4
O Método de Análise Hierárquica

4.1. Introdução

O método de análise hierárquica é um dos métodos multiatributo mais utilizados e difundidos no mercado mundial (Gomes, 2007). Isso se deve, provavelmente, a duas razões. A primeira é o seu pioneirismo. Foi desenvolvido em meados da década de 1970 pelo pesquisador americano Thomas L. Saaty, quando se começava a abordar problemas complexos sob a visão de múltiplos critérios simultâneos. Não havia, na época, muitas abordagens desse tipo. A segunda é o seu caráter simples e intuitivo. Ao conhecer as suas premissas, rapidamente o usuário começa a utilizá-lo, estruturando critérios, atribuindo valores e selecionando alternativas. Em inglês esse método é conhecido como *Analytic Hierarchy Process* sendo muito usada a sua sigla de referência AHP.

A idéia básica do AHP é que um problema decisório pode ser estruturado de maneira hierárquica, onde o topo da hierarquia contém a sua descrição geral e nos níveis mais abaixo estão os critérios (ou atributos) que são levados em consideração para a abordagem. Esses critérios poderão ser subdivididos em subcritérios e assim sucessivamente. No último nível da estrutura hierárquica serão encontradas as alternativas consideradas na análise. O significado do posicionamento das alternativas na base é que cada uma dessas alternativas passará a ser analisada individualmente, somente sob a óptica desses subcritérios (ou critérios) nas últimas ramificações da estrutura. Assim, será como se um problema decisório complexo fosse subdividido em problemas menores que serão abordados separadamente, para depois serem agregados e assim chegar na solução final para o problema complexo maior. A figura 4.1 ilustra a estrutura hierárquica descrita neste parágrafo. Na literatura também é possível encontrar a denominação *Árvore de Critérios* como sinônimo para *Estrutura Hierárquica*.

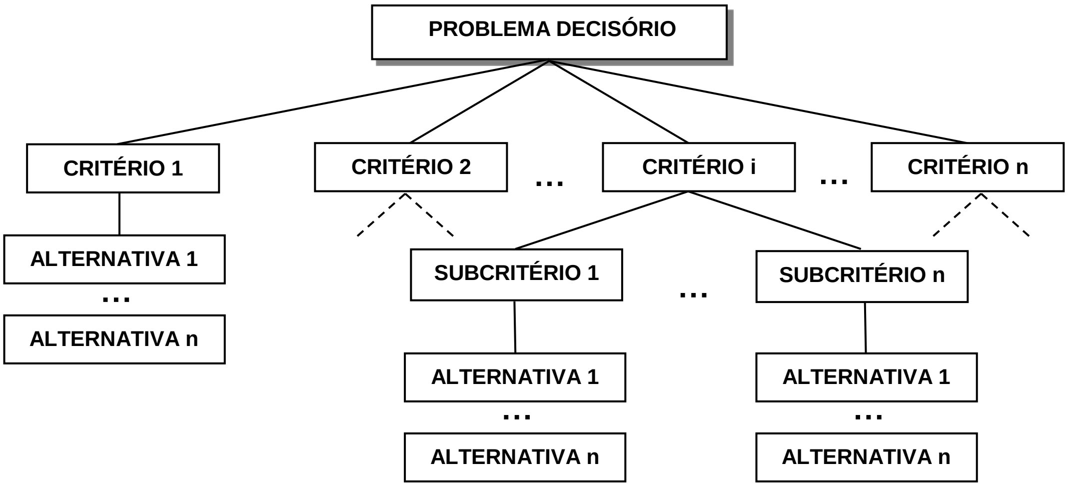

Figura 4.1: Modelo de estrutura hierárquica do AHP (Passos, 2002)

Após a definição dos critérios que serão utilizados, a análise do problema por partes pode ser feita de várias formas. Uma delas é entregando aspectos específicos para especialistas em determinados assuntos, que avaliarão sua área com mais propriedade. Como exemplo hipotético, em um problema de seleção de projetos de *Exploração e Produção* de petróleo, aspectos técnicos serão bem avaliados somente por engenheiros que conheçam o assunto. Aspectos financeiros serão bem avaliados somente por pessoas que conheçam o assunto e saibam analisar o mercado para quantificar projeções de receitas futuras e confrontar com os investimentos associados. Somente depois disso será possível definir a sua viabilidade econômica.

Nas seções seguintes serão analisados os detalhes do método tomando como referência o processo decisório proposto na seção 2.3.

Para facilitar o entendimento do método há um estudo de caso no final deste texto onde são selecionadas tecnologias de comunicações para o Exército Brasileiro (Ribeiro et al, 2009). Essa aplicação está detalhada no ANEXO B.

4.2. Estruturação do modelo

O processo decisório proposto no capítulo 2 sugere que a primeira atividade a ser realizada é a determinação dos tomadores de decisão (ou decisores) e analistas de decisão. A segunda atividade é a análise detalhada do problema. Ambas não possuem aspectos específicos dentro do AHP.

A modelagem utilizando o AHP pode ser feita de duas maneiras básicas. Na primeira define-se o problema decisório e partindo desse problema geral complexo haverá a segmentação nos critérios que devem ser levados em consideração para tomar a decisão, conforme descrito na seção anterior. Na segunda maneira, o tomador de decisão inicia a abordagem identificando as diversas alternativas disponíveis para escolha ou ordenação. Somente depois disso pensa-se na estruturação da árvore de critérios. Vale ressaltar que em alguns tipos de problemas é inviável iniciar a modelagem da segunda maneira devido ao grande número de alternativas disponíveis. Um exemplo possível é o problema de seleção de candidatos a vagas de emprego. Esse é um típico problema multiatributo e, geralmente, a quantidade de pessoas disponíveis para a vaga é muito grande e, na maioria das vezes desconhecida. Resta, portanto, definir diretamente o conjunto de critérios a serem considerados no processo de seleção. Sob a visão do processo decisório é como se fosse possível optar pela fase 3 (determinação das alternativas) ou fase 4 (definição dos critérios relevantes) depois de ter terminado a fase 2 (análise do problema).

É importante destacar que as premissas gerais definidas no capítulo 1 valerão e serão utilizadas aqui, na construção do modelo. Assim, as cinco características do conjunto de critérios descritas por Keeney e Haiffa (1976) deverão ser levadas em consideração.

4.3. Coleta de dados sobre os critérios

Após definir a estrutura hierárquica para o problema decisório, o passo seguinte é a atribuição de valores relativos para os critérios. A finalidade dessa etapa é definir o quanto um critério é mais importante que o outro dentro de toda a abordagem. Para definir esses valores, Saaty sugere que sejam feitas diversas análises paritárias (ou por pares) onde os critérios são comparados entre si dois a dois. Esse procedimento é defendido pelo autor do AHP, pois ele o considera intuitivo. Esses julgamentos são armazenados em uma matriz quadrada chamada *matriz de comparações paritárias*. A tabela 4.1 ilustra uma matriz de comparações paritárias genérica.

Critérios	**Crit 1**	...	**Crit p**	...	**Crit m**
Crit 1	1	...	a_{1p}	...	a_{1m}
...	...	...	...	...	...
Crit p	a_{p1}	...	1		a_{pm}
...	...	...	...	...	...
Crit m	a_{m1}	...	a_{mp}	...	1

Tabela 4.1: Matriz de comparações paritárias

Para preencher essa matriz é utilizada uma escala conhecida como *Escala Fundamental de Saaty*. Essa escala possui várias características a serem destacadas. A primeira é que ela relaciona valores numéricos com valores verbais. Assim haverá correspondência direta entre os números e expressões dentro de suas linhas. Outra característica notável é que seus valores variam de 1 até 9. Uma das bases conceituais para justificar esse valor está associada à limitação humana para distinguir níveis de intensidade nos diversos sentidos: audição, olfato, paladar etc. Essas características foram descritas por Miller (1956) e usada por Saaty como subsídio para criar essa escala. Outra característica importante associada a esse julgamento é que independente do tipo de critério usado (quantitativo ou qualitativo/subjetivo) a escala é aplicável. Como exemplo, se na avaliação de um automóvel dois dos critérios em questão forem *conforto interno* e *consumo de combustível*, para ambos deve-se usar os valores da tabela[1]. Outro aspecto a ser destacado é que nela está sendo definida uma escala de razões. Assim, os seus valores ao serem preenchidos na matriz de comparações paritárias representarão o quanto que um critério é mais atraente que o outro. Isso quer dizer que a atribuição do valor 3 indica que um critério *possui importância moderada* sobre o outro e que um critério é três vezes mais importante que o outro. Essa escala está ilustrada na tabela 4.2.

ESCALA NUMÉRICA	**ESCALA VERBAL**
1	Mesma importância
3	Importância moderada de um sobre o outro
5	Importância essencial ou forte
7	Importância muito forte
9	Importância extrema
2,4,6,8	Valores intermediários

Tabela 4.2: Escala fundamental de Saaty

Uma característica a ressaltar na matriz de comparações paritárias é que ela possui um tipo de simetria em relação à sua diagonal principal, da seguinte forma: ambos os elementos tratam do julgamento entre os mesmos critérios, entretanto um julgamento é o inverso do outro indicando $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Isso significa que se o valor $a_{ij} = 5$, tem-se que o critério i é 5 vezes mais importante que o critério j ou que o critério i possui importância essencial ou forte quando comparado ao critério j. Já o elemento simétrico $a_{ji} = 1/5$ indicará que o critério j possui um quinto da

[1]A razão para isso é que em muitas vezes a relação existente entre a satisfação associada a um veículo que consome menos e os valores numéricos de consumo não é linear. E naturalmente, será mais adequado levar em consideração as preferência, de fato, do tomador de decisão, que estão implícitas na escala fundamental.

importância do critério i ou, da mesma forma, que o critério i possui importância essencial ou forte quando comparado ao critério j.

Após preencher a matriz de comparações paritárias deverá ser obtido o *vetor de pesos* associado a essa matriz. Cada componente desse vetor indicará a importância relativa de cada critério quando comparado aos outros. Esse vetor pode ser obtido de várias formas. Aqui sugerimos que ele seja calculado da seguinte maneira:

a. Calcular a média aritmética de cada linha da matriz de comparações paritárias. Observar que cada linha estará associada a um critério e a uma componente do vetor de pesos.
b. Normalizar as componentes dividindo seus valores pela soma de todas as componentes. Com isso, os valores dos pesos dos critérios estarão entre 0 e 1 e sua soma será igual a 1.

	Critério 1	**Critério 2**	**Critério 3**	**Critério 4**	**Critério 5**
Critério 1	1	1	5	7	5
Critério 2	1	1	3	7	3
Critério 3	1/5	1/3	1	5	3
Critério 4	1/7	1/7	1/5	1	1/5
Critério 5	1/5	1/3	1/3	5	1

Tabela 4.3: Exemplo genérico de matriz de comparações paritárias (adaptado de Kuchler, 2009)

A tabela 4.3 ilustra um exemplo de matriz de comparações paritárias preenchida utilizando a escala fundamental de Saaty. A tabela 4.4 mostra o vetor de pesos associado a essa matriz.

Critério 1	0.347
Critério 2	0.258
Critério 3	0.197
Critério 4	0.028

Critério 5	0.170

Tabela 4.4: Vetor de pesos associado à tabela 4.3

4.3.1. Avaliação das alternativas em relação aos critérios

Após a definição da importância relativa entre os critérios o próximo passo no processo decisório proposto é avaliar as alternativas em relação aos critérios. No AHP isso pode ser feito de duas maneiras distintas assim denominadas: *medição relativa* ou *medição absoluta*.

A avaliação com *medição relativa* é muito semelhante ao que foi descrito na seção anterior para a pontuação relativa dos critérios. Nela as diversas alternativas disponíveis são analisadas sob a visão de cada critério individualmente. Assim, para um *critério i* genérico todas as alternativas consideradas para o problema decisório são comparadas duas a duas com a escala fundamental de Saaty. Esses julgamentos são consolidados em uma matriz de comparações paritárias. De forma análoga à seção anterior é definido um vetor de pesos para essa matriz. Esse vetor de pesos indica o quanto uma alternativa é boa quando comparada às outras sob a visão do *critério i*. Esse procedimento não é utilizado nessa dissertação. Para mais detalhes é sugerida a consulta a Saaty (2006), detalhado nas referências.

Quando a quantidade de alternativas no problema é muito grande fazer a medição relativa pode ser inviável devido a grande quantidade de julgamentos necessária para preencher as matrizes de comparações paritárias[2]. Fazer a *medição absoluta* resolve (ou reduz) esse problema.

A *medição absoluta* consiste em associar pontuações absolutas a cada uma das alternativas através de uma escala previamente definida pelo decisor. Essa escala pode ser construída de várias maneiras. Saaty

[2] Para uma matriz de comparações paritárias de ordem n, não sendo julgados os valores da diagonal principal (sempre igual a 1) e os valores abaixo dessa diagonal (devido à simetria dos julgamentos e $a_{ij} = 1/a_{ji}$) a quantidade total de julgamentos a ser inserida em cada matriz é $(n^2-n)/2$. Para um problema que possua, por exemplo, 20 alternativas serão necessários 190 julgamentos para completar cada matriz de comparações paritárias associada a um *critério i*. Preencher uma matriz dessa forma pode levar a erros por fadiga.

(opus cit.) sugere que sejam associados valores quantitativos a uma escala de julgamentos subjetivos conforme o exemplo a seguir. Em Kuchler (2009) foi apresentado um problema de identificação de áreas propensas à ocupação em reserva ambiental. Para ilustrar a utilização da medição absoluta será usado um dos critérios considerados naquele problema decisório, que é o critério *uso do solo*. Na reserva ambiental foram identificadas alguns tipos de uso do solo: *solo exposto, mata, mata densa, gramíneas* e *afloramento rochoso.* A quantidade de regiões a serem pontuadas sob a visão do critério *uso do solo* era muito grande. Por isso foram associados a cada um dos tipos de uso do solo valores numéricos. Essa associação é feita através da matriz de comparações paritárias conforme descrito na tabela 4.5.

	Solo Exposto	**Mata**	**Mata Densa**	**Afloramento**	**Gramíneas**
Solo Exposto	1	5	9	9	1
Mata	1/5	1	3	3	1/5
Mata Densa	1/9	1/3	1	1/2	1/9
Afloramento	1/9	1/3	2	1	1/9
Gramíneas	1	5	9	9	1

Tabela 4.5: Julgamentos das classes de usos do solo em Kuchler (2009)

Após estabelecer esses julgamentos busca-se obter uma escala numérica de maneira semelhante ao exemplo de medição relativa:

a. Calcula-se a média aritmética das linhas da matriz;
b. Divide-se cada um dos valores obtidos no item a) pelo maior dos valores. Com isso são obtidos valores entre 0 e 1, mas sem a idéia importância relativa entre eles.

A escala final obtida está descrita na tabela 4.6.

Solo Exposto	1
Mata	0,3

Mata Densa	0,08
Afloramento	0,14
Gramíneas	1

Tabela 4.6: Escala de valores para o critério uso do solo, em Kuchler (2009)

Com isso, sempre que for encontrada uma região (alternativa) com *afloramento rochoso*, p.ex., será associado a ela o valor 0,14. Em regiões com gramíneas será associado a elas o valor 1.

Em ambos os procedimentos para pontuar as alternativas em relação aos critérios (*medição relativa* e *medição absoluta*) é obtido ao final um vetor de pontuações que armazena os julgamentos que foram efetuados para cada alternativa em relação ao *critério i* especificado.

4.3.2. Análise de inconsistência

Após o preenchimento de cada matriz de comparações paritárias é necessário analisá-las para levantar a existência de inconsistências. A inconsistência ocorre devido a erros nos julgamentos de valor. É necessário que sejam respeitadas as relações de preferência entre os critérios. Dados três critérios A, B, C, para que não haja inconsistência, deve ocorrer que se A é preferível a B e B é preferível a C, então A deve ser preferível a C. Outro problema que ocorre está relacionado com a intensidade com a qual um critério é preferível em relação a outro. Geralmente, ocorre que $a_{pq} \neq a_{pv}.a_{vq}$, onde a_{ij} são elementos da matriz de comparações paritárias, p e q representam linha e colunas quaisquer, v é um critério intermediário e a_{ij} determina o quanto um critério i é preferível ao critério j. Saaty (2006) estabeleceu que um valor aceitável para o índice de inconsistência é 0,1. Para medir este índice de inconsistência da matriz, existem procedimentos específicos.

Supondo uma matriz de comparações paritárias entre critérios que seja consistente. Dados os pesos para cada critério como sendo w_1, ... , w_n e a_{ij} como o elemento genérico, pode-se escrevê-la como sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1} & \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_1} & \frac{w_2}{w_2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

Isso ocorre devido a uma razão simples. A consistência perfeita vai ocorrer se $a_{ik} = a_{ij}\, a_{jk}$ para qualquer i, j, k ≤ n onde n é a ordem da matriz. Se acontecer que $\mathbf{a_{ij}} = \frac{\mathbf{w_i}}{\mathbf{w_j}}$ com i, j = 1, ... , n, então:

$$\mathbf{a_{ij}}\, \mathbf{a_{jk}} = \frac{\mathbf{w_i}}{\mathbf{w_j}} \frac{\mathbf{w_j}}{\mathbf{w_k}} = \frac{\mathbf{w_i}}{\mathbf{w_k}} = \mathbf{a_{ik}} \quad \text{também,}$$

$$\mathbf{a_{ji}} = \frac{\mathbf{w_j}}{\mathbf{w_i}} = \frac{1}{\mathbf{w_i}/\mathbf{w_j}} = \frac{1}{\mathbf{a_{ij}}}$$

Com isso, fica bem caracterizada uma matriz de comparações paritárias consistente.

Dado que os vetores **x** = (x_1, ..., x_n) e **y** = (y_1, ..., y_n) compõem a seguinte equação matricial

$$\mathbf{A \cdot x = y}$$

Esta equação tem o seguinte significado matemático

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = y_i \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

Utilizando a hipótese de consistência da matriz A, é possível escrever que

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \qquad \text{e assim,} \qquad a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = 1$$

Dessa maneira,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \frac{1}{w_i} = n \qquad i = 1, ..., n$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = w_i n \qquad i = 1, ..., n$$

Isso é equivalente à equação matricial

$$\mathbf{Aw = nw}$$

Quando se trata de álgebra linear, a equação acima indica que **w** é um autovetor de **A** que possui autovalor n. Esta equação matricial, quando é escrita em sua forma total, fica como,

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} \cdots\cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} \cdots\cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix}$$

Em um caso prático onde se deseja estabelecer pesos para os critérios (ou alternativas) por meio de comparações paritárias, procura-se, portanto, achar uma matriz que seja o mais consistente possível. Quanto mais consistente for a matriz, mais os pesos (determinados por seu autovetor) serão corretos.

Como a montagem da matriz **A** depende de julgamentos subjetivos, torna-se difícil não cometer os erros que tornam a matriz inconsistente. Para avaliar este problema, são utilizadas os seguintes resultados

Se λ_1, ..., λ_n são números que satisfazem a equação matricial,

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

Então, λ é autovalor da matriz **A**. Se $a_{ij} = 1$ para todo i, então tem-se que,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

Se a equação matricial ***Aw = nw*** é válida, somente um dos autovalores não será diferente de zero, será n e por isso, será o maior autovalor de A.

Outro resultado importante a ser utilizado para o desenvolvimento dessas idéias é que se os elementos de uma matriz recíproca positiva **A** forem variados em pequenos valores, então os seus autovalores também irão variar em pequenos valores.

Utilizando os resultados obtidos, se a matriz recíproca A possuir diagonal principal igual a 1 e se for consistente, pequenas variações nos seus elementos a_{ij} farão com que o autovalor máximo λ_{max} permaneça com seu valor próximo de *n* e com que os outros autovalores permaneçam com seus valores próximos de zero.

Dessa maneira, com a finalidade de encontrar o vetor de prioridades, o autovetor da matriz **A** poderá ser determinado pela equação

$$Aw = \lambda_{max} w$$

Deseja-se ter uma solução normalizada, de forma que a soma de todos os w_i seja igual a 1. Para isso, basta dividir todos os w_i encontrados pelo seu somatório.

O desvio de λ_{max} em relação a n determinará uma medida de consistência, já que pequenas variações em a_{ij} implicarão em pequenas variações em λ_{max}. Toma-se, portanto, o índice de inconsistência como sendo

$$\frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

As inconsistências fazem parte dos julgamentos humanos e por isso é muito normal que sejam encontradas nos modelos de análise de decisão. Porém, dependendo do grau de inconsistência da matriz, deve-se rever os pesos estabelecidos para que se tenha certeza sobre os julgamentos. Em decisões em grupo, é normal que as pessoas que estejam participando da construção de um modelo específico possuam informações diferentes e por isso transmitam opiniões diferentes, causando inconsistências. É normal que haja desatenção e se façam julgamentos de maneira errada ou mesmo que não haja boa compreensão do que deve ser feito. Porém, se o decisor tiver plena certeza dos seus julgamentos e achar que nada deve ser modificado, devem ser mantidos os valores, mesmo com níveis de inconsistência altos.

O software *Expert Choice,* desenvolvido com a participação do próprio Thomas Saaty, fornece recursos automáticos para o cálculo dessa inconsistência. Para fins práticos recomenda-se que a Razão de Consistência (RC) não exceda certos limites que irão variar de acordo com a ordem da matriz. A tabela 4.7 mostra o valor máximo de RC recomendado para cada matriz.

n	**3**	**4**	**≥ 5**
RC menor que	0,05	0,08	0,1

Tabela 4.7: Limites sugeridos para a razão de consistência (RC)

4.4. Obtenção do resultado final

Após definidos os vetores de pesos dos critérios e o vetor de pontuações das alternativas em relação aos critérios, o próximo passo é agregar esses valores para a obtenção do resultado final. No AHP cada alternativa receberá uma pontuação através de uma função de valor aditiva. As alternativas com maior valor serão as preferíveis, de acordo com o método. Por isso, é possível ordenar as alternativas e assim classificar o AHP como um método $P\gamma$[3]. A função de valor para cada alternativa é dada a seguir.

$$f(a) = \sum_{j=1}^{n} w_j v_j(a)$$

Onde:

w_j = peso do j-ésimo critério;

v_j = desempenho da alternativa "*a*" com relação ao j-ésimo critério.

4.5. Análise de sensibilidade

A realização de análise de sensibilidade é muito importante para a conclusão da modelagem. É comum que existam dúvidas nos julgamentos realizados pelos tomadores de decisão. Ao final, depois da obtenção dos resultados, alguns parâmetros podem ser alterados para que seja feita uma análise do seu impacto na resposta final do problema. Se mudanças residuais não afetam a resposta, naturalmente será grande a confiança no resultado. Caso essas alterações impliquem em mudanças na resposta, deverá se chegar a um consenso quanto aos valores que de fato serão escolhidos. No anexo B é mostrada a análise de sensibilidade feita para o problema exemplo utilizando o software EC 11.5 da Expert Choice.

4.6. Decisão em grupo

Para levar em consideração os julgamentos de vários decisores simultaneamente, o AHP possui um equacionamento próprio. O procedimento adotado é efetuar a média geométrica de cada elemento

[3] Devido a grande flexibilidade do AHP é possível encontrar aplicações em que ele é usado para classificar e escolher alternativas. Por isso, ele também pode ser visto com um método $P\alpha$ e $P\beta$.

dos vetores de peso. Depois disso deve-se inseri-los na equação que fornece o julgamento final como descrito a seguir.

$$f(a) = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j \overline{v}_j(a)$$

Onde:

f(a) = valor final da alternativa

$$\overline{w}_j = \sqrt[s]{\prod_{k=1}^{s} w_j(k)}$$

$w_j(k)$ = peso associado ao critério j definido pelo decisor k.

$$\overline{v}_j(a) = \sqrt[s]{\prod_{k=1}^{s} v_{jk}(a)}$$

$v_{jk}(a)$ = valor da alternativa a associado ao critério j, feito pelo decisor k.

s = número de decisores no problema.