

2 Formulação do Problema

2.1 Revisão Teórica

Fluidos são definidos como substâncias que se deformam continuamente sob a ação de uma tensão de cisalhamento. Os fluidos podem ser classificados de modo geral, de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação (21).

- Fluidos newtonianos

São classificados como fluidos newtonianos aqueles para os quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação, ou seja, segue a lei da viscosidade de newton: $\tau_{yx} = \mu(du/dy)$, como pode-se observar na figura 2.1, onde “ u ” é a velocidade da placa superior e “ y ” é a separação das placas paralelas. A constante de proporcionalidade representada por μ é uma propriedade do fluido e é denominada viscosidade absoluta ou dinâmica. Alguns exemplos de fluidos newtonianos comumente encontrados são a água, o ar e a glicerina. A unidade de viscosidade no Sistema Internacional é $[\mu] = \frac{N.s}{m^2} = Pa.s$ e no Sistema Métrico absoluto é $[\mu] = \frac{g}{cm.s} = poise$.

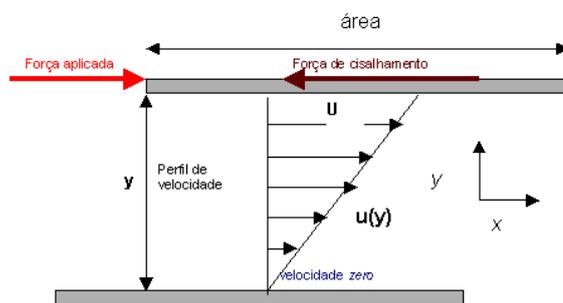


Figura 2.1: Movimento relativo de dois planos paralelos com velocidade constante U , separados por um filme de fluido viscoso com espessura y

Aparelhos utilizados para medir a viscosidade de fluidos newtonianos são chamados de viscosímetros. Em geral, o tempo t que um determinado volume de líquido demora para escoar através de um tubo capilar em um viscosímetro

Cannon-Fenske é medido. A viscosidade absoluta é então determinada através da equação $\mu = C * t * \rho$ onde C é a constante do viscosímetro e ρ a massa específica do fluido.

- Fluidos não newtonianos

Os fluidos não newtonianos são aqueles que não seguem a lei da viscosidade do Newton, isto é, fluidos para os quais a tensão não é diretamente proporcional à taxa de deformação.

Os fluidos não newtonianos podem-se classificar em dois sub grupos, os não newtonianos dependentes do tempo, e os independentes do tempo. Entre os independentes do tempo, encontra-se os pseudoplásticos, viscoplásticos e dilatantes como se pode observar na figura 2.2. Na figura 2.2a, encontra-se o comportamento da tensão de cisalhamento (τ_{yx}) em função da taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$), e na 2.2b pode-se observar a viscosidade (η) em função da taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$) para as diferentes classes de fluidos.

Os fluidos *pseudoplásticos ou shear thinning* são aqueles que tem uma diminuição da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento (8). As causas mais comuns desse comportamento em suspensões coloidais são o fracionamento de agregados de partículas e a orientação de partículas assimétricas provocadas pelo aumento da taxa de cisalhamento.

Os líquidos que apresentam uma tensão de cisalhamento mínima (τ_0) para iniciar o escoamento são denominados *viscoplásticos*. Para tensões de cisalhamento maiores que τ_0 , os fluidos viscoplásticos apresentam um comportamento semelhante aos fluidos pseudoplásticos, ou seja, apresentam uma diminuição da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento. Quando a tensão mínima de escoamento é muito pequena, torna-se difícil determinar se o sistema é plástico ou pseudoplástico.

Os líquidos *dilatantes ou também chamados shear thickening* são aqueles que apresentam um aumento da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento (8). Esses fluidos se comportam como um líquido (escoam) a baixas tensões de cisalhamento, mas podem se tornar tão rígidos (não escoam) quanto um sólido quando submetidos a tensões de cisalhamento elevadas.

A diminuição da viscosidade aparente com o tempo de cisalhamento a uma taxa de cisalhamento constante é um fenômeno chamado tixotropia que podem ter os fluidos não newtonianos. Como na pseudoplasticidade, a diminuição da viscosidade aparente com o tempo é também devida à quebra de uma estrutura organizada no fluido. Se deixarmos em repouso durante algum tempo um sistema tixotrópico, a viscosidade aparente aumentará devido à formação de uma estrutura mais organizada das partículas em suspensão que

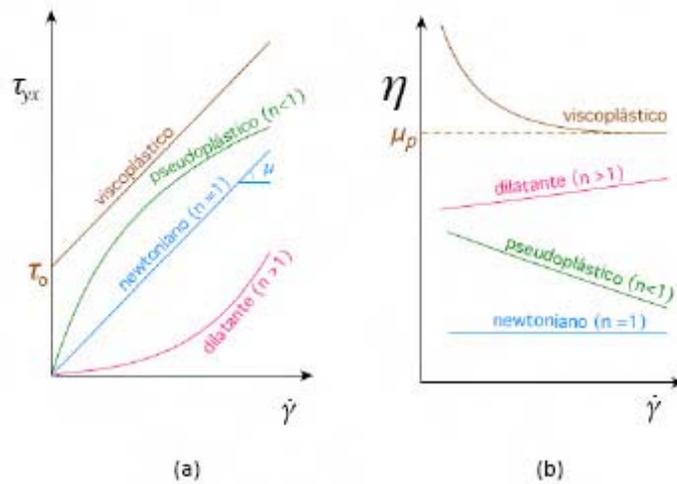


Figura 2.2: Reograma de Diferentes Fluidos

“imobiliza” o líquido entre as partículas. Se, a seguir, submetemos o sistema a cisalhamento, a uma velocidade de agitação constante, a viscosidade aparente decrescerá com o tempo até atingirmos o equilíbrio entre quebra e reconstrução da estrutura. A reopexia é o fenômeno do aumento da viscosidade aparente com o tempo de cisalhamento, à uma taxa de cisalhamento constante ou seja um comportamento oposto à tixotropia.

O ramo da mecânica dos fluidos que estuda o fluxo e deformação de materiais é a reologia (5). De igual forma, estuda as propriedades físicas que influenciam a forma e o fluxo do material, englobando variantes tais como a viscosidade, plasticidade e elasticidade entre outras.

Um instrumento capaz de medir a história de tensão e deformação de um material é o reômetro. Os reômetros são classificados de acordo com a cinemática do escoamento (cisalhamento ou extensão), a intensidade e o tipo de deformação (pequena, grande, regime permanente) e o tipo de escoamento (homogêneo ou não homogêneo).

Os reômetros são divididos em dois grupos:

- Reômetros rotacionais, quando o escoamento é causado pelo movimento de uma superfície.
- Reômetros com gradiente de pressão, quando o escoamento é causado por um gradiente de pressão.

Nos reômetros rotacionais podem ser utilizadas diferentes geometrias, tais como: placa-placa, cone-placa ou cilindros concêntricos (couette). A escolha da geometria depende do fluido, faixa de viscosidade e taxa de deformação.

- Deslizamento na parede do tubo (slip)

Um dos problemas mais relevantes no escoamento de fluidos não newtonianos é o deslizamento aparente. Esta condição diminui substancialmente a perda de carga no escoamento, o que poderia ocasionar medições erradas no reinício do escoamento. Os efeitos observados no escoamento dos fluidos estruturados como o Carbopol, é proveniente de um fenômeno conhecido como deslizamento aparente (4) (*wall depletion*) conforme pode ser observado na Fig.2.3.

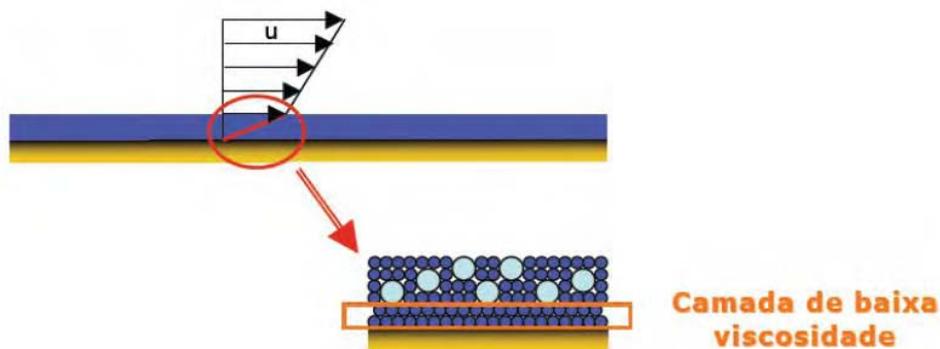


Figura 2.3: Deslizamento Aparente (*Wall Depletion*).

Esse fenômeno consiste no afastamento da fase dispersa do fluido em relação às superfícies sólidas, deixando uma fina camada de fluido da fase contínua de viscosidade mais baixa junto à parede. Isso ocorre devido às forças de configuração molecular, físico-químicas, eletrostáticas, viscoelásticas, gravitacionais, e hidrodinâmicas agindo na fase dispersa imediatamente adjacente às paredes sólidas, na presença ou ausência de escoamento.

A formação dessa camada de fluido de baixa viscosidade junto à parede facilita qualquer escoamento sobre ela devido ao efeito da lubrificação, ocasionando o deslizamento aparente observado.

Grandes partículas como fase dispersa, pequenas dimensões do escoamento, grande dependência da viscosidade com a concentração da fase dispersa, baixas taxas de cisalhamento são algumas condições nas que o deslizamento é favorecido (4).

Alternativas existentes na literatura para contornar o problema de deslizamento aparente são, entre outras, a realização de diversos ensaios variando as dimensões envolvidas no escoamento para obtenção dos resultados sem deslizamento por extrapolação matemática.

Outra é a modificação física da parede para evitar a formação de uma camada de fluido de baixa viscosidade junto à parede devido ao fenômeno do

deslizamento aparente. Este método consiste no aumento da rugosidade da parede interna do tubo o que foi testado neste trabalho (ver capítulo 3).

2.2

Formulação Matemática

O escoamento laminar completamente desenvolvido em um tubo foi estudado por primeira vez por G. Hagen em 1939 e por J.L. Poiseuille em 1940. Quando se fala de completamente desenvolvido, nos referimos que a região em estudo fica suficientemente longe da entrada fazendo que o fluxo seja axial, $v_z \neq 0$, enquanto que v_r e v_θ são nulas. Desprezando a gravidade e supondo simetria axial, ou seja, $\partial/\partial\theta = 0$. Assim, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas se reduz a:

$$\frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad v_z = v_z(r)$$

O fluxo ao longo do tubo não tem componente radial. A equação de movimento com r em coordenadas cilíndricas, torna-se da forma simplificada $\partial p/\partial r = 0$, o que indica que a pressão só depende de z , ou seja, $p=p(z)$. A equação da quantidade de movimento em z com coordenadas cilíndricas, se reduz a:

$$\rho v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{dp}{dz} + \mu \nabla^2 v_z = -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (2-1)$$

O termo de aceleração convectiva do primeiro membro se anula de acordo com a equação da continuidade. Portanto, a equação da quantidade de movimento pode-se escrever como segue:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} = cte < 0 \quad (2-2)$$

Esta equação é linear e pode se integrar duas vezes para obter:

$$v_z = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) = C_2$$

Onde C_1 e C_2 são constantes. As condições de contorno apropriadas são as de não deslizamento na parede e de velocidade finita na linha central:

$$\text{Não deslizamento em } r = R : v_z = 0 = \frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu} + C_1 \ln(R) = C_2$$

$$\text{Velocidade finita em } r = 0 : v_z = \textit{finita} = 0 + C_1 \ln(0) + C_2$$

Para evitar a singularidade logarítmica, a condição no centro precisa que $C_1 = 0$. Então, do não deslizamento obtém-se $C_2 = (-dp/dz)(R^2/4\mu)$. A conhecida solução para o fluxo de *Hagen-Poiseuille* completamente desenvolvido é:

$$v_z = \left(-\frac{dp}{dz}\right) \frac{1}{4\mu}(R^2 - r^2) \quad (2-3)$$

Uma vez conhecida a distribuição de velocidades pode-se obter a velocidade máxima, a velocidade média, a tensão na parede e a queda de pressão em volume:

$$Q = \int_A V = \int_0^R u 2\pi r dr = \int_0^R \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) (r^2 - R^2) 2\pi r dr$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \quad (2-4)$$

No escoamento completamente desenvolvido, o gradiente de pressão $\partial p/\partial z$ é constante. A vazão em volume como uma função da queda de pressão o $\partial p/\partial z = (p_2 - p_1)/L = -\Delta p/L$. Substituindo na equação anterior para a vazão em volume(21), obtém-se:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left[\frac{-\Delta p}{L}\right] = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L} = \frac{\pi \Delta p D^4}{128\mu L} \quad (2-5)$$

Estas equação são válidas somente para fluxo laminar, ou seja, sempre que o número de Reynolds de fluxo seja menor do que 2100(21). O balanço de forças no escoamento em um tubo apresenta a seguinte configuração (fig.2.4):

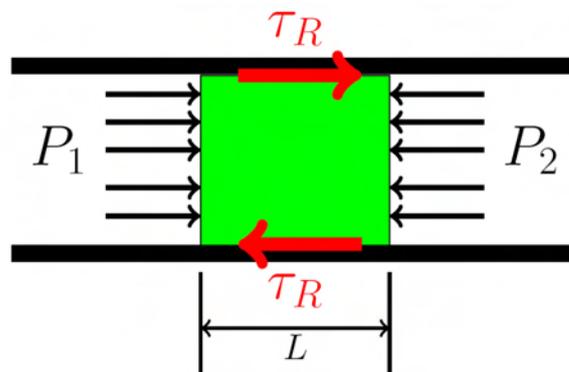


Figura 2.4: Balaço de forças

A tensão na parede τ_R obtém-se através da seguinte equação:

$$(P_1 - P_2) \frac{\pi D^2}{4} = \tau_R \pi D L$$

Simplificando:

$$\tau_R = \frac{\Delta P D}{L} \frac{D}{4} \quad (2-6)$$

2.2.1

Funções viscosidade

A seguir são apresentados alguns modelos matemáticos que apresentam diferentes tipos de comportamentos reológicos. Esses modelos são válidos para escoamentos simples e expressam a relação entre τ e $\dot{\gamma}$ (tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação).

- Modelo Power -Law

Conforme observado em quase todos os problemas industriais, a região linear descendente, ou região “Power-Law”, do gráfico de $\log \eta$ versus $\log \dot{\gamma}$ é a mais característica de aplicações industriais.

A linha reta inclinada pode ser descrita como uma expressão de Power-Law, ou Lei das potências, que mostra a relação entre a tensão de cisalhamento τ ou a viscosidade η versus a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$, representada pela equação:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (2-7)$$

Onde n é o índice de comportamento, ou a inclinação da reta do gráfico $\log \tau$ versus $\log \dot{\gamma}$ e K é o índice de consistência os quais são obtidos experimentalmente em reômetros. A viscosidade aparente para este modelo é dada pela equação:

$$\eta = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2-8)$$

A fim de determinar o comportamento viscoso dos fluidos onde este modelo é aplicado, os parâmetros K e n precisam ser conhecidos, pois se $n=1$,

o modelo se reduz a um fluido newtoniano, como $\mu = \eta$. Se $n < 1$, a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento, um comportamento chamado shear thinning como já foi mencionado, ou pseudoplasticidade. Em contrapartida, se $n > 1$, a viscosidade aumentará com a taxa de cisalhamento, sendo o fluido chamado de shear thickening, ou dilatante (8).

Definindo a tensão cisalhante (τ_R) na parede como $\tau_R = (\Delta P/L) * (R/2)$, obtemos a velocidade do fluxo (U) como sendo:

$$U = \left(\frac{\tau_R}{K}\right)^{1/n} * \frac{R}{1 + 1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1/n+1}\right] \quad (2-9)$$

A vazão volumétrica para um tubo circular é dada pela seguinte equação:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\frac{1}{n} + 3} \left[\frac{(P_0 - P_L)R}{2KL}\right]^{1/n} \quad (2-10)$$

Para fluidos *power law*, a taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$) é dada pela equação:

$$\dot{\gamma} = -\frac{du_Z}{dr} = \left(\frac{\Delta P}{2KL}\right)^{1/n} r^{1/n} = \left(\frac{\tau_R r}{K R}\right)^{1/n} \quad (2-11)$$

na parede é dado por:

$$\dot{\gamma}_R = \left(\frac{\tau_R}{K}\right)^{1/n} = \left(\frac{\Delta P * R}{2KL}\right)^{1/n} = \frac{Q}{\pi R^3} \frac{3n + 1}{n} = \frac{\bar{u}}{R} \frac{3n + 1}{n}$$

então

$$\dot{\gamma}_R = \frac{8\bar{u}}{D} \frac{3n + 1}{4n} \quad (2-12)$$

- Modelo Herschel-Bulkley

Este modelo combina as propriedades do fluido Power-Law e do plástico de Bingham, sendo um modelo bastante usado para materiais viscoplásticos. O simples cisalhamento é definido pela equação:

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \quad (2-13)$$

Onde n e K são os índices reológicos já mencionados, τ_0 é a tensão limite de escoamento e $\dot{\gamma}$ a taxa de cisalhamento. Para que a equação 2.5 seja válida os termos de inércia e as componentes radiais da velocidade são zero e o movimento acontece em condições de cisalhamento simples.

$$\eta = \begin{cases} \infty & \tau \leq \tau_0 \\ \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (2-14)$$

Conforme a expressão acima, sua origem está no fluido power-Law de $\tau_0 = 0$, sendo que se $n = 1$ é o material de Bingham e se $n = 1$ e $\tau_0 = 0$ o fluido é newtoniano.

A equação 2.5 pode-se escrever também:

$$\tau = \tau_0 + K \left(\frac{du}{dr} \right)^n \quad (2-15)$$

Portanto, a $\eta = r/r_w$, sendo r_w o raio do tubo. A taxa de cisalhamento é então:

$$-\frac{du}{d\eta} = r_w \left(\frac{\tau - \tau_0}{K} \right)^{1/m} \quad (2-16)$$

Na equação 2-16, $1/n = m$. Considerou-se que a velocidade axial até a parede é zero, já que os efeitos de parede diminuem na medida do aumento da capilaridade do tubo, este efeito faz insignificante a influência deste termo na integração; a segunda condição de contorno é descrita com a eq.2.5 $\partial u / \partial r = 0$ até o contorno do núcleo, central que na fig.2.5 é chamado r_p , onde a velocidade é constante. Isto não concorda com as características reológicas, mas pelos altos valores da viscosidade com baixas taxas de cisalhamento o erro não é significativo (22).

Integrando a eq.2.5 com as considerações anteriores obtém-se a expressão para a distribuição da velocidade axial na seção transversal do fluxo:

$$U(\eta) = r_w \left(\frac{\tau_w}{K} \right) * \frac{(1-a)^{m+1}}{m+1} * \left[1 - \left(\frac{\eta-a}{1-a} \right)^{m+1} \right] \quad (2-17)$$

onde $a = \tau_0/\tau_w$ é o raio do núcleo central, representado na fig.2.5 como r_p . Até $\tau_0 \geq 0$ no centro do fluxo onde acontece o movimento do plug com velocidade constante:

$$U_p = r_w \left(\frac{\tau_w}{K} \right)^m * \frac{(1-a)^{m+1}}{m+1} = U_{max} \quad (2-18)$$

então a velocidade média é :

$$U_0 = \omega U_{max} \quad (2-19)$$

onde,

$$\omega = a^2 + 2a(1-a) \frac{m+1}{m+2} + (1-a)^2 \frac{m+1}{m+3}$$

Finalmente a expressão para vazão volumétrica (22):

$$Q = \frac{\pi(r_w)^{m+3}}{2} \left(\frac{\Delta P}{\Delta L} \right)^m * \frac{(1-a)^{m+1} \omega}{(m+1)K^m} \quad (2-20)$$

Froishteter (22) também determinou a taxa de cisalhamento sendo:

$$\dot{\gamma} = \frac{2U_0}{d} \frac{m+1}{w(1-a)} \quad (2-21)$$

Kelessidis (23) determinou outra expressão para a vazão de fluxo deste modelo:

$$Q = \frac{\pi n}{K^{1/n}} \frac{(\Delta R/2 - \tau_y)^{1/n+1}}{(\Delta/2)^3} \times \left[\frac{(\Delta R/2 - \tau_y)^2}{1+3n} + \frac{2\tau_y(\Delta R/2 - \tau_y)}{1+2n} + \frac{\tau_y^2}{1+n} \right] \quad (2-22)$$

Onde $\Delta = 2\tau_y/r_p$ sendo r_p é o raio do núcleo de fluxo como se pode observar na Fig (2.5).

- Modelo SMD

Nos últimos anos foi proposta uma nova configuração para modelar a viscosidade de fluidos tixotrópicos baseada no fato de que para $\tau < \tau_0$ a viscosidade do fluido não é infinita, mas apenas um valor muito elevado e aproximadamente constante. O modelo Souza Mendes (18) é uma versão modificada da apresentada por Souza Mendez and Dutra (16). A viscosidade neste modelo define-se como:

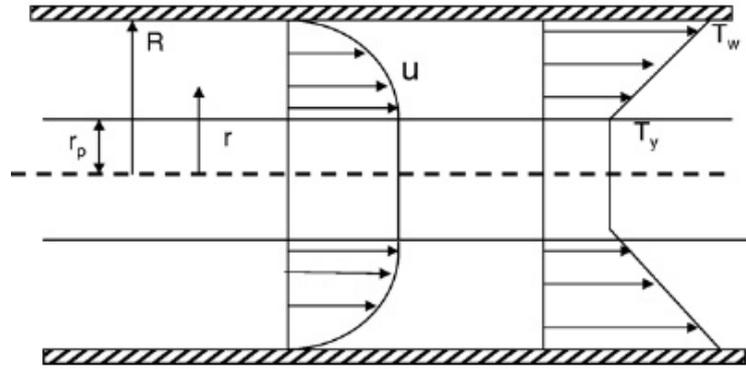


Figura 2.5: Geometria e parâmetro do fluxo laminar em tubos.

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right] \times \left[\frac{\tau_0 - \tau_{od}}{\dot{\gamma}} e^{-\dot{\gamma}/\gamma} + \frac{\tau_{od}}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right] + \eta_\infty \quad (2-23)$$

onde η_0 é a viscosidade a altas taxas de cisalhamento, τ_0 a tensão limite de escoamento, τ_{od} a tensão dinâmica de escoamento, $\dot{\gamma}_{od}$ é a taxa de cisalhamento na transição desde o τ_0 até τ_{od} , K o índice de consistência, n o índice de comportamento ou índice *power law* e η_∞ a viscosidade a baixas taxas de cisalhamento. A figura 2.6 a seguir mostra os parâmetros da equação anterior.

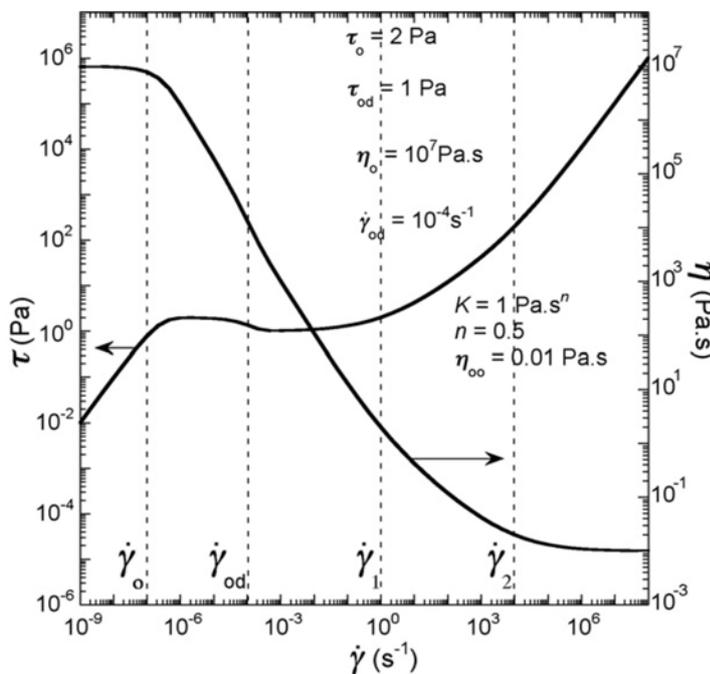


Figura 2.6: Funções da taxa de cisalhamento e viscosidade em equilíbrio (18)

Como pode ser observado na figura 2.6 existem três taxas de cisalhamento de transição nessa função viscosidade, a saber:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad (2-24)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_{od}}{K} \right)^{1/n} \quad (2-25)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \left(\frac{\eta_\infty}{K} \right)^{1/(1/n)} \quad (2-26)$$

O η_0 corresponde ao estado de equilíbrio da viscosidade, descrita pelo fluido Newtoniano e observada na fig.2.6 na faixa de taxa de cisalhamento $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$. Para tanto, o $\dot{\gamma}_0$ é na media a máxima taxa de cisalhamento na qual o material permanece inalterado. Na seguinte transição, o $\dot{\gamma}_1$, determina o começo da região *power law*. Finalmente a maior taxa de cisalhamento de transição, $\dot{\gamma}_2$, é o ponto onde o fluido começa seu comportamento Newtoniano, na região de elevadas taxas de cisalhamento (ver fig.2.6) onde a estrutura do material é completamente destruída.

No caso de fluidos viscoplásticos, na eq. 2-23, o $\tau_0 = \tau_{od}$ é o $\dot{\gamma}_{od} = 0$, então a equação se reduz:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right] \left[\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right] + \eta_\infty \quad (2-27)$$

Onde a tensão de cisalhamento é:

$$\tau = \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right] \times [\tau_0 + K \dot{\gamma}^n] + \eta_\infty \dot{\gamma} \quad (2-28)$$

2.3

Análise Adimensional

A análise adimensional é uma importante ferramenta que facilita a comparação do processo no laboratório e em campo. Os parâmetros adimensionais obtidos são usados na correlação dos dados, isto é, o escoamento no problema real e no modelo do laboratório são relacionados por leis de escala conhecidas. Para uma dada geometria e condições iniciais, o maior benefício de analisar um problema de mecânica dos fluidos na forma adimensional é a redução do número de parâmetros governantes.

2.3.1

Fluidos newtonianos

No caso de um escoamento envolvendo fluidos newtonianos, os parâmetros adimensionais que governam o problema são:

$$\text{A razão de aspecto} = \frac{L}{D} \quad (2-29)$$

Sendo a L o comprimento do tubo e D seu diâmetro.

$$\text{O número de Reynolds} = Re = \frac{\rho \bar{u}L}{\mu} \quad (2-30)$$

$$\text{O número de Froude} = Fr = \frac{\bar{u}}{(g * L)^{1/2}} \quad (2-31)$$

Onde g é a aceleração da gravidade, \bar{u} a velocidade média.

$$\text{O número de Capilaridade} = Ca = \frac{\mu \bar{u}}{\sigma} \quad (2-32)$$

onde o σ é a tensão superficial do fluido, e μ a viscosidade.

2.3.2

Fluidos não newtonianos

Souza Mendes (16) sugeriu uma nova proposta para a adimensionalização de problemas envolvendo fluidos não newtonianos na qual a velocidade característica é relacionada com dados reológicos. O primeiro passo para este procedimento é escolher uma taxa de deformação característica a partir dos dados reológicos que corresponda à faixa observada no escoamento. Para escoamentos classificados como de cisalhamentos, como no caso estudado, a viscosidade do fluido dependente da taxa de cisalhamento. Uma escolha apropriada para a taxa de deformação característica seria uma das taxas de cisalhamento de transição que aparecem na função viscosidade, ou seja, $\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1$, ou $\dot{\gamma}_2$ definidas na figura 2.6 e nas equações 2-24,2-25,2-26. Uma vez escolhida a taxa de deformação característica, $\dot{\gamma}_c$, a velocidade característica é definida como:

$$u_c = L\dot{\gamma}_c \quad (2-33)$$

onde L é o comprimento característico do escoamento. Outros parâmetros característicos são obtidos a partir dos que já foram determinados. A viscosidade característica é obtida ao avaliarmos a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ na taxa de deformação característica, ou seja:

$$\eta_c \equiv \eta(\dot{\gamma}_c) \quad (2-34)$$

A tensão característica é obtida ao multiplicar a viscosidade característica pela taxa de deformação característica, isto é $\tau_c = \eta_c \dot{\gamma}$ e o tempo característico para escoamentos em regime permanente é dado por $t_c = \frac{1}{\dot{\gamma}_c}$. Para líquidos viscoplásticos, uma boa escolha para $\dot{\gamma}_c$ é $\dot{\gamma}_1$, onde $\dot{\gamma}_1$ está definido na equação 2-25 e representado na figura 2.6.

A taxa de cisalhamento adimensionalizada se obtém com:

$$\dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (2-35)$$

a tensão adimensional para fluidos viscoplásticos:

$$\tau^* = \frac{\tau_R}{\tau_0} \quad (2-36)$$

Finalmente a velocidade adimensional para fluidos viscoplásticos.

$$u^* = \frac{\bar{U}}{R \cdot \dot{\gamma}_1} \quad (2-37)$$