4.
A Boa Forma do Estruturalismo

Responsabilizar a teoria pela determinação do objeto é uma concepção comum ao pensamento dos autores trabalhados até o presente momento. De modo que, após investigar a pedra angular das pesquisas estruturalistas, identificada com o artigo de Benacerraf, e investigar o desenvolvimento de um estruturalismo em suas bases conceituais, exemplificado pelo trabalho *ante rem* de Shapiro, procurarei tatear um breve histórico desta discussão. A questão histórica, com efeito, surge como peça de investigação em algum momento do trabalho filosófico, e este capítulo seguirá semelhante abordagem com o objetivo de destacar a figura de dois matemáticos que comporiam, junto de muitos outros, o conjunto de precursores da abordagem estruturalista. Esses matemáticos são o alemão Richard Dedekind e o grupo francês de Nicholas Bourbaki. A razão para se destacá-los decorre da estrita enunciação por parte de Shapiro, como se eles fossem os antecedentes teóricos de seu desenvolvimento conceitual (as últimas seções de seu capítulo histórico intitulam-se respectivamente “Dedekind e as estruturas *ante rem*” e “Nicholas Bourbaki”), bem como da possibilidade de se aproximar as teses defendidas por estes autores (ou os problemas que eles indicam) com aquelas teses defendidas ou sugeridas por Benacerraf em seu importante artigo. Observarei, assim, a breve consideração de Shapiro de alguns debates paralelos a estas duas figuras para, por fim, introduzi-las na discussão aqui empreendida.

Para um pensamento histórico sobre a filosofia da matemática, faz-se fundamental uma consideração sobre o século XIX. O teórico Howard Stein, inclusive, pensa que a matemática sofreu transformações tão profundas neste momento que não constituiria exagero imaginá-lo como seu segundo nascimento (o primeiro teria se dado entre os gregos clássicos). Já Shapiro pensa que tudo o que se considera contemporaneamente como “matemática clássica” é o resultado de batalhas teóricas estabelecidas neste momento. Assim, o primeiro confronto teria ocorrido no campo da geometria, para posteriormente avançar em direção a outros domínios da matemática. Alguns confrontos intelectuais, como o debate entre Russell e Poincaré ou o debate entre Frege e Hilbert, ocorreram na esteira destas discussões sobre o domínio geométrico, de maneira que procurarei brevemente apresentá-los para fundamentar o destaque oferecido às figuras de Dedekind e Bourbaki. Deve-se ressaltar de imediato que o cenário no qual a discussão do século XIX se travou foi o cenário constituído pelo legado da filosofia kantiana, dentro do qual toda a matemática, seja a geometria, seja a aritmética, possuía sua fundamentação, e, por decorrência, seu estatuto epistemológico, em juízos sintéticos *a priori*. Antecedendo a esta configuração teórica observa-se ainda o desenvolvimento da geometria analítica e da geometria projetiva, as quais possibilitaram a introdução de “elementos ideais” no domínio geométrico (tal como ocorrera no domínio aritmético com a introdução dos números negativos e imaginários).

A possibilidade de se trabalhar com elementos ideais na geometria implicou em uma progressiva sofisticação na maneira pela qual se poderia introduzir tais objetos. Esta sofisticação foi conceitualizada por Shapiro de três formas diferentes. Em um primeiro momento ele a especifica como *postulação*; em um segundo momento como *definição implícita* (a fim de lançar mão de seu conceito epistêmico, trabalhado no capítulo anterior); para, por fim, trabalhar semelhante introdução sob o prisma da *construção*. Com a *postulação*, o matemático asseverava a existência de determinados entes que obedeceriam a algumas leis, as quais valeriam para a maior parte dos objetos já existentes. Com o auxílio da *definição implícita*, por outro lado, o matemático pôde oferecer a descrição de um sistema de entes com um conjunto de leis devidamente estipuladas, bem como concluir que esta descrição se aplicaria a qualquer coleção que obedeça a tais leis. Por fim, observando-se o método de *construção*, Shapiro considera que este foi o método que melhor se adequou à prática matemática, em função de a introdução de novos objetos encontrar-se atrelada a transformações (muitas vezes por combinação) de entes já estabelecidos, satisfazendo a pergunta pela sua existência de antemão. Afirma-se então que "uma perspectiva frutífera tomaria a definição implícita e a construção como em linha. A construção de um sistema de objetos estabelece que há um sistema de objetos definidos de tal forma, de modo que a definição implícita não seria vazia. Além do mais, a construção também mostra como os novos entes podem ser relacionados com os já estabelecidos, e poderia sugerir novas direções para a pesquisa"[218].

De posse destes conceitos, apresentam-se alguns momentos que poderiam ilustrar a sua clara utilização, como, por exemplo, no distanciamento que se começa a estabelecer entre a geometria e o próprio conceito de visualização. De fato, com o desenvolvimento da geometria analítica e projetiva, e a progressiva introdução de elementos ideais, a argumentação geométrica não mais utilizaria diagramas como outrora, e, em função disso, não poderá se caracterizar unicamente como "a ciência que estuda o espaço" (compreendido como o espaço visível – ou ainda, "visualizável"). Isto significa que ao mesmo tempo em que a introdução dos elementos ideais auxilia na ampliação teórica da geometria, ela a afasta de sua clássica definição no momento em que preconiza uma distância em relação aos conceitos de matéria e extensão. A geometria passará a se desenvolver então, nos dizeres de Grassmann, como "a ciência geral das puras formas, abstraindo-se de qualquer interpretação que a linguagem possa ter"[219], isto é, os seus termos serão caracterizados apenas em virtude das relações que estabelecem entre si. Outra distinção presente nas considerações de Grassmann é aquela entre uma ciência *formal* e uma ciência *real* (com a qual se traça o paralelo da clássica distinção entre matemática *pura* e *aplicada*). Neste sentido, a geometria clássica seria uma ciência real e, por conseguinte, "não seria um ramo matemático da mesma maneira que a aritmética é"[220]. Para ele, do ponto de vista matemático, a geometria não deveria apresentar uma intuição espacial, mas a estrutura do espaço, e como bem ponderou o filósofo Ernst Nagel, "Grassmann foi o primeiro matemático que explicitamente reconheceu que a matemática versa sobre estruturas formais"[221]. Esta concepção iniciou um processo que culminaria na ideia de que "no estudo da geometria, não tem importância a maneira pela qual os

[218] *Ibidem*.
[219] *Idem*, p. 147.
[220] GRASSMANN *apud* SHAPIRO 1997, p. 147.
[221] NAGEL *apud* SHAPIRO 1997, p. 148.

seus “elementos” são observados”[222], mas as relações que os mesmos estabelecem entre si. Tal tese também teria conduzido a geometria a um sucessivo abandono da noção de *intuição* e à construção das mais diversas interpretações não-euclidianas, fato que estará no centro do debate estabelecido entre as figuras de Frege, Russell, Poincaré e Hilbert.

Pode-se iniciar a apresentação deste par de debates com aquele travado entre Henri Poincaré e Bertrand Russell. Norteado pela pergunta sobre a natureza metafísica dos elementos básicos da geometria e pela questão acerca de nosso acesso epistêmico aos mesmos, enquanto Poincaré concordava com as tendências observadas no desenvolvimento matemático que lhe era contemporâneo, as quais desenvolviam uma “formalização” da geometria, Russell apresentava sua contraposição teórica a partir de uma sofisticação da natureza da noção de *definição*. De maneira que, para Poincaré, em função de o nosso acesso epistêmico ao espaço físico ser mediado e limitado por objetos físicos, não haveria um fato conclusivo que obrigasse o matemático a recusar a plausibilidade de geometrias não-euclidianas, fato que o permitiria concluir que uma determinada geometria não poderia ser mais verdadeira do que qualquer outra. Para sustentar tal tese, Poincaré também expressa sua posição em relação aos objetos matemáticos, questionando inicialmente a possibilidade de se conceber um objeto de maneira isolada, isto é, independentemente de suas relações, fora dos domínios matemáticos. Afinal, para os objetos da matemática, “isto é impossível […].Se alguém quiser isolar um termo [matemático] e abstraí-lo de suas relações com os outros, não sobra *nada* [para ser concebido]”[223].

Esta tese poderia implicar uma precedência da relação entre os termos sobre a definição dos próprios termos, constituindo-se tal definição por alguma espécie de convenção. De modo que Russell considerará que não apenas os matemáticos sempre ignoraram o papel da definição em sua disciplina, como também considerará que este pensamento foi devidamente veiculado por Poincaré na crítica endereçada ao seu ensaio sobre os fundamentos da geometria, fato que o obrigou a delinear de maneira satisfatória os contornos de semelhante noção.

[222] SHAPIRO 1997, p. 148.
[223] POINCARÉ *apud* SHAPIRO 1997, p. 154.

Assim, para ele, existiriam dois usos diferentes para a noção de “definição” utilizada por um teórico qualquer – um uso matemático e um uso filosófico. Logo, uma definição matemática identificaria um objeto “como o único que sustenta certas relações com outros itens, presumivelmente já conhecidos”[224]; já a definição filosófica seria aquela que realmente define uma palavra – “alguém oferece o sentido da palavra e, ao menos em alguns casos, este sentido não pode consistir em relações com outros termos”[225]. Apesar de a definição filosófica ser legitimada pela noção de familiaridade (*acquaintance*) apresentada pela teoria de Russell, o desenvolvimento interno da matemática favorecia a argumentação de Poincaré, e ainda mais o desenvolvimento teórico construído pelo matemático alemão David Hilbert em sua obra *Fundamentos da Geometria* (*Grundlagen der Geometrie*), de 1899.

Nesta obra, Hilbert executa um programa intelectual que marcou, por um lado, o fim do papel especial reservado à intuição no desenvolvimento da geometria, e, por outro lado, o início para a importante área da metamatemática (Shapiro considera inclusive que “o estruturalismo não é nada mais do que um corolário a estes desenvolvimentos”[226]). Para excluir a intuição do pensamento geométrico, pensa Hilbert que seria suficiente a formulação de um conjunto de axiomas adequado, e, para iniciar os estudos metamatemáticos, a demonstração de sua consistência. Afirma Hilbert que “a geometria, como a aritmética, requer para o seu desenvolvimento lógico apenas um pequeno número de princípios fundamentais. Estes princípios fundamentais são chamados de axiomas da geometria. A escolha dos axiomas, e a investigação de suas relações com os outros [...] é equivalente à análise lógica de nossa intuição espacial”[227]. Ao se privilegiar a análise lógica frente à intuição espacial, se privilegiaria o caráter estrutural (e autônomo) dos axiomas frente à definição dos termos primitivos, de modo que qualquer coisa poderá desempenhar o papel dos termos primitivos (indefinidos), desde que mantenham semelhantes relações (axiomatizadas). Desta maneira, interessa ao pensamento de Hilbert apresentar um *modelo* para o conjunto de axiomas geométricos destacados, ou seja, descobrir se este conjunto

---

[224] SHAPIRO 1997, p. 155.
[225] *Ibidem*.
[226] *Idem*, p. 157.
[227] HILBERT *apud* SHAPIRO 1997, p. 157.

de axiomas é satisfazível em alguma medida. A afirmação de que nesta perspectiva a noção de “verdade em um modelo” desempenha um papel central não incorreria em exagero, o que aproxima semelhante ponto de vista da teoria dos modelos e dos estruturalismos posteriormente desenvolvidos. Afinal, “uma conseqüência da abordagem axiomática, metamatemática, é que modelos isomórficos são equivalentes. Se há uma função 1-1 do domínio de um modelo para o domínio de outro, a qual preserva as relações do primeiro, então qualquer sentença de linguagem formal que for verdadeira em um, será verdadeira no outro”[228].

Pois bem, uma pequena divergência surge neste momento em relação ao que se está considerando como a *definição* de um primitivo geométrico e como um *axioma* – e o debate estabelecido entre as figuras de Frege e de Hilbert ocorrerá em torno desta divergência. Para Frege, “os axiomas deveriam expressar *verdades* e as definições deveriam oferecer os *sentidos* e *fixar a denotação* de certos termos”[229], isto é, ele procura advertir Hilbert de que as definições deveriam fixar o sentido de determinados termos com o auxílio de outros já conhecidos, e de que, em contraste, os axiomas e os teoremas “não devem conter uma palavra ou signo cuja [...] contribuição para a expressão do pensamento não esteja completamente estabelecida, pois somente deste modo não haverá dúvida sobre o sentido da proposição e sobre o pensamento que ela expressa. [...] Assim, os axiomas e os teoremas podem nunca tentar estabelecer o sentido de um signo ou palavra que neles ocorrem, mas este já deve estar estabelecido”[230]. E isto porque, para ele, se os termos utilizados na formulação de um axioma não possuem um significado anteriormente fixado, os axiomas não poderão ser verdadeiros ou falsos e, por conseguinte, não poderão ser axiomas. Esta argumentação foi veiculada em uma carta enviada para Hilbert ao final do ano de 1899, foi e devidamente respondida por este apenas dois dias depois. Em sua resposta, Hilbert transmitia a Frege a sua compreensão das *relações lógicas*, a qual “desprezava” a definição dos conceitos básicos e que Frege, pioneiro dos estudos em lógica-matemática, deveria apreciar. Afirmava-se assim que era

[228] SHAPIRO 1997, p. 159.
[229] *Idem*, p. 161.
[230] FREGE *apud* SHAPIRO 1997, p. 161.

"claramente óbvio que toda teoria é apenas uma disposição ou um esquema de conceitos unidos por suas relações necessárias entre si, e que os elementos básicos podem ser pensados de qualquer modo", ou seja, independentemente das específicas definições que um conceito pode receber, o que os axiomas de uma teoria precisam garantir é a permanência das relações lógicas que se estabelecem entre eles. E Hilbert prossegue afirmando que "se os axiomas arbitrariamente dados não contradizem um ao outro em todas as suas conseqüências, então eles são verdadeiros e existirão as coisas definidas por eles"[231]. Este seria o seu critério para verdade e existência.

A resposta de Frege, com a apreciação esperada por Hilbert, não tardou. Ela manifestava a compreensão do projeto de Hilbert na carta subseqüente, bem como louvava o fato de que Hilbert procura "separar a geometria da intuição espacial e desenvolvê-la como uma pura ciência lógica tal como a aritmética"[232]. Para ele, no entanto, a determinação da identidade de um objeto pelos axiomas (um eco do *problema de Júlio César*) ainda permanece em aberto, pois o sistema axiomático de Hilbert seria análogo a um sistema de equações, permeado por diversas variáveis inter-relacionadas. Isto significa que a axiomatização de Hilbert não ofereceria as condições necessárias e suficientes para a consolidação de um único elemento, mas sim as condições necessárias e suficientes para a consolidação de um sistema de elementos (o qual, no caso, bem poderia ser a geometria euclidiana), relacionados de uma determinada maneira. Ou seja, o tratamento axiomático de Hilbert conteria, para Frege, uma descrição satisfatória de certas relações de segunda ordem, fato que o fez transformar a noção de *definição implícita* utilizada por Hilbert na noção de *definição explícita* (aplicada a conceitos de segunda ordem) nos trabalhos que dedica à geometria após esta discussão. Shapiro considera que Frege e Hilbert, mais do que permanecerem em suas posições originais, travaram uma discussão na qual se tentava chegar a uma posição comum a ambos, diferentemente do que ocorrera no debate entre Poincaré e Russell. Obviamente, eles não modificaram as teses centrais que orientavam suas posições, as quais seriam, para Hilbert, o fato de que "aos principais

[231] HILBERT *apud* SHAPIRO 1997, p. 162.
[232] FREGE *apud* SHAPIRO 1997, p. 163.

conceitos definidos são atribuídas diferentes extensões em cada modelo"[233] (tese capturada pela noção contemporânea de um termo *não-lógico*, tal como definida por Tarski); e, para Frege, o fato de que "o sentido de uma expressão determina completamente sua referência"[234] (*fixidez da referência*), relacionado com o *proposicionalismo* ("toda sentença bem-formada em uma teoria matemática efetua uma rígida asserção sobre uma rígida coleção de conceitos e objetos. Cada proposição possui um valor de verdade determinado pela natureza das referências dos objetos e conceitos"[235]). Shapiro então dedica algumas breves páginas ao desenvolvimento da aritmética efetuado por Frege em seus *Grundlagen*, com o objetivo de retirar a estranheza que poderia causar a subscrição, por parte de um estruturalista *ante rem*, de teses como a *fixidez da referência* e o *proposicionalismo*. Obviamente, sublinha-se o fato de que Frege, ele próprio, jamais sustentou qualquer teoria de matiz estruturalista, e para levar a cabo esta aproximação se modificaria, em alguma medida, o clássico programa fregeano. Shapiro acaba por esboçar algumas considerações até o momento em que afirma que "para se localizar um precursor do estruturalismo *ante rem* deve-se retornar um pouco e olhar para outro logicista, Richard Dedekind"[236].

4.1 Richard Dedekind

Nascido na cidade alemã de Braunschweig, a carreira de Richard Dedekind não possui grandes mudanças ou lacunas. Diplomado pelo Collegium Carolinum na metade do século XIX, ele se matricula na Universidade de Göttingen para obter seu doutorado com uma tese sobre a teoria dos integrais de Euler, o qual transcorrerá sob a supervisão do "príncipe dos matemáticos" Carl Friedrich Gauss. Em seguida, ele ingressa no quadro de professores da Escola Politécnica de Zurique antes de obter uma cátedra no mesmo Collegium Carolinum pelo qual se diplomara. Neste colégio permanecerá por trinta e dois anos, amadurecendo e desenvolvendo lentamente sua obra intelectual da qual se

[233] SHAPIRO 1997, p. 165.
[234] *Ibidem*.
[235] *Ibidem*.
[236] *Idem*, p. 170.

destacará, para os fins aqui propostos, alguns excertos de sua longa correspondência e seus dois famosos ensaios: o primeiro publicado em 1872 sobre a natureza da continuidade, intitulado *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, e o segundo publicado em 1888 sobre a natureza dos números naturais, intitulado *Was sind und was sollen die Zahlen?*. A atribuição de um caráter logicista ao seu conjunto de escritos decorreria assim de um duplo movimento observado em sua obra: por um lado, a recusa da intuição nas provas oferecidas em aritmética, e, por outro, a consideração da aritmética e da análise como resultados diretos das leis do pensamento. O primeiro movimento, deste modo, pode ser observado no prefácio ao artigo de 1872, no qual se procura reservar para a intuição geométrica (*Anschauung*) um caráter pedagógico, e não mais demonstrativo, em relação a noção de continuidade. Já o segundo movimento é entrevisto no primeiro prefácio ao ensaio de 1888, no qual afirma Dedekind que considera "o conceito de número inteiramente independente das noções ou intuições do espaço e do tempo – preferindo considerá-lo como um produto imediato das puras leis do pensamento"[237].

Será a partir de seu caráter logicista que a teoria de Dedekind poderá ser conectada com a argumentação de Benacerraf (em contraposição ao logicismo fregeano), e com o estruturalismo *ante rem* de Shapiro. Para aproximá-lo de Benacerraf, deve-se mencionar sua correspondência com Heinrich Weber, na qual a pergunta sobre a possibilidade de identificação dos *cortes* com os *números reais*, e das *classes equivalentes* com os *números naturais* (quando observados sob o prisma de números cardinais), é levantada. A resposta de Dedekind sustenta que, em ambos os casos, existiriam características próprias aos conceitos de *cortes* e de *classes equivalentes* que seriam estranhas aos números, de maneira que a pergunta sobre a *natureza numérica* não constitui um dos seus objetivos primordiais. Com esta recusa, problemas semelhantes ao *problema de Júlio César* enfrentado por Frege permanecem ausentes do horizonte conceitual dedekindiano. Para aproximá-lo de Shapiro, por outro lado, deve-se esquadrinhar a afirmação de que *os números são livres criações da mente humana*, pois pensa Shapiro que "diferentemente de outros logicistas, Dedekind não sentiu a necessidade de

[237] DEDEKIND 2005b, p. 791.

localizar os números naturais e os números reais entre objetos previamente definidos e localizados. Este aspecto crucial da "livre criação" é compartilhado com o presente estruturalismo *ante rem*"[238]. Obviamente, Shapiro não se interessa por "questões exegéticas", e afirma Erich Reck que "o que ele diz acerca de Dedekind permanece esboçado e geral"[239], pois constitui seu interesse argumentar em defesa de sua própria posição. Procurarei assim desenvolver brevemente alguns pressupostos de ambas as aproximações.

Primeiramente a consideração de que os números seriam *livres criações*. Já no ensaio acerca dos números irracionais, afirma Dedekind que a aritmética sempre foi observada como "uma necessária, ou ao menos natural, conseqüência do simples ato aritmético de contar – e contar não seria nada mais do que a sucessiva criação de uma série infinita de inteiros positivos na qual cada indivíduo é definido pelo imediatamente precedente; o simples ato é passar de um indivíduo já criado para seu sucessor a ser criado"[240]. Observa-se então que, a partir deste ato, seguem-se naturalmente as definições das operações de adição e de multiplicação, pois estas se aproximam da maneira produtiva pela qual o próprio ato de contar se constitui. Com suas operações inversas, no entanto, o mesmo não ocorre, pois se a soma ou a multiplicação de dois números inteiros positivos sempre redundam em outro número inteiro positivo, o mesmo não ocorre com a subtração e com a divisão. Para solucionar este problema, pensa Dedekind, foram *criados* os respectivos sistemas dos números inteiros e dos racionais, isto é, tais números foram *criados* para preservar o fecho do sistema numérico sob as operações básicas da aritmética, seja este a possibilidade de se poder obter um número (seja natural, inteiro ou racional) a toda aplicação das operações (excetuando-se a divisão por 0). É razoável supor que, em nenhum momento, se procurava *inventar* um conjunto de novos objetos abstratos para a matemática com o auxílio deste procedimento, mas sim fazer *corresponder* a algum sistema o bom comportamento destas operações (afinal, este sistema deve preservar em sua constituição os sistemas anteriores a partir dos quais fora constituído). A noção de *correspondência* aqui empregada será fundamental para a compreensão da noção

[238] SHAPIRO 1997, p. 175.
[239] RECK 2003, p. 370.
[240] DEDEKIND 2005a, p. 768.

de *criação* utilizada por Dedekind, tanto neste ensaio de 1872, quanto no ensaio de 1888, no qual encontra-se presente a afirmação dos números como "livres criações da mente humana"[241].

Quando inicia o tratamento dos números racionais, Dedekind faz uma analogia destes números com os pontos de uma linha reta, isto é, sugere que os números racionais *correspondem* a este conjunto de pontos. Era evidente para ele, contudo, que o número de pontos existente em uma reta ultrapassava a quantidade de números racionais disponíveis, ou seja, que nem todo *corte* que se possa fazer em uma reta corresponderia a um número racional específico. A noção de *corte* (*Schnitt*) de que ele se utiliza é introduzida da seguinte maneira: qualquer ponto que se considere em uma linha, ou qualquer número observado no sistema dos números racionais, estabelece uma divisão desta mesma linha, ou deste sistema, em duas classes. Estas classes, em princípio, deveriam apresentar este ponto, ou este número, como o maior elemento da primeira classe ou como o menor elemento da segunda, ou seja, deveriam se constituir como cortes *fechados*. O problema ocorre no momento em que se apresentam equações que resultam em cortes *abertos*, isto é, cortes nos quais não se identificaria tal resultado como o menor número da segunda classe ou como o maior número da primeira. A estes cortes corresponderão, portanto, os *números irracionais*, sejam eles os números que explicitarão como uma de suas propriedades a *continuidade* presente na reta ou no sistema real. A *continuidade*, por sua vez, decorre do fato de que, ao se aplicar em uma reta constituída por números racionais e irracionais a operação de corte, não se identifica nenhuma necessidade de se criar um novo sistema numérico. Como estes números já eram de conhecimento matemático (desde os pitagóricos na antiga Grécia), não incorreria em exagero especular que o caráter *criativo* dos irracionais possui os traços de uma sistematização em termos puramente aritméticos, em detrimento da aproximação que se poderia fazer da noção de *invenção*. A fim de aproximar esta noção do estruturalismo proposto por Shapiro, pode-se inclusive considerar que a noção de *criação* de Dedekind se aproximaria daquela linha epistemológica proposta entre as noções de *definição*

[241] DEDEKIND 2005b, p. 791.

implícita e de *construção*[242], bem como que o fato de não se inventarem novos objetos subscreveria a distinção entre uma perspectiva objetal (*places-are-objects*) e uma perspectiva posicional (*places-are-offices*) dos objetos abstratos utilizados pela matemática.

A permanência da diferenciação entre os números irracionais e os cortes efetuados por meio da manutenção do conceito de *correspondência* antecipa em parte a possível aproximação das posições sustentadas por Dedekind daquelas sustentadas por Benacerraf. Para complementá-la, deve-se apenas ressaltar que a caracterização dos números efetuada por Dedekind oferece um largo privilégio ao caráter *ordinal* dos mesmos, em detrimento de uma possível observação de seu caráter cardinal (como Frege pretendera). Em suas palavras,

> "(1) A sequência numérica *N* é um sistema de indivíduos ou elementos, chamados números. Com isto, somos levados a considerar os sistemas como tais, em seus aspectos gerais (§1 do ensaio);
>
> (2) Os elementos do sistema *N* estão inter-relacionados de uma certa maneira; entre eles existe uma determinada relação de ordem que consiste, a princípio, no fato de que para cada número *n* há um outro número definido, *n'*, denominado como o seu sucessor ou como o que lhe é imediatamente posterior"[243].

De modo que não será um problema para Dedekind a determinação ontológica da natureza numérica, pois somente será um número o objeto que se encontrar na *cadeia* dos números, isto é, somente será um número o objeto que possuir um correspondente no sistema dos números naturais. Ironicamente, como o objeto referido pelo nome de Júlio César nela não se encontra, para Dedekind, não haverá problema que a este nome seja anexado.

4.2 Nicholas Bourbaki

A tranqüilidade observada na biografia de Dedekind inexiste na de Nicholas Bourbaki. Poderia até mesmo se dizer que sua trajetória pessoal e intelectual requer um grande fôlego narrativo. Aliado pois ao respeito e à

[242] Erich Reck estabelece uma distinção entre a noção de criação utilizada por Dedekind e a noção de *construção* que será largamente utilizada pelo intuicionismo pouco depois (cf. RECK 2003, p. 385)
[243] DEDEKIND 1967, p. 100.

importância que sua obra matemática adquiriu ao longo do século XX, as polêmicas nas quais seu nome esteve envolvido também foram numerosas. De modo que, para iniciar sua apresentação, Nicholas Bourbaki foi o pseudônimo de um grupo de matemáticos franceses que se reuniram ao começo da década de trinta para escrever um novo e moderno tratado de análise em língua francesa. Influenciados, porém, pelas estruturas algébricas desenvolvidas por Galois, pela teoria dos conjuntos de Cantor (e alguns trabalhos de Dedekind que lhe auxiliam), e pelo tratamento axiomático de Hilbert, acabaram por escrever um faraônico projeto de redefinição de toda a matemática. Intitulado *Eléments de Mathématique*, sua escrita foi distribuída por mais de sete mil páginas (publicadas entre 1939 e 1998), alimentadas pelo desejo de se preservar a *unidade fundamental da matemática*. Pode-se entrever semelhante desejo já no título desta obra, pois, por um lado, ela veicula deliberadamente o termo *mathématique* no singular, quando sua utilização no plural é mais comum em língua francesa; por outro lado, utiliza-se do termo *eléments* em uma clara alusão à obra de Euclides, a qual se constituiu como o paradigma da construção matemática por muitos séculos.

As questões da *unidade* e da *inteligibilidade* da matemática estarão no centro dos interesses do grupo de Bourbaki. De modo que, apesar do pouco espaço reservado para os problemas oriundos da filosofia da matemática em seus textos[244], algumas de suas afirmações permitem uma interpretação orientada para esta direção. E isto bem se aplica ao artigo "L'architecture des mathématiques". Será nas linhas deste artigo que Shapiro vislumbrará a noção de *definição implícita* tão discutida, bem como Benacerraf encontrará um correspondente para um de seus pressupostos, aquele que manifesta a diferença de interesses entre um matemático e um filósofo. Duas teses cujas aproximações poder ser confeccionadas de forma mais simples do que aquelas apresentadas em relação às teorias de Dedekind. A primeira, de fato, vincula-se diretamente à preservação do método axiomático de Hilbert, ou seja, ao fato de uma axiomatização oferecer a descrição de um sistema para quaisquer objetos que ocupem os lugares por ela

[244] Jean Dieudonné afirma, inclusive, que em apenas dois momentos da vasta obra de Bourbaki se poderiam inferir posições filosóficas. Estas se refeririam à sua posição em relação ao princípio de não-contradição e à relação da matemática com a natureza sensível, constituindo-se como *pragmática* em relação àquele e *anti-dogmática* frente a este.

designados, permitindo a afirmação de que quaisquer objetos organizados desta maneira respeitam a esta descrição; ao passo que a segunda depende simplesmente da caracterização da noção de "estrutura" efetuada por Bourbaki na segunda seção de seu artigo, quando afirma que uma estrutura matemática se aplica a um conjunto de elementos cuja natureza *não se encontra especificada*, ou na quarta seção de seu artigo quando afirma que "as estruturas são ferramentas para o matemático. Uma vez discernidas, entre os elementos estudados, as relações que satisfazem os axiomas de uma estrutura de tipo comum, ele dispõe de imediatamente de todo o arsenal de teoremas gerais relativos a estruturas deste tipo"[245]. É suficiente recordar, para tanto, a epígrafe de Richard Martin utilizada por Benacerraf e algumas teses por ele veiculada na segunda e na terceira seção de seu artigo.

A corrente estruturalista, e a noção de "estrutura", por muito tempo foi vinculada ao nome de Nicholas Bourbaki. Consoante Leo Corry, porém, "esta noção possui um duplo sentido no discurso matemático de Bourbaki. Por um lado, versa sobre um esquema organizacional geral, que concebe o conjunto das disciplinas matemáticas em termos hierárquicos. [...] Por outro lado, refere-se ao conceito matemático formal, *estruturas*, sobre o qual este grupo provou alguns resultados em alguns capítulos de seu tratado"[246]. Um estudo sobre a maneira pela qual os mais diversos problemas formulados por Benacerraf e por Shapiro (bem como outras questões deixadas por Dedekind, Cantor, Hilbert e Poincaré) foram trabalhados em sua obra monumental com o auxílio de semelhante noção mereceria para si um estudo específico, em função das muitas técnicas matemáticas envolvidas e das implicações filosóficas que delas se poderiam inferir. A fim de encerrar a aproximação entre as figuras de Dedekind, Bourbaki, Shapiro e Benacerraf, destaco a imagem utilizada por Bourbaki para descrever a geografia da matemática com o auxílio das *correções indispensáveis* proporcionada pela inclusão da noção de "estrutura" (com a intenção de justificar a utilização do título da obra de Kevin Lynch[247] neste terceiro capítulo):

[245] BOURBAKI 1948, p. 42.
[246] CORRY 2001, p. 18.
[247] LYNCH 1999.

> "tal uma grande cidade, cujos subúrbios não param de crescer de maneira um pouco caótica sobre o terreno circundante, enquanto que o centro se reconstrói periodicamente seguindo um plano cada vez mais claro e uma disposição cada vez mais majestosa, jogando abaixo seus velhos bairros e suas ruelas labirínticas, para lançar até a periferia avenidas mais diretas, mais largas e mais cômodas"[248].

[248] BOURBAKI 1948, p. 45..