3 Geometria Transversa das Folheações

3.1 G-Estruturas transversas

Ao longo de toda esta seção M denotará uma variedade suave munida de uma folheação $\mathscr{F}$ de classe C^r $(r \geq 2)$ de codimensão q como também Q denotará o fibrado transverso de $\mathscr{F}$, $Q = TM/T\mathscr{F}$. Um *referencial transverso* no ponto $x \in M$ é uma base $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$ do espaço transverso Q_x. Recorde que existe um único isomorfismo linear que leva a base canônica de $\mathbb{R}^q$ sobre a base $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$. Assim, podemos identificar um referencial transverso e com um isomorfismo linear $e : \mathbb{R}^q \to Q_x$. Escrevemos $F(Q)$ para designar o conjunto de todos os referenciais transversos de $(M, \mathscr{F})$, e $\pi : F(Q) \to M$ para a projeção que associa um referencial transverso no ponto x a x. Podemos munir o conjunto $F(Q)$ com uma estrutura diferenciável de modo que $F(Q)$ é um fibrado principal com base M, grupo estrutural $GL(q, \mathbb{R})$ e projeção $\pi : F(Q) \to M$ (ver p. 44 de [27]). Tal fibrado principal é chamado de *fibrado dos referenciais transversos* de $(M, \mathscr{F})$.

Suponhamos que $\mathscr{F}$ é dada pelo N^q-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta \in A}$. Recorde que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M e $f_\alpha : U_\alpha \to N^q$ é uma submersão constante ao longo das componentes conexas da intersecção de U_α com as folhas de $\mathscr{F}$. Temos que a aplicação

$$f_{\alpha *} : Q|_{U_\alpha} \to T(N^q)$$

é um isomorfismo de fibrados. Além disso, dados uma folha L de $\mathscr{F}$ e um caminho $s : [0,1] \to L$ sobre L, existe uma translação paralela natural de $v \in Q_{s(0)}$ ao longo L. De fato, considere uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = 1$ do intervalo $[0,1]$ e um subconjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}\}$ de A tal que $s|_{[t_i, t_{i+1}]}$ está contido em uma componente conexa de $U_{a_i} \cap L$. Agora, para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ definimos $v(t) \in Q_{s(t)}$ como sendo o único vetor tal que

$$f_{\alpha_i *}(v(t)) = f_{\alpha_i *}(v(t_i)).$$

Ou seja, o campo $v(\cdot)$ assim obtido é o transporte paralelo de v ao longo do caminho s. Daí, o vetor $v(1)$ depende apenas do vetor v e da classe de homotopia do caminho s em L. Logo, a aplicação $\tau : Q_{s(0)} \to Q_{s(1)}$ que leva v em $v(b)$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Tal isomorfismo é chamado de *paralelismo natural ao longo das folhas* de $\mathscr{F}$. Por conseguinte, τ pode ser visto como um referencial $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$ de $F(Q)$.

Definição 3.1.1 (Conlon, [9]) Seja G um subgrupo de Lie de $GL(q, \mathbb{R})$. Dizemos que $P \subset F(Q)$ é uma *G-estrutura transversa* sobre $(M, \mathscr{F})$ quando P é uma redução a um G-subfibrado principal de $F(Q)$ tal que o paralelismo natural ao longo das folhas de $\mathscr{F}$ leva elementos de P em elementos de P.

Quando G é o subgrupo trivial $\{1\}$, dizemos que a folheação $(M, \mathscr{F})$ é *paralelizável*. Neste caso, existem campos vetoriais globais $X^1, X^2, \ldots, X^q$ sobre M tal que $\{X^1_x, X^2_x, \ldots, X^q_x\}$ gera o espaço Q_x para todo $x \in M$ e cada X^i é *foliate*, isto é, $[Y, X^i]$ é tangente à $\mathscr{F}$ qualquer que seja Y tangente à $\mathscr{F}$, para $i = 1, 2, \ldots, q$. As folhas de uma folheação paralelizável $(M, \mathscr{F})$ não possuem holonomia e se M é compacta, todas as folhas de $\mathscr{F}$ são difeomorfas (veja p. 89–90 de [26]).

3.2
Folheações riemannianas

As folheações riemannianas foram introduzidas por Reinhart [31] e na ocasião foram chamadas de folheações com métrica *"bundle-like"*. Intuitivamente uma folheação riemanniana de uma variedade M é uma folheação cujas folhas são localmente equidistantes para alguma métrica riemanniana de M.

Definição 3.2.1 Uma folheação $\mathscr{F}$ de classe C^r $(r \geq 2)$ de uma variedade M dada pelo N^q-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta\in A}$ é dita *riemanniana* se existe uma métrica riemanniana sobre N^q para a qual as aplicações de transição $g_{\alpha\beta}$ são isometrias para todo $\alpha, \beta \in A$.

Nesta seção $\mathscr{F}$ denota uma folheação riemanniana de codimensão q e classe C^r, $r \geq 2$, de uma variedade M. Então $\mathscr{F}$ é dada por um N^q-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta\in A}$ como na Definição 3.2.1. A variedade N possui uma estrutura riemanniana dada por uma métrica riemanniana $<,>$. Dado $x \in U_\alpha$, considere a forma bilinear simétrica $(g_\alpha)_x : T_xU_\alpha \times T_xU_\alpha \to \mathbb{R}^+$ dada pelo pull-back de $<,>$ via a submersão $f_\alpha : U_\alpha \to N$. Como cada aplicação de transição é uma isometria segue que g_α e g_β coincidem sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, concordando a família $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de formas bilineares, obtemos uma $C^0(M)$-forma bilinear simétrica

$$g_T : \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M) \to C^0(M).$$

Observe que para cada $x \in M$, o núcleo $\ker(g_T)_x = \{u \in T_xM; \quad (g_T)_x(u,v) = 0,\ \forall v \in T_xM\}$ é o espaço tangente a folha passando por x. A forma bilinear g_T como construída acima é chamada de *métrica transversa* de $(M, \mathscr{F})$. A métrica transversa g_T de $(M,\mathscr{F})$ não é uma métrica riemanniana de M, já que $(g_T)_x(v,v) = 0$ para todos $x \in M$ e $v \in T_x\mathscr{F}$. Porém podemos "completar" g_T de modo que tenhamos uma métrica riemanniana de M tal que as folhas de $\mathscr{F}$ sejam localmente equidistantes para esta métrica. De fato, considere uma métrica riemanniana qualquer g' de M. Seja Q o complemento ortogonal de $T\mathscr{F}$ em TM para a métrica g'. Dado um vetor $v \in T_xM$ podemos decompor v de maneira única como $v_1 + v_2$, onde v_1 e v_2 pertencem a $T_x\mathscr{F}$ e Q_x, respectivamente. Então

$$g_x(u,v) = g'_x(u_1,v_1) + (g_T)_x(u,v), \quad \text{para todo } x \in M,\ u,v \in T_xM$$

define uma métrica riemanniana de M. Além disso, esta métrica g satisfaz a seguinte propriedade: para toda vizinhança coordenada U_α de $(M,\mathscr{F})$ e para todos campos vetoriais $Y, Z \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ que são foliate e perpendiculares as folhas, a função $g(X,Z) : U_\alpha \to \mathbb{R}^+$ é constante nas placas de U_α. Uma métrica riemanniana de M satisfazendo esta propriedade é chamada de *métrica bundle-like* de $(M,\mathscr{F})$.

As aplicações de holonomia da folheação $(M,\mathscr{F})$ são composições dos difeomorfismos $g_{\alpha\beta}$ entre seções transversais de $\mathscr{F}$. As seções transversais de $\mathscr{F}$ herdam uma estrutura riemanniana para a qual as aplicações de holonomia de $\mathscr{F}$ são isometrias (ver Lema 1 de [31]). E este é o fato crucial, que nos permitirá definir uma projeção de uma folha L' próxima a uma folha dada L, de modo que L' seja um recobrimento de L.

Para o que segue suponhamos que M é compacta e seja L uma folha de $\mathscr{F}$. Sendo (M,g) uma variedade riemanniana, podemos falar na aplicação exponencial de M. E pelo fato de M ser compacta existe $\delta > 0$, chamado de *raio de injetividade*, tal que a exponencial

$$\exp_x : B_\delta(0) \subset T_xM \to M$$

é um mergulho de uma bola aberta de T_xM com centro na origem e raio δ em M que leva a origem em x, para todo $x \in M$. Dado e fixado $x_0 \in L$, consideremos Q_{x_0} como sendo o complemento ortogonal de $T_{x_0}L$ em $T_{x_0}M$. A bola $B_\delta(0)$ intercepta o espaço Q_{x_0} em um disco cuja imagem pela exponencial em x_0 é um disco $D \subset M$ transversal à $\mathscr{F}$ com centro no ponto x_0. Como as aplicações de holonomia de L em x_0 são isometrias, segue que os elementos de $h(L, x_0)$ estão bem definidos em D.

Numa versão anterior desta Tese nós queríamos usar o Teorema de Estabilidade de Reinhart [31]. Este Teorema afirma que toda folha L de uma folheação riemanniana de uma variedade compacta L tem uma vizinhança saturada para a qual as folhas nesta vizinhança são recobrimentos de L. Nos parece que o Teorema de Reinhart é verdadeiro para folhas próprias. No entanto, o Teorema de Reinhart aparece em [31] sem a hipótese de L ser própria. Observamos que a demonstração dada por Reinhart utiliza um argumento falso. Para construir o recobrimento ele define uma aplicação local que "muda pontos". Podemos ver que tal argumento não vale por meio do seguinte exemplo.

Seja Σ_2 a superfície fechada orientável de gênero 2 (o bitoro) com ponto base p e seja a e b os geradores do grupo livre $\pi_1(\Sigma_2, p)$. Definimos uma representação sobrejetiva $\Phi : \pi_1(\Sigma_2, p) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ por isometrias da esfera $\mathbb{S}^2$ de modo que $\Phi(a)$ e $\Phi(b)$ sejam rotações irracionais em torno de dois pontos $x, y \in \mathbb{S}^2$ tais que $x \neq \pm y$. Assim, a ação

$$\begin{aligned} \zeta : \pi_1(\Sigma_2, p) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) &\to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \\ (\alpha, (u, v)) &\mapsto (\alpha(u), \Phi(\alpha)(v)). \end{aligned}$$

tem todas as órbitas densas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Logo, a suspensão da representação Φ é uma folheação riemanniana $\mathscr{F}$ do produto $\Sigma_2 \times \mathbb{S}^2$ transversa ao fator $\mathbb{S}^2$ com todas folhas densas. Considerando a projeção $P : \Sigma_2 \times \mathbb{S}^2 \to \Sigma_2$ no primeiro fator, temos um fibrado folheado. Assim cada elemento $\alpha \in \pi_1(\Sigma_2, p)$ tem como holonomia uma isometria de $\mathbb{S}^2$.

Agora, vejamos que nenhuma folha L de $\mathscr{F}$ possui uma δ-vizinhança tubular V cujas folhas contidas em V são recobrimentos de L.

Sejam dados $\delta > 0$ e uma folha L_z de $\mathscr{F}$ passando por um ponto $z = (p, q) \in \Sigma_2 \times \mathbb{S}^2$. Mostraremos que existe uma folha $L_{(p,x')}$ na vizinhança V de raio δ de L_z tal que não existe uma aplicação de recobrimento $f : L_{(p,x')} \to L_z$ que movimenta pontos na direção transversa menos que a distância δ.

Como todas as folhas de $\mathscr{F}$ são densas podemos tomar (p, x') nesta vizinhança V tal que $L_{(p,x')} = L_{(p,x)}$. Assim existe $\alpha \in \pi_1(\Sigma_2, p)$ cuja holonomia

h_α satisfaz $h_\alpha(p, x') = (p, x)$. Seja $q' \in \mathbb{S}^2$ tal que $h_\alpha(p, q') = (p, q)$.

Suponha que exista uma aplicação de recobrimento $f : L_{(p,x')} \to L_{(p,q')}$ que movimente pontos na direção transversa a $\mathscr{F}$ por uma distância menor que δ. Existe um laço $\gamma \in \pi_1(\Sigma_2, p)$ cuja holonomia leva (p, q) a $(p, \Phi(a)(q)) \neq (p, q)$, mas fixa (p, x). Conjugando γ por α obtemos um laço $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ cuja holonomia fixa (p, x') mas leva (p, q') a um ponto $(p, q'') \neq (p, q')$. Então se a aplicação de recobrimento f satisfaz $f(p, x') = (p, q')$, por continuação ao longo de $\alpha^{-1}\gamma\alpha$, f também terá que satisfazer $f(p, x') = (p, q'') \neq (p, q')$, uma contradição.

Como observado por J. S. Pasternack em [28], podemos entender as folheações riemannianas através da sua estrutura transversa. Seja $O(q)$ o grupo ortogonal e codim $\mathscr{F} = q$. Então $\mathscr{F}$ é uma folheação riemanniana se e somente se $\mathscr{F}$ possui uma $O(q)$-estrutura transversa.

3.3 Folheações homotéticas

A classe das folheações homotéticas contém a classe das folheações riemannianas.

Definição 3.3.1 Suponha que $\mathscr{F}$ é uma folheação C^r $(r \geq 2)$ de M dada por um N^q-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta \in A}$. Dizemos que $\mathscr{F}$ é uma *folheação homotética* se existe uma métrica sobre N^q tal que as aplicações de transição são homotetias.

Recorde que em §3.2 a partir da estrutura riemanniana de N^q, nós obtemos uma estrutura riemanniana para M. De maneira semelhante, podemos fazer aqui a construção de uma métrica g sobre M tal que as aplicações de holonomia da folheação homotética $(M, \mathscr{F})$ sejam homotetias com respeito a restrição da métrica g às seções transversais à $\mathscr{F}$.

Lema 3.3.2 *Sejam L é uma folha de uma folheação homotética $(M, \mathscr{F})$, com M compacta e $\pi_1(L, x_0)$ gerado por elementos de torção. Então existe uma vizinhança saturada V contendo L tal que a restrição da folheação $\mathscr{F}$ a V é riemanniana.*

Prova. Como $\pi_1(L, x_0)$ é gerado por elementos de torção segue que $h(L, x_0)$ também é gerado por elementos de torção. Seja $f : S \to S$ um representante de um gerador de $h(L, x_0)$ e seja $k \in \mathbb{N}$ a ordem do germe de f. Como f é uma aplicação homotética, existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $g_x(df_x u, df_x v) = \lambda \cdot g_x(u, v)$ para todo $x \in S$ e $u, v \in T_xS$. Assim,

$$g_x(u,v) = g_x((df_x)^k u, (df_x)^k v) = \lambda^k \cdot g_x(u,v),$$

para todo $x \in S$ e $u, v \in T_xS$. Portanto, $\lambda = 1$. Pelo visto na seção 3.2 podemos assumir que as aplicações de holonomia de $\mathscr{F}$ estão bem definidas em S. Por conseguinte, a folheação $\mathscr{F}$ restrita ao saturado de S é uma folheação riemanniana. ■

3.4 Folheações homogêneas

Sejam G um grupo de Lie e K um subgrupo fechado de G. Uma folheação C^r, $r \geq 2$, $\mathscr{F}$ de codimensão q de uma variedade M dada pelo N^q-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta\in A}$ é dita ser *G/K-folheação homogênea* quando N^q é um espaço homogêneo G/K e cada aplicação $g_{\alpha\beta}$ é uma translação de G/K por multiplicação à esquerda por um elemento de G. Estas folheações foram bem estudadas por R. Blumenthal [2].

Sempre existe uma métrica riemanniana $< \cdot, \cdot >_0$ sobre G que é invariante por multiplicação à esquerda de elementos de G [8]. Se K é compacto, então podemos definir uma métrica riemanniana sobre G que é invariante por multiplicação à direita de elementos de K. A referida métrica é definida como segue:

$$g(u,v) = \int_K < R_{k*}u, R_{k*}v >_0 \, d\mu(K),$$

onde $R_k : G \to G$ denota a translação à direita de G por um elemento $k \in K$ e $d\mu(K)$ denota a medida de Haar. A métrica riemanniana g assim definida induz (por passagem ao quociente) uma métrica riemanniana G-invariante sobre o espaço homogêneo G/K.

Proposição 3.4.1 (Blumental, [2]) *Seja $(M, \mathscr{F})$ uma variedade compacta folheada por uma G/K-folheação homogênea. Se K é compacto, então $\mathscr{F}$ é riemanniana.*

Prova. Seja $<,>$ uma métrica riemanniana de M. Denotemos por $Q \subset TM$ o complemento ortogonal de $T\mathscr{F}$ em TM com respeito a métrica $<,>$. Consideremos e fixemos uma métrica riemanniana G-invariante sobre o espaço homogêneo G/K. Como $(M, \mathscr{F})$ é uma G/K-folheação homogênea segue que $\mathscr{F}$ é definida por um G/K-cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta\in A}$. Cada submersão $f_\alpha : U_\alpha \to G/K$ induz uma isometria entre espaços vetoriais $df_{\alpha x} : Q_x \to T_{f(x)}(G/K)$, $\forall x \in U_\alpha$. Assim, a métrica de G/K induz uma métrica riemanniana sobre

Q. E esta métrica por sua vez nos dá uma métrica transversa para $(M, \mathscr{F})$. Portanto, isto faz com que $(M, \mathscr{F})$ seja uma folheação riemanniana. $\blacksquare$