

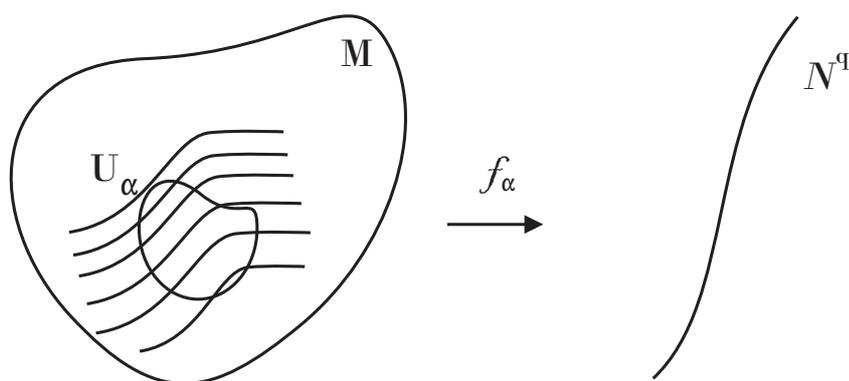
2 Preliminares

2.1 Introdução às folheações geométricas

2.1.1 Noções Básicas

Nesta seção recordaremos a noção de folheações juntamente com suas propriedades que serão utilizadas ao longo do texto. O leitor não familiarizado com o assunto pode encontrar no livro de Camacho e Lins [5] as justificativas para os fatos mencionados aqui. Aproveitaremos também a ocasião para fixar nossa notação.

Uma folheação de codimensão q sobre uma variedade M de dimensão n é intuitivamente uma decomposição de M em uma união disjunta de subvariedades conexas imersas que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, com segunda coordenada constante. Lembramos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ entre variedades X e Y é uma submersão C^0 quando, para todo $x \in X$, existem cartas locais em torno de x e $f(x)$ nas quais f se torna uma submersão C^∞ .



Sejam M uma variedade suave de dimensão n e N^q uma variedade de dimensão $q \leq n$. Um N^q -ciclo folheado sobre M de classe C^r , $0 \leq r \leq \infty$, é uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha, \beta \in A}$ constituída por submersões $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow N^q$ e

difeomorfismos $g_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de classe C^r satisfazendo:

- (1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M ;
- (2) $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow N^q$ é uma submersão C^r , para todo $\alpha \in A$;
- (3) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então os difeomorfismos $g_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ satisfazem

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(f_\beta(x)), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Cada aberto U_α é chamado de *vizinhança distinguida* e os difeomorfismos $g_{\alpha\beta}$ são chamados de *aplicações de transição*. Definimos sobre o conjunto de todos os N^q -cociclos folheados de M uma relação de equivalência da seguinte maneira: Dizemos que dois cociclos folheados são *equivalentes* se a união deles ainda é um cociclo folheado com uma escolha apropriada das novas aplicações de transição. Uma *folheação* de classe C^r de codimensão q é uma classe de equivalência de um N^q -cociclo folheado pela relação de equivalência definida acima. A dimensão de \mathcal{F} é o inteiro $n - q$. Escrevemos (M, \mathcal{F}) para indicar que M é uma variedade munida de uma folheação \mathcal{F} , às vezes, diremos que (M, \mathcal{F}) é uma *variedade folheada* (ou folheação).

Seja \mathcal{F} uma folheação de uma variedade M definida pelo N -cociclo folheado $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha, \beta \in A}$. As componentes conexas dos conjuntos $f_\alpha^{-1}(c)$, $c \in N^q$, são chamados de *placas* de U_α (ou de \mathcal{F}). Agora, sobre M , considere a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se e somente se existem placas P_1, P_2, \dots, P_k de \mathcal{F} tais que $p \in P_1$, $q \in P_k$ e $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. As classes de equivalência desta relação são as *folhas* de \mathcal{F} . As folhas de uma folheação \mathcal{F} de M são subvariedades imersas de M . Uma *seção transversal* à \mathcal{F} é uma subvariedade de dimensão q mergulhada em M e transversal a todas as folhas de \mathcal{F} que ela encontra. Quando uma folha L de \mathcal{F} é mergulhada, dizemos que ela é *própria*, ou equivalentemente, se existe uma transversal à \mathcal{F} que intercepta L em um único ponto.

Exemplo 2.1.1 (Suspensão de uma representação) Sejam B e F duas variedades conexas e $H : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Diff}^r(F)$ uma representação. Consideremos $p : \tilde{B} \rightarrow B$ o recobrimento universal de B e identifiquemos $\pi_1(B, b_0)$ com o grupo de automorfismos deste recobrimento, $\text{Aut}(\tilde{B}, B)$. Assim, temos uma ação de $\pi_1(B, b_0)$ sobre $\tilde{B} \times F$ que é dada como segue:

$$\begin{aligned} \zeta : \pi_1(B, b_0) \times (\tilde{B} \times F) &\rightarrow \tilde{B} \times F \\ (\gamma, (\tilde{b}, y)) &\mapsto (\gamma(\tilde{b}), H_\gamma(y)). \end{aligned}$$

Esta ação nos dá um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} \times F & \xrightarrow{pr} & \tilde{B} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ (\tilde{B} \times F)/\zeta & \longrightarrow & B \end{array}$$

onde pr é a projeção sobre a primeira coordenada, π é a aplicação quociente por ζ e $(\tilde{B} \times F)/\zeta \rightarrow B$ é unicamente induzida por pr . Seja $E = (\tilde{B} \times F)/\zeta$. A aplicação quociente $\pi : \tilde{B} \times F \rightarrow E$ é uma aplicação de recobrimento. Além disso, a aplicação $E \rightarrow B$ é a projeção de um fibrado e se $r \geq 1$ podemos munir E com uma estrutura diferenciável (ver [17] pp. 125), o fibrado (E, p, B) tem como grupo estrutural a imagem da representação H . Note que a ação ζ preserva as folhas, $\tilde{B} \times \{y\}$, da folheação produto. Assim, a aplicação quociente $\pi : \tilde{B} \times F \rightarrow E$ induz uma folheação \mathcal{F} sobre E que é transversal as fibras de E . A folheação (E, \mathcal{F}) assim obtida é chamada a *folheação dada pela suspensão de $\pi_1(B)$ sobre $\text{Diff}^r(F)$* cuja representação de holonomia é H (ver também [5] p. 96–104).

Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^0 de uma variedade M . Dizemos que a folheação \mathcal{F} é *transversalmente orientável* se ela é definida por um N^q -cociclo folheado tal que N orientável e as aplicações de transição de \mathcal{F} preservam a orientação de N . Suponhamos que \mathcal{F} é dada pelo N -cociclo folheado $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha, \beta \in A}$. Dois pares (U_α, f_α) e (U_β, f_β) são equivalentes se o germe do difeomorfismo $g_{\alpha\beta}$ em $f_\alpha(x)$ preserva orientação. Uma classe de equivalência dada por esta relação é chamada de *germe de orientação transversal* de \mathcal{F} em x . Seja U^* o conjunto de todos os germes de orientação transversal de \mathcal{F} em $x \in U$, onde U é uma vizinhança distinguida de \mathcal{F} . Os conjuntos U^* constituem um atlas para o conjunto de todos os germes de orientações transversais de \mathcal{F} , o qual a partir de agora denotamos por M^* . Definimos uma aplicação $\pi : M^* \rightarrow M$ que envia um germe de orientação transversais de \mathcal{F} em $x \in M$ que na verdade é um recobrimento duplo de M . Tal recobrimento é chamado de *recobrimento duplo das orientações transversais* de (M, \mathcal{F}) .

Proposição 2.1.2 *Sejam M uma variedade e \mathcal{F} uma folheação de M e $\pi : M^* \rightarrow M$ o recobrimento duplo das orientações transversais. Então*

- (i) *A folheação pull-back $\pi^*\mathcal{F}$ é transversalmente orientável;*
- (ii) *Se L é uma folha de \mathcal{F} cujo grupo fundamental não possui subgrupo de índice 2, então $\pi^*\mathcal{F}$ tem uma folha homeomorfa a L que recobre L .*

Prova. Para o item (i) o leitor pode consultar as p. 17 e 162 do livro de G. Hector e U. Hirsch [16]. Agora para (ii) suponha que $\pi_1(L)$ não tem subgrupo de índice 2. Então o recobrimento das orientações transversais L^* sobre L tem duas componentes conexas. Portanto, cada uma das componentes conexas de L^* é uma folha de $\pi^*\mathcal{F}$ difeomorfa a L . ■

O saturado de um subconjunto A de M por \mathcal{F} , denotado por $\mathcal{F}(A)$, é a união das folhas de \mathcal{F} que passam pelos pontos de A . Dizemos que $A \subset M$ é saturado por \mathcal{F} se o saturado de A por \mathcal{F} é o próprio conjunto A . Assim, o saturado de um conjunto aberto ainda é aberto.

Por conjunto minimal de uma folheação (M, \mathcal{F}) entendemos como sendo um conjunto fechado não vazio $\mu \subset M$ saturado por \mathcal{F} satisfazendo a seguinte propriedade: se $X \subset \mu$ é fechado não vazio de M e saturado por \mathcal{F} , então $X = \mu$. Por exemplo, toda folha fechada de uma folheação é um conjunto minimal. Um fato bem conhecido é que toda variedade folheada compacta possui um conjunto minimal [5].

Lema 2.1.3 *Uma folheação de uma variedade compacta não pode possuir todas as suas folhas próprias e não compactas.*

Prova. Suponhamos que (M, \mathcal{F}) é uma folheação com M compacta onde todas as folhas de \mathcal{F} são próprias e não compactas. Como M é compacta, \mathcal{F} possui um conjunto minimal. Seja μ um conjunto minimal de \mathcal{F} e seja F uma folha de \mathcal{F} contida em μ . Então F é densa em μ , mas dado um ponto $p \in F$ existe uma vizinhança V de p em M que intercepta uma única placa da folha F , isto ocorre pois F é própria. Assim F é aberta em μ , $\mu - F$ é um conjunto fechado saturado por \mathcal{F} e portanto $\mu - F = \emptyset$. Então podemos concluir que F é fechado, logo F é compacto, mas isto é uma contradição. ■

Quando \mathcal{F} é uma folheação pelo menos de classe C^1 podemos definir o fibrado tangente de \mathcal{F} . O fibrado tangente da folheação (M, \mathcal{F}) é o subfibrado de TM de $(n - q)$ -planos, denotado por $T\mathcal{F}$, cuja fibra sobre $x \in M$ é o subespaço $T_x\mathcal{F} \subset T_xM$ tangente em $x \in M$ à folha de \mathcal{F} que passa por x .

2.1.2 Grupos de holonomia

Um ingrediente importante no estudo do comportamento assintótico das folhas vizinhas a outras folhas é o conceito de holonomia. Tal conceito é a generalização natural de aplicação de primeiro retorno de um fluxo a uma seção transversal. Sendo assim, nada é mais natural do que estudarmos o conceito de holonomia antes de atacarmos o problema de não realização de variedades em folhas.

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão q de uma variedade M e seja L uma folha de \mathcal{F} . Recordemos as definições de grupo de holonomia e grupos de holonomia infinitesimal de L . Fixemos $x_0 \in L$. Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow L$ um laço baseado em x_0 . Agora, escolhemos uma cobertura de σ por um número finito de vizinhanças coordenadas $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, U_n$, com $x_0 \in U_0$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$ tal que para cada $i = 0, 1, \dots, n$, $f_i : U_i \rightarrow N^q$ é uma submersão definindo $\mathcal{F}|_{U_i}$, $f_0 = f_n$, $f_0(x_0) = y_0 \in N$. Para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, considere a aplicação de transição $g_{i+1,i} : f_i(U_i \cap U_{i+1}) \rightarrow f_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ tal que $f_{i+1} = g_{i+1,i} \circ f_i$ sobre $U_i \cap U_{i+1}$. Então $g_{n,n-1} \circ \dots \circ g_{1,0}$ é um difeomorfismo local definido em uma vizinhança de y_0 em N^q fixando y_0 , chamado de *aplicação de holonomia*. Seja h_σ o germe do difeomorfismo acima em y_0 . Assim, h_σ depende apenas da classe de homotopia de σ [5]. Deste modo obtemos um homomorfismo $h : \pi_1(L, x_0) \rightarrow G_q(y_0)$ que está bem definido, onde $G_q(y_0)$ denota o grupo de germes de difeomorfismos locais de N^q que fixam y_0 . O *grupo de holonomia* de L baseado em x_0 é definido por

$$h(L, x_0) := \text{imagem de } h \subset G_q(y_0).$$

Uma mudança de ponto base produz um subgrupo conjugado [5]. Agora, para o caso em que \mathcal{F} é diferenciável, consideremos $G_q^r(y_0)$ como sendo o grupo de r -jatos em $y_0 \in N^q$ e consideremos $\pi^r : G_q(y_0) \rightarrow G_q^r(y_0)$ a projeção natural. Pondo $h^r = \pi^r \circ h$; definimos o *grupo de holonomia infinitesimal de ordem r* de L em x_0 por $h^r(L, x_0) := \text{imagem de } h^r \subset G_q^r(y_0)$.

Teorema de Estabilidade de Reeb 2.1.4 *Seja \mathcal{F} uma folheação C^2 de codimensão $q \geq 1$ de uma variedade M . Suponhamos que L é uma folha de \mathcal{F} com holonomia trivial. Então dado um compacto $C \subset L$ de L , existe um mergulho $j : C \times [-1, 1]^q \rightarrow M$ tal que $j(C \times \{0\}) = C$ e cada $j(C \times \{*\})$ está contido em alguma folha de \mathcal{F} .*

Esboço da prova. Consideremos $M' = L \times [-1, 1]^q$ munida da folheação produto \mathcal{F}' cujas folhas são da forma $L \times \{*\}$. Note que a folha $L' = L \times \{0\}$ tem holonomia trivial. Temos que a projeção $\text{pr} : C \times [-1, 1]^q \rightarrow C$ é uma vizinhança tubular de $C \times \{0\}$ em M' com fibras $\{*\} \times [-1, 1]^q$. Denotemos $C \times [-1, 1]^q$ por C' . Agora, fixemos uma vizinhança tubular $N(C)$ de C em M e fixemos também um difeomorfismo $g : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ da fibra de C' que passa por x_0 sobre a fibra de $N(C)$ que passa por x com $g(x_0) = x_0$. Como a holonomia de L e de L' são triviais temos

$$g \circ h_\sigma \circ g^{-1}(x) = \text{id}(x) = h_{g \circ \sigma}(x),$$

para todo $[\sigma] \in \pi_1(L, x_0)$ e para todo $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 . Logo, pelo Teorema 2 de [5] p. 67, existem vizinhanças $V' \supset (C \times \{0\})$, $V \supset C$ e um difeomorfismo $j : V \rightarrow V'$ tal que $j(C \times \{0\}) = C$ e j leva cada $C \times \{*\}$ sobre uma folha de $\mathcal{F}|_V$. ■

O Teorema de Estabilidade de Reeb mencionado acima é válido para o caso C^0 quando a folheação \mathcal{F} tem codimensão um [17].

2.1.3

Folheações de Codimensão um

Seja (M, \mathcal{F}) uma variedade folheada por uma folheação de codimensão um e classe C^r , $0 \leq r \leq \infty$. Uma folheação \mathcal{N} de M é dita *transversal* à \mathcal{F} se cada folha de \mathcal{N} é transversal à \mathcal{F} e a dimensão de \mathcal{N} é igual a codimensão de \mathcal{F} . Neste caso a dimensão de \mathcal{N} é igual a um. Quando $r \geq 1$ é fácil ver que sempre existe uma folheação transversal à \mathcal{F} . Isto porque o campo planos ξ transversal à $T\mathcal{F}$ é com efeito um campo de linhas, e como tal é involutivo. Então pelo Teorema de Frobenius, existe uma folheação cujo fibrado tangente é ξ . Para o caso C^0 este fato também é verdade, porém menos evidente [33].

Suponhamos por simplicidade que \mathcal{F} é uma folheação de codimensão um transversalmente orientável e fixemos uma folheação \mathcal{N} transversal à \mathcal{F} . Seja U um subconjunto aberto de M e saturado por \mathcal{F} . Quando \mathcal{F} e \mathcal{N} são de classe C^2 podemos construir sobre M uma métrica riemanniana de modo que \mathcal{F} e \mathcal{N} são ortogonais. A inclusão $i : U \rightarrow M$ induz uma métrica não completa sobre U . No caso C^2 o completamento de U como variedade riemanniana, denotado por \hat{U} , é uma variedade com bordo. No entanto, mesmo sem a hipótese de \mathcal{F} e \mathcal{N} serem C^2 , podemos definir uma noção de completamento \hat{U} de U . No caso geral, o *completamento* de U é intuitivamente acrescentar ao conjunto U as folhas de \mathcal{F} que estão na “periferia” de U . Um procedimento preciso para construir \hat{U} é dado nas p. 87–88 de [17].

O completamento de U é uma variedade com bordo conexa \hat{U} contendo U imersa em M por uma imersão que também denotaremos por $i : \hat{U} \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $\text{Int } \hat{U} \simeq U$;
- (2) i é uma extensão da inclusão $i : U \rightarrow M$ tal que $i(\partial\hat{U})$ é saturado por \mathcal{F} ;
- (3) i é transversal às folheações \mathcal{F} e \mathcal{N} .

Sendo $i : \hat{U} \rightarrow M$ uma aplicação transversal às folheações \mathcal{F} e \mathcal{N} , podemos considerar o pull-back destas folheações pela imersão i . E denotaremos por \mathcal{F}^* e \mathcal{N}^* as folheações de \hat{U} obtidas pelo pull-back de \mathcal{F} e \mathcal{N} , respectivamente. Note que a folheação \mathcal{F}^* é tangente ao bordo de \hat{U} e que

as folheações \mathcal{F}^* e \mathcal{N}^* são transversais.

Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados 2.1.5 ([10], [17])

Suponhamos que M é compacta. Então existe uma subvariedade compacta com bordo e com quinas K de \hat{U} tal que $\partial K = \partial^{tg} \cup \partial^{tr}$ com

- (1) $\partial^{tg} \subset \partial \hat{U}$;
- (2) ∂^{tr} é saturado por \mathcal{N}^* ;
- (3) $\hat{U} - \text{Int } K$ é uma união finita de subvariedades não compactas B_i com bordo e com quinas homeomorfas a $S_i \times [-1, 1]$ por um homeomorfismo $\phi_i : S_i \times [-1, 1] \rightarrow B_i$ que leva $S_i \times \{*\}$ em folhas de \mathcal{N}^* .

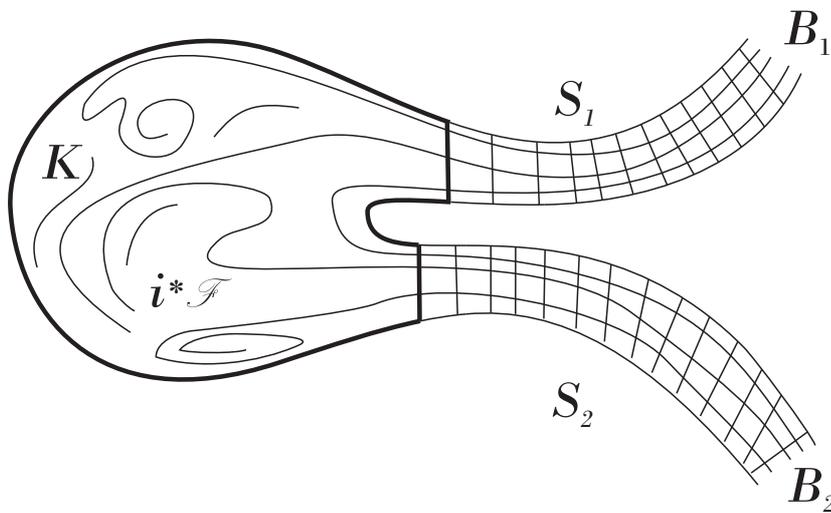


Figura 2.1: A estrutura do completamento de U

A variedade K dada pelo Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados é chamada de *núcleo* de \hat{U} . E as subvariedades B_i são chamadas de *ramos* de \hat{U} . A folheação \mathcal{F}^* restrita a um ramo B_i é dada pela suspensão de um homomorfismo do grupo fundamental de S_i para o grupo de homeomorfismos de $[-1, 1]$ que preservam orientação.

Lema de Trivialização de Hector 2.1.6 ([15]) *Seja \mathcal{F} uma folheação C^0 de codimensão um de uma variedade compacta M e seja \mathcal{N} uma folheação transversal à \mathcal{F} . Suponhamos que J é o traço de um arco contido em uma folha de \mathcal{N} . Se quaisquer dois pontos distintos de J pertencem a folhas distintas de \mathcal{F} , então $L \times J$ é homeomorfo ao saturado de J por \mathcal{F} por um homeomorfismo que leva $L \times \{*\}$ em uma folha de \mathcal{F} e $\{*\} \times \tau$ em uma folha de \mathcal{N} , onde L é uma folha de \mathcal{F} .*

2.2

Fins de variedades

Seja W uma variedade aberta (não compacta). Seja $E(W)$ o conjunto das sequências $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos e conexos de W satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\overline{U}_n - U_n$ é subvariedade compacta conexo de codimensão um de W ;
- (ii) $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$;
- (iii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$.

Vamos definir uma relação de equivalência sobre o conjunto $E(W)$ da seguinte maneira: duas sequências (U_n) e (V_n) são equivalentes se para cada n existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \supseteq V_{n_0}$ e $V_n \supseteq U_{n_0}$. A cada uma das classes de equivalência desta relação damos o nome de *fim* de W . O conjunto de todas as classes de equivalência da relação acima chamamos de *conjunto dos fins* de W e denotamos por $\mathcal{E}(W)$. Dizemos que a sequência (U_n) *define* um fim ϵ se (U_n) representa ϵ . Uma *vizinhança* U de um fim ϵ é um aberto U que contém todos menos um número finito de elementos da sequência que define o fim ϵ . Dizemos que um fim ϵ de W é *periódico* se existem um subconjunto aberto U de W e um mergulho $f : U \rightarrow U$ tal que a sequência $(f^n(U))_{n \in \mathbb{N}}$ define ϵ . Neste caso dizemos que $[U, f]$ define o fim ϵ .

Uma subvariedade com bordo compacta conexa $S \subset W$ de mesma dimensão que W é chamada de *bloco* de W .

Definição 2.2.1 Sejam W uma variedade aberta conexa e B um bloco de W . Dizemos que B *recorre finitamente* sobre W se a existência de uma família $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subvariedades de W disjuntas e homeomorfas a B implica Λ ser finito. Neste caso dizemos que W *tem recorrência finita*.

Proposição 2.2.2 *Seja W uma variedade aberta que possui um fim ϵ periódico. Então existe uma vizinhança U de ϵ tal que nenhum bloco de U recorre finitamente sobre U .*

Prova. Suponhamos que o fim ϵ é definido por $[U, f]$. Seja B um bloco contido em uma vizinhança U de ϵ . Para cada $n \geq 1$, consideremos o aberto $A_n = f^n(U) \setminus \overline{f^{n+2}(U)}$. A família de abertos $\mathcal{C} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de B . Pela compacidade de B apenas um número finito de membros da cobertura \mathcal{C} é suficiente para cobrir B . Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap f^k(U) = \emptyset$. Por conseguinte, $\{f^{kn}(B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família constituída por subvariedades contidas em U duas a duas disjuntas e todas homeomorfas a B . Portanto, B não recorre finitamente sobre U . ■