5
Noções sobre Amortecimento Exponencial

A principal motivação dessa parte do texto é tratar dos conceitos básicos sobre amortecimento exponencial. Essa técnica de análise e previsão de séries temporais será utilizada em capítulo posterior para atribuir níveis de importância aos valores que comporão o índice de qualidade proposto.

5.1. Conceitos iniciais

Uma série temporal é um conjunto de pares ordenados (x, y) onde um dos elementos desse par sempre está associado ao tempo. Estudar o comportamento de séries temporais pode ser muito útil para diversas finalidades. Entre elas a mais comum e popular é fazer *previsões*. Nesse capítulo serão mostrados dois procedimentos simples utilizados para estimar a previsão de uma série temporal.

Será representada uma série temporal por $Z_\varphi = (Z_1, \ldots , Z_N)$, que possui um comportamento bem modelado por

$$Z_t = \mu_t + a_t, \quad t = 1, \ldots , N$$

onde a_t é um ruído aleatório tal que $E(a_t) = 0$, $Var (a_t) =$ constante e μ_t é um parâmetro desconhecido que representará o nível da série, conforme a notação de Morettin e Toloi (2006). Séries que possuem esse comportamento são chamadas *séries localmente constantes*. Para efetuar a previsão para séries que possuem esse comportamento será definido o chamado *modelo constante*. Nele $E(Z_t) = E(\mu_t) =$ constante. Prever o valor dessa série significa definir o valor dessa constante. A previsão será dada por $\hat{Z}_t(h)$, que significa a previsão da série h passos à frente, no tempo t. Assim, pode-se definir o elemento Z_{N+h} como:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0711214/CA

$$Z_{N+h} = \mu_t + a_{N+h}$$

Efetuar a previsão $\hat{Z}_t(h)$ significa estabelecer a seguinte operação matemática:

$$\hat{Z}_t(h) = E\left(Z_{N+h} \mid Z_\varphi\right) = E\left(\mu_t + a_{N+h} \mid Z_\varphi\right) = \hat{\mu}_t(N)$$

onde $\hat{\mu}_t(N)$ é o estimador do parâmetro μ_t no instante N. Dessa maneira, fazer previsão significa definir esses estimadores. Seguindo a estrutura proposta por Souza (1983), serão apresentadas 3 (três) maneiras para encontrar esse estimador são elas: método ingênuo, médias móveis simples, amortecimento exponencial simples.

5.2. Método ingênuo

No método ingênuo o estimador $\hat{\mu}_t(N)$ é obtido como sendo o último elemento da série histórica, ou seja:

$$\hat{\mu}_t(N) = Z_N$$

Dessa forma, para qualquer previsão h passos à frente, espera-se que seja obtido o mesmo (o mesmo valor esperado), ou seja:

$$\hat{Z}_t(h) = Z_N$$

5.3. Médias móveis simples

No método das Médias Móveis Simples (MMS) o estimador $\hat{\mu}_t(N)$ é calculado como a média aritmética dos elementos da série histórica Z_φ. Assim,

$$\hat{\mu}_t(N) = M_N = \frac{Z_1 + \ldots + Z_N}{N}$$, ou de maneira mais genérica

$$\hat{\mu}_t(N) = M_T = \frac{Z_{T-N+1} + \ldots + Z_{T-1} + Z_T}{N}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0711214/CA

É importante observar que da mesma forma que no método ingênuo, a previsão h passos à frente é a mesma. Com isso,

$$\hat{Z}_t(h) = M_T = \frac{Z_{T-N+1} + \ldots + Z_{T-1} + Z_T}{N}$$

Esse valor será atualizado sempre que novos valores forem sendo inseridos à série histórica. Nesse caso o valor mais antigo sai da contabilização e dá espaço para o mais novo. Por isso, o nome do método chama-se *médias móveis*. É possível definir uma forma recursiva para a média móvel M_T. Nessa forma tem-se:

$$M_T = M_{T-1} + \frac{Z_T - Z_{T-N}}{N} \qquad \text{(i)}$$

5.4. Amortecimento exponencial simples

O método das médias móveis possui uma desvantagem clara. Nele, todos os elementos que entram na estimativa da previsão possuem o mesmo peso (1/N). Isso é claramente inadequado, pois é de se esperar que os elementos da série histórica que estejam mais próximos do presente sejam mais relevantes para a previsão. Essa mesma idéia será usada mais à frente em capítulos posteriores para a determinação do índice de qualidade.

Da equação recursiva (i), é possível derivar a seguinte adaptação

$$M_T = M_{T-1} + \frac{Z_T}{N} - \frac{Z_{T-N}}{N}$$

utilizando M_{T-1} como um estimador de Z_{T-N} a equação anterior torna-se

$$M_T = \frac{1}{N} Z_N + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{T-1}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0711214/CA

Ao substituir $\frac{1}{N}$ por α obtém-se a seguinte equação

$$\hat{\mu}_t(N) = M_T = \alpha Z_N + (1-\alpha)M_{T-1} \quad \text{(ii)}$$

A equação anterior (ii) representa um procedimento conhecido como *amortecimento exponencial*. O valor α é conhecido como *constante de amortecimento* que será sempre um valor entre 0 (zero) e 1 (um). Após efetuar sucessivas substituições, define-se outro estimador M_T dado por:

$$\hat{\mu}_t(N) = M_T = \alpha Z_N + \alpha(1-\alpha)Z_{N-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Z_{N-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^T M_o$$

Ao observar essa equação é possível perceber que todos os elementos da série histórica passam a ter importância ponderada de maneira diferente. Os elementos mais próximos do tempo N possuem peso maior enquanto que os mais distantes possuem peso menor, de maneira decrescente. O valor M_o é geralmente escolhido como a média aritmética das 4 primeiras observações ou então como $M_o = Z_1$ (Souza, opus cit.).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0711214/CA