modelo proposto Lien & Leschziner (1994) descrito abaixo, é mais simples e estável e foi utilizado neste trabalho

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_{\kappa}} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_{\ell}} \right]$$
(3.53)

sendo que a viscosidade turbulenta v_t é dada pelo modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão por:

$$\upsilon_t = c_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.54}$$

onde as constantes empíricas são $c_{\mu}=0,09$ e $\sigma_{\kappa}=0,82$. A energia cinética turbulenta κ é determinada a partir das tensões normais, sendo igual a traço do tensor de Reynolds (Eq. 3.15).

O termo de produção das tensões de Reynolds P_{ij} pode ser determinado diretamente a partir das tensões de Reynolds

$$P_{ij} = \left[-\overline{u'_i u'_\ell} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_\ell} - \overline{u'_j u'_\ell} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\ell} \right]$$
(3.55)

O tratamento do termo de destruição, dissipativo, é semelhante ao empregado no modelo κ - ε padrão. Considera-se que o processo de dissipação viscosa ocorre de uma forma isotrópica nas escalas menores. Isso implica matematicamente que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon \,\delta_{ij} \tag{3.56}$$

A taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ε , continua sendo uma quantidade desconhecida, que precisa ser determinada a partir de sua própria equação de transporte (Hanjalic, 1994), a qual é similar a utilizada pelo modelo κ - ε padrão.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} P_{\kappa} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\kappa}$$
(3.57)

Os valores das constantes empíricas são: $\sigma_{\varepsilon} = 1,0$; $c_{1\varepsilon} = 1,44$; e $c_{2\varepsilon} = 1,9$.

O termo de pressão, Π_{ij} associa correlações entre as flutuações de pressão e velocidade $\Pi_{ij} = \overline{p'/\rho(\partial u'_i/\partial x_j + \partial u'_j/\partial x_i)}$. A modelagem deste termo tem sido objeto de diversos trabalhos, pois apresenta influência relevante no desenvolvimento desses modelos de fechamento de segunda ordem. Distintas abordagens foram propostas para modelar o termo Π_{ij} , entre os quais se encontram os modelos, *LRR* (Launder, Reece & Rodi, 1975), *SSG* (Speziale, Sarkar & Gatski, 1991) e BSL κ - ω (Menter, 2003).

Uma análise mais detalhada do termo de pressão mostra que o mesmo não deve contribuir para o nível global de energia turbulenta, devendo contribuir apenas como um agente de redistribuição da energia entre os componentes normais da tensão de Reynolds, uma vez que o termo se anula na diagonal principal, pois $\partial u'_i / \partial x_i = 0$, de acordo com a equação de conservação de massa.

O modelo *LRR* (Launder, Reece & Rodi, 1975) foi um dos primeiros modelos de fechamento de segunda ordem a ser formulado, sendo um dos mais utilizados. A equação da modelagem do termo de pressão ou redistribuição pode ser descomposta em dois termos distintos da correlação pressão-velocidade, $\Pi_{ij=}\Pi_{ij,1}+\Pi_{ij,2}$. O primeiro termo $\Pi_{ij,1}$ age no sentido de distribuir a energia turbulenta entre os diversos componentes do tensor de Reynolds. Quanto maior a anisotropia do escoamento, maior a importância de $\Pi_{ij,1}$; quanto mais isotrópica a turbulência, menor influencia da redistribuição.

Tal como nos demais modelos, a modelagem do termo de redistribuição Π_{ij} no modelo *LRR* adota como referência condições de escoamento turbulento livre. Logo, a partir da equação de Navier-Stokes, utilizando-se um processo de eliminação da flutuação de pressão, através da equação de Poisson, se mostra que a correlação de deformação-pressão é governada por um processo devido somente às iterações das flutuações da velocidade $\Pi_{ij,1}$, e outro devido às iterações de deformação média e as flutuações de velocidade $\Pi_{ij,2}$.

Uma vez que $\Pi_{ij,1}$ está relacionado essencialmente à turbulência, e $\Pi_{ij,2}$ ao gradiente da velocidade média, é possível escrever (Rotta, 1951; Naot et al., 1970; Launder et al., 1975).

$$\Pi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(\overline{u'_i \, u'_j} - \frac{2}{3} \kappa \, \delta_{ij} \right) \tag{3.58}$$

$$\Pi_{ij,2} = -C_2 \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \,\delta_{ij} \right) \tag{3.59}$$

onde $C_1 = 1,8 C_2 = 0,60$.

Observa-se que $\Pi_{ij,l}$ é um termo de fonte para a equação de $\overline{u_i'}^2$ quando $\overline{u_i'}^2 < (2/3)\kappa$ e um sorvedouro quando $\overline{u_i'}^2 > (2/3)\kappa$, de tal forma que este termo realmente age no sentido de redistribuir a energia entre seus componentes.

O termo $\Pi_{ij,2}$ é a contrapartida direta do termo $\Pi_{ij,1}$, porque assume que a parcela da deformação média do termo de esforço de pressão é proporcional à anisotropia da produção de $\overline{u'_i u'_j}$.

O modelo *LRR* foi posteriormente modificado (Gibson & Launder, 1978) a fim de serem incorporados os efeitos de parede, com a introdução de mais um termo para avaliar Π_{ij} . A forma do novo termo de redistribuição foi dada por Shir, 1973; Gibson & Launder, 1978, como.

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} + \Pi_{ij,W} \tag{3.60}$$

$$\Pi_{ij,w} = \Pi_{ij,w1} + \Pi_{ij,w2} \tag{3.61}$$

onde

$$\Pi_{ij,w1} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_k u'_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_j} n_k n_i - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_i} n_k n_j \right) f_w (3.62)$$

$$\Pi_{ij,w2} = C_{w2} \left(\Pi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Pi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Pi_{jk,2} n_k n_i \right) f_w (3.63)$$

sendo $C_{wI}=0,5$ e $C_{w2}=0,3$. A função de escala de comprimento f_w tem o objetivo de amortecer a contribuição do termo $\Pi_{ij,w}$ a medida que o escoamento se afasta da parede, sendo igual a:

$$f_w = \frac{\kappa^{3/2} / \varepsilon}{2.5 y_p n_p} \tag{3.64}$$

onde y_p representa a distância da parede e n_p o vetor unitário normal à parede. Os termos de parede falham em determinadas situações, e nesses casos correções devem ser impostas a $\Pi_{ij,wl}$ e $\Pi_{ij,w2}$ (Craft et. al, 1993; Schiestel and Elena, 1993; Hanjalic, 1994). O modelo RSM que deu melhores resultados foi o "*Linear Pressure Strain Model (LRR)*" com modificações para escoamentos em regiões perto das paredes (*EWT*), onde o termo de pressão necessita de uma modificação. A modificação do termo de pressão basicamente especifica os valores de C_1 , C_2 , $C_{wl} e C_{w2}$, como funções do número de Reynolds turbulento, de acordo a Launder & Shima (1989).

$$C_{1} = 1 + 2,58A\sqrt{A_{2}} \left\{ 1 - exp \left[-(0,0067 Re_{t})^{2} \right] \right\}$$
(3.65)

$$C_2 = 0.75\sqrt{A}$$
 (3.66)

$$C_{wl} = -\frac{2}{3}C_l + 1,67 \tag{3.67}$$

$$C_{w^{2}} = \max\left[\frac{\left(\frac{2}{3}C_{2} - \frac{1}{6}\right)}{C_{2}}, 0\right]$$
(3.68)

Onde:

$$A = \left[I - \frac{9}{8} (A_2 - A_3) \right] \tag{3.69}$$

$$A_2 \equiv a_{ik} a_{ki} \tag{3.70}$$

$$A_3 \equiv a_{ik} a_{kj} a_{ji} \tag{3.71}$$

onde a_{ij} é o tensor de Reynolds normalizado, definido como:

$$a_{ij} = \left(\frac{\rho \,\overline{\mathbf{u}_{i} \mathbf{u}_{j}} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}}{\rho k}\right) \tag{3.72}$$

Outra opção do modelo RSM utilizado neste trabalho é o "*Low-Re Stress-Omega Model*", este modelo é baseado na equação de transporte da dissipação viscosa (ω) e no modelo LRR. Este modelo é satisfatório no modelamento do escoamento sobre superfícies curvas e escoamentos com "*Swirl*". Este modelo não requer tratamento de parede. O modelo RSM "*Low-Re Stress-Omega Model*" se assemelha ao modelo *k-* ω devido à excelente predição para uma ampla gama de escoamentos turbulentos. Para este modelo pode-se escrever:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} \tag{3.73}$$

onde

$$\Pi_{ij} = -(C_{1}\rho\varepsilon + C_{1}^{*}P)b_{ij} + C_{2}\rho\varepsilon(b_{ik}b_{kj} - b_{mn}b_{mn}\delta_{ij}/3) + (C_{3} - C_{3}^{*}\sqrt{b_{ij}b_{ij}})\rho kS_{ij} + C_{4}\rho k(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - 2^{*}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}/3) + C_{5}\rho k(b_{ik}\Omega_{jk} + b_{jk}\Omega_{ik})$$

(3.74)

onde

$$b_{ij} = \left(\frac{\rho \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}}{2\rho k}\right)$$
(3.75)

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$
(3.76)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \iota_i}{\partial \iota_j} + \frac{\partial \iota_j}{\partial \iota_i} \right)$$
(3.77)

Sendo as constantes: $C_1 = 3,4$, $C_1^* = 1,8$, $C_2 = 4,2$, $C_3 = 0,8$, $C_3^* = 1,3$, $C_4 = 1,25$, $C_5 = 0,4$.

3.2.6 Modelos RANS nas regiões próximas às paredes

A modelagem em regiões próximas às paredes é de grande importância já que tem um impacto significativo na fidelidade das soluções numéricas, na medida em que as paredes são a principal fonte de vorticidade e de turbulência. É na região da parede que a solução das variáveis apresentam elevados gradientes, portanto uma representação exata do escoamento na região próxima à parede determina previsões bem sucedidas para os escoamentos turbulentos.

O modelo $\kappa-\omega$ SST é válido na região da parede, apresentando um bom desempenho na região da camada limite. Para a utilização deste modelo é necessário um maior refinamento da malha de forma a garantir $y^+ \le 1$ para o primeiro ponto nodal interno ao domínio, sendo y^+ a distância adimensional à parede definida como:

$$y^{+} = \frac{\rho \, u^{*} y}{\mu} \tag{3.78}$$

onde
$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$
; $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ (3.79)

onde u^* é a velocidade de atrito, τ_w é a tensão cisalhante na parede e y a distância à parede.

O modelo RSM utilizado (LRR) não é valido na região da parede e um tratamento especial precisa ser utilizado. Este modelo utiliza a opção "*Enhanced Wall Treatment*". Este modelo utiliza o modelamento de duas camadas (duas regiões) de Lei de parede, sendo o domínio dividido em duas regiões, a região próxima à parede afetada pela viscosidade turbulenta e a outra uma região externa totalmente turbulenta (afastada da parede). A fronteira entre estas duas regiões é definida em função do número de Reynolds turbulento **Re**_y, definido como

$$\mathbf{Re}_{y} = \frac{y\sqrt{\kappa}}{\upsilon} \tag{3.80}$$

onde y é a distância normal à parede e κ é a energia cinética turbulenta.

Na região totalmente turbulenta ($\mathbf{Re}_y > 200$) o escoamento é resolvido normalmente pelo modelo, descrito na seção anterior. Na região próxima à parede afetada pela viscosidade ($\mathbf{Re}_y < 200$), é utilizado o modelo de uma equação proposto por Wolfstein (1969). Neste modelo a equação do transporte de quantidade de movimento e a equação de κ , são as mesmas já apresentadas. No entanto a viscosidade turbulenta, v_t é avaliada por,

$$\upsilon_{t_{2camada}} = c_{\mu} \ell_{\mu} \sqrt{\kappa} \tag{3.81}$$

sendo que o comprimento de escala ℓ_{μ} dado por (Chen & Petel, 1988)

$$\ell_{\mu} = y c_{\ell} (1 - e^{-\mathbf{R}\mathbf{e}_{y}/A_{\mu}}) ; c_{\ell} = 0,41 c_{\mu}^{-3/4} ; A_{\mu} = 70$$
 (3.82)

Para que a transição da viscosidade turbulenta entre a região da parede e a região totalmente turbulenta não seja tão abrupta, foi formulada a seguinte definição (Jongen & Marx, 1997),

$$\upsilon_{t,trans} = \lambda_{\varepsilon} \upsilon_t + (1 - \lambda_{\varepsilon}) \upsilon_{t_{2,camada}}$$
(3.83)

onde v_t foi apresentada anteriormente para o modelo RSM. A função de mistura λ_{ε} é definida de forma a tomar o valor da unidade na região totalmente turbulenta e zero na região próxima à parede.

$$\lambda_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\mathbf{Re}_{y} - 200}{A}\right) \right] \quad ; \quad A = \frac{\left| \Delta \mathbf{Re}_{y} \right|}{\tanh(0,98)} \tag{3.84}$$

sendo *A* um parâmetro de controle da transição entre as duas regiões. O valor de *A*, varia entre 5% a 20% do valor do Reynolds de transição ($\text{Re}_{trans} = 200$).

A dissipação da energia cinética turbulenta ε é dada em função do comprimento de escala da dissipação da energia cinética turbulenta ℓ_{ε} (Chen & Patel, 1988) por

$$\varepsilon = \frac{\kappa^{3/2}}{\ell_{\varepsilon}} \quad ; \quad \ell_{\varepsilon} = y c_{\ell} \left(1 - e^{-\mathbf{R}\mathbf{e}_{y}/A_{\varepsilon}} \right) ; A_{\varepsilon} = 2 c_{\ell} \tag{3.85}$$

Um procedimento análogo à formulação de $v_{t,trans}$ é utilizado para determinar a transição do valor ε na região da parede ao núcleo turbulento.

Nos modelos com tratamento de parede "Enhanced Wall Treatment", para ter um método que possa ser aplicado em toda a região de parede (i.e. região de subcamada laminar, região intermediária e a região externa totalmente turbulenta) é necessário formular a lei de parede como uma lei única. Isto é conseguido utilizando a lei linear de parede (escoamento laminar) e a lei logarítmica de parede (escoamento turbulento), sugerida por Kader (1981).

$$u^{+} = e^{\Gamma} u^{+}_{lam} + e^{\frac{1}{\Gamma}} u^{+}_{turb}$$
(3.86)

onde a função de mistura é dada por:

$$\Gamma = -\frac{a(y^{+})^{4}}{1+by^{+}}$$
(3.87)

onde a = 0,01 e b = 5

Similarmente a equação para a derivada $\frac{du^+}{dy^+}$, é:

$$\frac{du^{+}}{dy^{+}} = e^{\Gamma} \frac{du^{+}_{lam}}{dy^{+}} + e^{\Gamma} \frac{u^{+}_{larb}}{dy^{+}}$$
(3.88)

Esta aproximação permite que a lei para escoamento totalmente turbulento seja facilmente modificada e ampliada para levar em conta outros efeitos, tais como gradientes de pressão. Esta fórmula também garante o correto comportamento assintótico para grandes e pequenos valores de y^+ , e uma representação razoável dos perfis de velocidade em casos onde y^+ cai dentro da região de parede ($3 < y^+ < 10$).

As funções com tratamento de parede foram desenvolvidas com a finalidade de misturar as leis de parede turbulenta e laminar. A função com tratamento de parede na presença de transferência de calor e gradientes de pressão foi originada pela combinação das aproximações de White and Cristoph (1971) e Huang et., al (1993).

$$\frac{du_{uub}^{+}}{dy^{+}} = \frac{1}{ky^{+}} \left[S^{*} \left(I - \beta u^{+} - \gamma \left(u^{+} \right)^{2} \right) \right]^{1/2}$$
(3.89)

onde,

$$S' = \begin{cases} I + \alpha y^+ & para \ y^+ < y_s^+ \\ I + \alpha y_s^+ & para \ y^+ \ge y_s^+ \end{cases}$$
(3.90)

e,

$$\alpha \equiv \frac{\upsilon_w}{\tau_w u^*} \frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\rho^2 (u^*)^3} \frac{dp}{dx}$$
(3.91)

$$\beta \equiv \frac{\sigma_{i} q_{w} u^{*}}{c_{p} \tau_{w} T_{w}} = \frac{\sigma_{i} q_{w}}{\rho c_{p} u^{*} T_{w}}$$
(3.92)

$$\gamma \equiv \frac{\sigma_r (u^*)^2}{2c_p T_w} \tag{3.93}$$

onde;

 $y_s^+ = 60$. O coeficiente α , na Eq. 3.89 representa a influência dos gradientes de pressão, e os coeficientes β e γ representam os efeitos térmicos.

A lei de parede laminar da parede é determinada pela seguinte expressão:

$$\frac{du_{lam}}{dy^+} = 1 + \alpha y^+ \tag{3.94}$$

Pode ser observado na Eq. 3.94 que apenas os efeitos dos gradientes de pressão são incluídos, já que os efeitos de térmicos devido à transferência de calor são considerados de menor importância quando ocorrem em regiões perto da parede. A integral da Eq. 3.94 resulta em:

$$u_{lam}^{+} = y^{+} \left(1 + \frac{\alpha}{2} y^{+} \right)$$
(3.95)

A função de tratamento térmico na parede segue a mesma aproximação desenvolvida para o perfil u^+ . A função térmica de parede unificada combina o perfil laminar e logarítmico de acordo ao método de Kader (1981).

$$T^{+} = \frac{(T_{w} - T_{p})\rho c_{p}u^{*}}{q} = e^{\Gamma}T^{+}_{lam} + e^{\frac{1}{\Gamma}}T^{+}_{turb}$$
(3.96)

onde T_p , é a temperatura na célula adjacente à parede, e q é o fluxo de calor na parede constante. O fator de mistura Γ , é definido como:

$$\Gamma = -\frac{a(\operatorname{Pr} y^{+})^{4}}{I + b \operatorname{Pr}^{3} y^{+}}$$
(3.97)

onde Pr é o numero de Prandtl molecular, e os coeficientes a e b foram definidos na Eq. 3.97.

A formulação T^+ , na Eq. 3.96 resulta na definição das funções de parede térmica laminar e turbulenta como:

$$T_{lam}^{+} = \Pr\left(u_{lam}^{+} + \frac{\rho u^{*}}{2q}u^{2}\right)$$
(3.98)

$$T_{turb}^{+} = \Pr_{t} \left\{ u_{turb}^{+} + P + \frac{\rho u^{*}}{2q} \left[u^{2} - \left(\frac{\Pr}{\Pr_{t}} - I \right) \left(u_{c}^{+} \right)^{2} \left(u^{*} \right)^{2} \right] \right\}$$
(3.99)

onde u_c^+ é o valor de u^+ na região intermedeia da região laminar e a turbulenta.

3.3 Simulação de Grandes Escalas - LES

A abordagem da simulação das grandes escalas (LES) iniciou-se com os trabalhos de Smagorinsky (1963). A motivação era simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos, na impossibilidade de simular todo o espectro de escalas. As primeiras aplicações em problemas de engenharia foram realizadas por Deardorff (1970).

A simulação das grandes escalas é uma alternativa com menor esforço computacional quando comparada com a simulação numérica direta. Nesta metodologia de simulação, a dinâmica das estruturas das grandes escalas é calculada, enquanto o efeito da turbulência das pequenas escalas é modelado, usando os chamados modelos sub-malha (*"Sub Grid Scale - SGS"*). Esta metodologia permite prever com precisão a maior parte do transporte de quantidade de movimento, energia e outros escalares, a ser realizado pelos grandes turbilhoes.

Pode-se, conseqüentemente, esperar que um esquema numérico de simulação de grandes escalas, onde os maiores turbilhoes resolvidos e os menores turbilhoes, de escala de sub-malha, são modelados, dê previsões semelhantes às obtidas por simulação direta. Contudo, rigorosamente falando, a simulação de grandes escalas é uma simplificação, pois o espectro de escalas é cortado arbitrariamente, mudando a resolução completa da modelagem.

Este procedimento seria como deixar parte de um turbilhão na região de sub-malha e parte no movimento resolvido. Outra dificuldade desta abordagem é que todos os turbilhões próximos à parede são pequenos e fortemente anisotrópicos. Assim, a malha deve ser refinada nesta zona e o modelo de sub-malha deve ser capaz de tratar bem esta região. Este fato aumenta muito o tempo computacional e a necessidade de memória, diminuindo-se a vantagem desta metodologia sobre a simulação numérica direta. Uma alternativa consiste em utilizar algum tipo de lei de parede para minimizar os requisitos de memória.

A alta precisão com menor solicitação de recursos computacionais que a simulação direta, levou a modelagem SGS a ser uma das mais promissoras metodologias para a solução de escoamentos turbulentos (Germano et al., 1991). Neste procedimento, o coeficiente do modelo passa a ser função da posição e do tempo, sendo obtido a partir do campo resolvido do escoamento. Nas seções seguintes serão apresentados os processos de filtragem e modelagem sub-malha.

A abordagem LES consiste na aplicação de um filtro tal qual descrito pela Eq. (3.2), nas equações de Navier-Stokes, Eqs. (3.3) a (3.5), onde se tem:

$$a(x,t) = \bar{a}(x,t) + a'(x,t)$$
(3.100)

sendo a(x,t) a função a ser filtrada, $\overline{a}(x,t)$ é a parte filtrada, contendo as grandes escalas, e a parte a'(x,t) é a parte associada aos termos sub-malha que devem ser modelados.

A função filtro é definida por diversas formas, entre as quais uma das mais utilizadas, é a função filtro por volume, dada pela equação

$$G = \begin{cases} 1/\Delta^{3}, & se |x - x'| \le \frac{\Delta}{2} \\ 0, & se |x - x'| > \frac{\Delta}{2}, \end{cases}$$
(3.101)

G é conhecido como filtro, e Δ vêm a ser o tamanho de largura de filtro, o qual caracteriza a freqüência de corte da filtragem.

Na metodologia LES, o filtro tem por função separar as "grandes" das "pequenas" escalas. Esta operação de filtragem procura basicamente diminuir a parte do espectro de energia cinética a ser resolvida numericamente (i.e. diminuindo o número de graus de liberdade), com a esperança que o movimento da pequena escala seja menos sensível às anisotropias impostas ao escoamento e, portanto, mais fácil de modelar, o qual seleciona apenas as grandes estruturas turbilhonares como aquelas a serem simuladas.

O Método dos Volumes Finitos, utilizado no presente trabalho, consiste em dividir o domínio computacional em N volumes de controle V_{ci} com a variação de i de 1 a N, e a posterior integração das equações de N-S, Eqs. (3.3) a (3.5). A filtragem das equações de conservação com a função filtro definida pela Eq. (3.102) se confunde com as equações resultantes do método de volumes finitos.

As equações de conservação para as variáveis filtradas devem ser obtidas aplicando-se a operação de filtragem definida pela Eq. (3.2) nas Eqs. (3.3) a (3.5). Para alcançar este objetivo é necessário em primeiro lugar comutar os operadores de filtragem e de derivadas. De um modo geral, considera-se que a operação de comutação não introduz erros. No caso do primeiro termo das Eqs. (3.4) e (3.5), esta aproximação é satisfatória, pois considera-se que o passo de tempo a ser utilizado é pequeno o suficiente para capturar a física das estruturas, dessa forma o filtro empregado independe de qualquer parâmetro temporal. Para malhas uniformes a operação de comutação entre a filtragem e as derivadas espaciais também pode ser realizada, As equações resultantes são

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad ; \quad \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p_r}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\upsilon \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$
(3.102)

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\upsilon}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right)$$
(3.103)

82

O sistema de equações acima modela o transporte das variáveis $\overline{u_i}$ e \overline{T} . Nota-se que os termos não lineares se apresentam na forma de dois produtos filtrados, o que torna impossível a solução deste sistema de equações. Desta forma, faz-se necessário reescrever o termo não linear ou de transporte convectivo destas equações, da seguinte forma:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u_i')(\overline{u_j} + u_j')} = \overline{\overline{u_i} \ \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u_j'} + \overline{u_i' u_j} + \overline{u_i' u_j'}$$
(3.104)

$$\overline{u_i T} = \overline{(\overline{u_i} + u_i')(\overline{T} + T')} = \overline{\overline{u_i} \overline{T}} + \overline{\overline{u_i} T'} + \overline{u_i' \overline{T}} + \overline{u_i' T'}$$
(3.105)

Introduzindo as seguintes definições: tensor cruzado C_{ij} e fluxo cruzado $C_{\theta i}$, do tensor e fluxo de Leonard L_{ij} e $L_{\theta i}$ (Leonard, 1979) e do tensor de Reynolds de sub-malha R_{ij} e fluxo turbulento de calor de sub-malha $q_{\theta i}$

$$C_{ij} = \overline{\overline{u_i} \ u'_j} + \overline{u'_i \ \overline{u_j}} \quad ; \quad C_{\theta i} = \overline{u'_i \ \overline{T}} + \overline{\overline{u_i} \ T'}$$
(3.106)

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \ \overline{u_j}} - \overline{u_i} \ \overline{u_j} \quad ; \quad L_{\theta i} = \overline{\overline{u_i} \ \overline{T}} - \overline{u_i} \ \overline{T}$$
(3.107)

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \qquad ; \qquad q_{\theta i} = \overline{u'_i T'} \qquad (3.108)$$

Pode-se reescrever os termos não lineares como

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} - (C_{ij} + L_{ij} + R_{ij}) ; \quad \overline{u_i T} = \overline{u_i} \overline{T} - (C_{\theta i} + L_{\theta i} + q_{\theta i})$$
(3.109)

Observa-se que o processo de decomposição não resolve o problema, pois apesar do aparecimento do produto de grandezas filtradas (o que pode ser tratado diretamente nas equações de conservação), simplesmente introduz novos termos que precisam ser modelados para que o sistema de equações e incógnitas seja equilibrado. Este é o clássico problema de fechamento da turbulência, um dos maiores desafios científicos da física moderna, o qual continua sendo um problema aberto, não contando ainda com uma teoria fechada.

Os tensores cruzado C_{ij} e de Leonard L_{ij} podem ser modelados seguindo a idéia de Clark et al. (1979), que sugerem expressar a soma destes tensores como uma expansão de Taylor do campo de velocidade filtrado, o que levou Findikakis

e Street, 1979 a demonstrar que:

$$L_{ij} + C_{ij} \cong \frac{\Delta_k}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}$$
(3.110)

Porém, Shaanan et al. (1975) estimaram que, quando um esquema de transporte convectivo de até segunda ordem é utilizado, os tensores de Leonard e cruzado podem ser desprezados. Por outro lado, quando se utiliza esquemas de ordens mais elevadas, estes tensores não podem ser mais desprezados.

No presente trabalho com a Simulação de Grandes Escalas são utilizadas discretizações de segunda ordem, dessa forma os efeitos dos tensores C_{ij} e L_{ij} puderam ser desprezados.

As Eqs. 3.102 e 3.103 descrevem o movimento das grandes estruturas turbilhonares. Nestas equações, os termos de sub-malha representam a interação entre os grandes e pequenos turbilhões. De um modo geral, energia cinética é transferida dos grandes turbilhões para os pequenos turbilhões. Há, porém, um fluxo de energia em ambas as direções, embora o fluxo líquido seja usualmente na direção das pequenas escalas. Na verdade, neste processo interativo, parte da energia transferida das pequenas escalas retorna aos grandes turbilhões. Sendo que em alguns casos, o fluxo líquido pode até ser na direção das grandes escalas (Lesieur and Metais, 1996). Conseqüentemente, os termos de escalas de submalha nas equações de governo devem representar este efeito de transferência de energia para as grandes escalas. A inversão no sentido natural do fluxo de energia ocorre nas regiões próximas das fronteiras sólidas, onde os pequenos turbilhões, produtores de turbulência não são resolvidos. Na situação mais comum, a transferência líquida de energia, para os pequenos turbilhões, funciona como uma dissipação para as grandes estruturas. A energia líquida consumida não retornará, e em conseqüência o modelo sub-malha deverá ser normalmente dissipativo.

Os modelos de sub-malha se dividem em quatro classes: modelo de viscosidade turbulenta, de similaridade, mistos (combinam modelos de viscosidade turbilhonar e similaridade) e dinâmicos. O modelo sub-malha mais tradicional é aquele baseado no conceito de viscosidade turbulenta (de acordo com a hipótese de Boussinesq). Aplicando esta hipótese para escoamentos incompressíveis, o tensor de Reynolds sub-malha R_{ij} , é expresso em função da

taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, tal como:

$$R_{ij} = -\frac{\upsilon_{i,sGS}}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \kappa \,\delta_{ij}$$
(3.111)

onde $v_{t,SGS}$ é a viscosidade turbulenta sub-malha, a qual será modelada. A energia cinética turbulenta de sub-malha pode ser incorporada à pressão reduzida de forma análoga ao que foi realizado com os modelos de média de Reynolds.

O modelo de sub-malha selecionado para ser utilizado neste trabalho foi o modelo Dinâmico de Smagorinsky, o qual foi desenvolvido a partir do Modelo de Smagorinsky de 1963, o primeiro modelo de sub-malha desenvolvido (Sagaut, 2002).

3.3.1 Modelo sub-malha de Smagorinsky

O modelo de viscosidade de sub-malha proposto por Smagorinsky em 1963 (Sagaut, 2002) é baseado na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas, ou seja, que a produção de tensões turbulentas sub-malha é igual à dissipação da energia cinética turbulenta sub-malha, conforme vastamente documentado na literatura (Piomelli, 1999). Assume-se ainda que a viscosidade turbulenta é proporcional à escala de comprimento sub-malha característica, Δ , e que a velocidade característica é proporcional à taxa de deformação do campo resolvido de velocidade $\overline{S_{ij}}$. Deste modo obtém-se o modelo algébrico para a viscosidade turbulenta da sub-malha como:

$$\upsilon_{LSGS} = \ell_S^2 \,\overline{S} = (C_S \Delta)^2 \,\overline{S} \tag{3.112}$$

onde $|\overline{S}| = \sqrt{S_{ij} \ \overline{S_{ij}}}$ é o módulo do tensor taxa de deformação do campo de velocidades resolvido. O comprimento de escala de Smagorinsky, ℓ_s é proporcional à largura de filtro Δ : $\ell_s = C_s \Delta$, onde C_s é o coeficiente de Smagorinsky. Com muita freqüência, em especial com os modelos numéricos de volume finitos, a escala de comprimento Δ associada ao filtro é considerada

como sendo o tamanho do espaçamento da malha (Piomelle, 1999), pode ser avaliado de acordo com

$$\Delta = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z)^{1/3} \tag{3.113}$$

O parâmetro C_s pode ser determinado a partir do decaimento da turbulência homogênea isentrópica, se o número de onda de corte, $k_c = \pi / \Delta$, estiver situado dentro do intervalo inercial da lei de Kolmogorov (Piomelle, 1999). O valor de C_s , neste caso, está entre 0,16 e 0,23 (Piomelle, 1999). Lilly (1967) estimou o valor de C_s como sendo igual a 0,18. Contudo, na prática, verificou-se que estes valores são excessivos (Silvestrini, 2000). O valor mais comumente utilizado nas simulações numéricas tem sido $C_s = 0,1$ (Lesieur & Metais, 1996).

O valor do parâmetro C_s , é questionado já que ele não é um valor constante, sendo adaptado segundo o tipo de código de cálculo utilizado. Visando superar a dificuldade de se ter um valor da constante para cada situação diferente, surgiram os modelos dinâmicos, onde o parâmetro C_s é determinado a partir do próprio escoamento.

A modelagem de fluxo de calor turbulento é análoga

$$q_{SGS} = \frac{\upsilon_{t,SGS}}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}$$
(3.114)

onde σ_t é o número de Prandtl turbulento.

3.3.2 Modelo de Smagorinsky Dinâmico

Germano et al. (1991) propuseram um método de cálculo dos parâmetros dos modelos baseados na solução do campo de velocidades, função da posição e do tempo. Esta proposta na verdade não é um modelo, mas um procedimento de avaliar os coeficientes de um modelo base, a partir das menores escalas do campo resolvido.

Neste modelo supõe-se que o comportamento das escalas resolvidas apresenta similaridade com o comportamento das escalas de sub-malha (Germano

et al., 1991). O conceito fundamental do procedimento dinâmico é o uso de dois filtros com dimensões características diferentes: o primeiro filtro – filtro de malha, o qual utiliza as dimensões da malha para calcular o comprimento característico, e é utilizado na simulação das grandes escalas; o segundo filtro – filtro de teste, tem uma largura maior que a largura do filtro original, a qual é um múltiplo das dimensões da malha utilizada para calcular o comprimento característico, tipicamente $\langle \Delta \rangle = 2\overline{\Delta}$.

O procedimento utiliza informações das escalas resolvidas não contidas no filtro de teste, para modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as escalas não resolvidas. Assumindo que as tensões sub-malha obtidas com o filtro original e com o filtro de teste são similares e podem ser modeladas, usando a mesma forma funcional, e supondo ainda que os parâmetros a determinar são aproximadamente independentes da largura do filtro, são obtidas expressões explicitas para os coeficientes (Germano et al., 1991; Hartel and Kleiser, 1998).

Os parâmetros, a serem determinados, são agora funções dependentes tanto do tempo como da posição espacial que se devem anular nas regiões de escoamento laminar e na proximidade às fronteiras sólidas, obtendo-se, conseqüentemente, um melhor comportamento assintótico.

Considere as equações filtradas de Navier Stokes e energia

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad ; \quad \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \ \overline{u_j}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p_r}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\upsilon \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} - \tau_{ij} \right) \qquad (3.115)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \overline{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\upsilon}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - q_{\theta i} \right)$$
(3.116)

onde $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ e $\overline{u_i T} = \overline{u_i} \overline{T} - q_{\theta i}$. Aplicando-se o filtro $\langle G \rangle$ de largura $\langle \Delta \rangle > \overline{\Delta}$ sobre as equações filtradas (3.130) e (3.143), obtém-se

$$\frac{\partial \left\langle \overline{u_j} \right\rangle}{\partial t} + \frac{\partial \left\langle \overline{u_i \, u_j} \right\rangle}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left\langle \overline{p_r} \right\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\upsilon \frac{\partial \left\langle \overline{u_j} \right\rangle}{\partial x_i} \right)$$
(3.117)

$$\frac{\partial \left\langle \overline{u_j} \right\rangle}{\partial t} + \frac{\partial \left\langle \overline{u_i} \ \overline{u_j} \right\rangle}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left\langle \overline{p_r} \right\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\upsilon \frac{\partial \left\langle \overline{u_j} \right\rangle}{\partial x_i} - \left\langle \tau_{ij} \right\rangle \right)$$
(3.118)

Introduzindo-se a definição de tensor das tensões relativas ao segundo filtro, também chamadas de sub-teste,

$$T_{ij} = \left\langle \overline{u_i u_j} \right\rangle - \left\langle \overline{u_i} \right\rangle \left\langle \overline{u_j} \right\rangle \tag{3.119}$$

Pode-se mostrar que subtraindo a Eq. (3.118) da (3.117) e utilizando a definição da Eq. (3.119) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(\left\langle \overline{u}_{i} \overline{u}_{j} \right\rangle - \left\langle \overline{u}_{i} \right\rangle \left\langle \overline{u}_{j} \right\rangle \right) = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(T_{ij} - \left\langle \tau_{ij} \right\rangle \right)$$
(3.120)

Pode-se agora, introduzir a definição do tensor de Leonard global como,

$$L_{ijG} = \left\langle \overline{u}_i \overline{u}_j \right\rangle - \left\langle \overline{u}_i \right\rangle \left\langle \overline{u}_j \right\rangle = T_{ij} - \left\langle \tau_{ij} \right\rangle$$
(3.121)

Esta igualdade é conhecida como identidade de Germano. Esta equação relaciona as tensões turbulentas resolvidas L_{ijG} , as tensões de escala sub-malha τ_{ij} , e as tensões do filtro teste T_{ij} . Ela pode ser utilizada na determinação do coeficiente dinâmico $c(\vec{x},t)$ que aparece nos modelos de fechamento da turbulência. A parte anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha pode ser modelada com a hipótese de Boussinesq:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{ij} = -2\upsilon_t \overline{S}_{ij} = -2c(\overline{x}, t)\overline{\Delta}^2 | \overline{S} | \overline{S}_{ij}$$
(3.122)

Modelando-se as tensões turbulentas sub-teste T_{ij} de forma análoga, tem-se:

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{ij} = -2c(\vec{x}, t) \langle \overline{\Delta} \rangle^2 \langle | \, \overline{S} \, | \rangle \langle \overline{S}_{ij} \rangle$$
(3.123)

Filtrando a Eq. (3.122) tem-se:

$$\left\langle \tau_{ij} \right\rangle - \frac{\delta_{ij}}{3} \left\langle \tau_{ij} \right\rangle = -2\upsilon_t \left\langle \overline{S}_{ij} \right\rangle = -2c(\vec{x}, t)\overline{\Delta}^2 \left\langle |\,\overline{S}\,|\,\overline{S}_{ij} \right\rangle \tag{3.124}$$

O tensor global de Leonard, Eq. (3.121) pode ser escrito como

$$L_{ijG} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{ijG} = -2 c(\vec{x}, t) M_{ij}$$
(3.125)

onde

$$M_{ij} = \left\langle \overline{\Delta} \right\rangle^2 \left\langle | \, \overline{S} \, | \right\rangle \left\langle \overline{S}_{ij} \right\rangle - \overline{\Delta}^2 \left\langle | \, \overline{S} \, | \, \overline{S}_{ij} \right\rangle \tag{3.126}$$

Finalmente, combinando as Eqs. 3.124 e 3.121 obtém-se a expressão para o coeficiente dinâmico:

$$c(\vec{x},t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ijG} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}$$
(3.127)

onde pode ser observado que o cálculo do coeficiente dinâmico só depende de grandezas resolvidas e de um duplo processo de filtragem.

O modelo dinâmico conduz a bons resultados para regimes de transição e completamente turbulentos desde que a malha seja suficientemente fina para caracterizar as menores escalas de energia junto às paredes. Assim a necessidade de funções de amortecimento ou outros tratamentos especiais próximo às paredes são evitados.