3.
O Panorama *Ante Rem* e Suas Estratégias Filosóficas

Após o esboço de algumas possíveis resoluções conceituais aos dilemas propostos em WNCNB, Benacerraf afirma que não poderia defender sua visão em detalhes sem dedicar um livro inteiro a este assunto. Sua afirmação torna-se presciente quando constatamos que, na literatura pertinente ao tema, publicaram-se os mais diversos livros não apenas dedicados a estes dilemas de natureza ontológica, como também àqueles enunciados em seu artigo posterior, de forte teor epistemológico. Observa-se pois, sob o signo desta perspectiva, o forte estímulo recebido pelas teorias de matizes *estruturalistas*, devido ao fato de o impasse apresentado basear-se em teorias que ofereceriam um espaço privilegiado para noções de caráter *extensional* (tais como a teoria veiculada por Frege). De modo que procurarei apresentar neste capítulo uma teoria estruturalista em sua singularidade, atentando ao modo pelo qual os mais diversos problemas filosóficos são nela reformulados, desenvolvidos e respondidos. Evidenciei, para tanto, o quadro teórico propagado pelo professor Stewart Shapiro na obra *Philosophy of Mathematics – structure & ontology* (1997), caracterizado como um *estruturalismo ante rem*. Este texto foi destacado, efetivamente, em função da maneira pela qual trabalha conceitualmente o *estatuto ontológico dos objetos matemáticos* e o *estatuto semântico dos enunciados matemáticos* (isto é, o que eles significariam e em qual modelo se processaria a atribuição de seus valores de verdade). A densidade dos princípios aí desenvolvidos mostra-se tão profícua que suas pedras angulares permanecem no livro *Thinking About Mathematics – the philosophy of mathematics*[76], publicado posteriormente.

[76] Dividido em quatro partes, formula sua *perspectiva* em um primeiro momento para, na sequência, lançar-se em direção a uma história da filosofia da matemática na qual são organizados os argumentos de Platão, Aristóteles, Kant e Mill como precursores das três grandes escolas de pensamento que alimentaram o debate intelectual desta disciplina ao final do século XIX e início do século XX: o *logicismo* de Frege e Russell, o *formalismo* de Hilbert e o *intuicionismo* de

3.1 A Matemática e Sua Filosofia – o caráter interpretativo

A observação das modernas questões semânticas permite visualizar em seu conjunto de pressupostos as idéias expostas por Alfred Tarski no artigo "The Concept of Truth in Formalized Languages". Devotado à definição do conceito de *verdade*, logo nas primeiras linhas enuncia-se como seu objetivo "construir, com referência a uma linguagem dada, uma definição materialmente adequada e formalmente correta da expressão 'sentença verdadeira'"[77]. A fim de alcançá-lo, desenvolve-se uma proveitosa distinção entre a linguagem que será analisada, ou a *linguagem-objeto*, e a linguagem que será utilizada para efetuar semelhante análise, ou a *metalinguagem*, de modo a "tornar possível, nas ciências dedutivas, o uso consistente da noção de verdade, evitando a construção de paradoxos"[78]. A relação que esta teoria estabelece com a teoria dos modelos, para Shapiro, sugere uma postura *realista* em duas direções distintas: em *ontologia* e em relação aos *valores de verdade*. Para fundamentar a primeira direção, afirma-se que, como "os termos singulares da linguagem matemática denotam objetos e as variáveis operam sobre um domínio de discurso"[79], poderia se inferir a *existência* destes objetos; ao passo que, para justificar a segunda via, vislumbra-se que "cada expressão bem-formada e significativa possui um valor de verdade determinado"[80], de maneira que bem se poderia deduzir o caráter *independente* do mesmo. Estas duas direções incorreriam em sérios problemas filosóficos, e Shapiro os apresenta neste momento de uma maneira breve. Para o *realista ontológico*, no rastro de Benacerraf, "parece que estes objetos são *abstratos*, no sentido de que eles são causalmente inertes, não localizáveis no espaço e no tempo, e assim por diante"[81], o que dificultaria a consolidação de um *acesso epistêmico* aos mesmos, bem como a explicitação de uma *epistemologia* razoável;

Brouwer e Heyting (o livro do professor Jairo José da Silva (SILVA 2007) também realiza uma apresentação destas escolas). Por fim, esboça um cenário para esta disciplina na contemporaneidade, em vista dos argumentos para a *existência* ou *inexistência* dos números, e dos *estruturalismos* que deles decorreriam.

[77] TARSKI 1983a, p. 152.
[78] AZAMBUJA 2005, p. 25.
[79] SHAPIRO 1997, p. 3.
[80] *Idem*, p. 4.
[81] *Ibidem*.

já para o *realista em valores de verdade*, “parece que asserções como a conjectura dos números-primos gêmeos e a hipótese do contínuo são ou verdadeiras ou falsas, independentemente da linguagem, da mente, ou convenção do matemático”[82].

Uma breve exposição das respostas oferecidas a estas questões explicitariam a existência de dois programas de pesquisa radicalmente distintos, os *realistas* e os *anti-realistas*. Para o pensador que adere ao programa realista, como é o seu caso, haveria de imediato um dilema em relação aos problemas epistemológicos que foram indicados, traduzido nos seguintes termos: ou ele mantém os seus compromissos ontológicos e semânticos enquanto procura desenvolver uma epistemologia satisfatória, ou ele argumenta que a ausência de orientação para estes problemas nos domínios matemáticos seria análoga aos problemas epistêmicos encontrados nos mais diversos discursos científicos. Esta diluição do problema em função de sua conexão com problemas científicos denunciaria uma atitude moderada frente aos mesmos, a qual possui seu conjunto de vantagens e de desvantagens. Por um lado, enfatizar-se-ia a interconexão entre estas duas esferas de discurso, fato que impulsionaria as pesquisas e as soluções de diversos problemas compartilhados por ambas; porém, em contrapartida, por explicitar a dicotomia entre o domínio abstrato da matemática e domínio ordinário da física, o problema da *aplicabilidade* acabaria por se destacar como mais um sério problema a demandar solução. O realista, neste caso, precisaria “dar conta da relação entre o eterno, não-causal e destacado universo matemático e o assunto próprio às ciências e à linguagem cotidiana – o mundo material”[83], isto é, em outros termos, precisaria dar conta da razão pela qual o conhecimento matemático é satisfatoriamente utilizado pelas pesquisas científicas. De modo que, com a intenção de oferecer uma resposta plausível aos dilemas lançados por Benacerraf, Shapiro consagra toda a primeira parte de seu livro ao esboço de sua *perspectiva*, iniciando pela relação entre a prática matemática e a filosofia que a interpreta a fim de concluir que o estruturalismo é uma variação do realismo.

[82] *Ibidem*.
[83] *Idem*, p. 5.

Por um longo tempo, muitos filósofos e matemáticos acreditaram que temas filosóficos, tais como metafísica e ontologia, determinavam a própria prática da matemática – esta é a posição contra a qual argumentará inicialmente Shapiro. Observa-se, então, como a origem de toda a discussão[84], algumas passagens da *República*, nas quais Platão sugeria aos geômetras que estes utilizassem uma linguagem mais apropriada ao objeto de seus estudos. De fato, Platão argumenta em favor do abandono da linguagem dinâmica e construtiva costumeiramente empregada em prol de uma linguagem que compreendesse o caráter eterno e imutável dos objetos matemáticos, isto é, que manifestasse o entendimento de que estes objetos eram uma via de acesso às próprias Formas e, enquanto tal, partilhariam de algumas de suas propriedades. Shapiro pensa que se poderia observar a argumentação platônica como um posicionamento acerca de divergências terminológicas, pois, por exemplo, enquanto Euclides sustentava que entre dois pontos quaisquer alguém pode desenhar uma linha reta, Hilbert sustentava que entre dois pontos quaisquer *há* uma linha reta. A assunção de *existência* implícita na platônica afirmação de Hilbert não seria encontrada de maneira imediata na consideração euclidiana, fato que explicitaria a situação extremamente problemática sob os pontos de vista matemático e filosófico com os quais Shapiro se depara. Uma controvérsia que seria plenamente revigorada ao início do século XX a partir do surgimento da corrente *intuicionista*, a qual problematizou não apenas a utilização de muitos dos teoremas utilizados de maneira corrente na matemática, como também as concepções ontológicas e semânticas de matizes realistas disponíveis até então. De fato, "os intuicionistas tradicionais sustentaram que os objetos matemáticos são construções mentais, e que os enunciados matemáticos devem se referir a estas construções de alguma maneira"[85].

---

[84] Especificamente, deve-se citar a passagem 527a-b (PLATAO 2001) na qual se afirma que: "O certo é que mesmo aqueles que têm pouca prática da geometria não nos regatearão um ponto, a saber, que a natureza dessa ciência está em rigorosa contradição com o que acerca dela afirmam os que a exercitam. [Pois] fazem para aí afirmações bem ridículas e forçadas. É que é como praticantes e para efeitos práticos que fazem todas as suas afirmações, [...] ao passo que toda esta ciência é cultivada tendo em vista o saber, [isto é], o conhecimento do que existe sempre, e não do que a certa altura se gera ou se destrói".

[85] SHAPIRO 1997, p. 22.

Não se deve perder de vista que a argumentação de Shapiro sempre se orientará por estas duas direções complementares – a ontologia e a semântica. Destacam-se, assim, para ilustrar esta polêmica despertada pela corrente intuicionista, as linhas gerais do pensamento de Heyting e de Brouwer, em função de suas posturas determinarem, respectivamente, ambas as direções. Isto é, enquanto o intuicionismo deste se voltaria mais detidamente sobre os enunciados matemáticos, teorizaria o daquele sobre a natureza dos objetos considerados. Isto é, para Shapiro, enquanto Heyting afirma que os objetos matemáticos são dependentes da mente humana devido à sua própria natureza e que sua existência é garantida apenas enquanto eles puderem ser determinados pelo pensamento, Brouwer considera que não há condições de verdade independentes da mente humana para as asserções matemáticas, ou seja, o conhecimento da existência de verdades que ainda não foram experienciadas nos seria ontologicamente negado. Estes princípios teóricos, com efeito, desempenham um papel fundamental na negação da lei do terceiro excluído, bem como na negação de diversos outros resultados matemáticos que nela se ancorariam. Os debates originados a partir daí[86] refletiriam a posição intelectual que deseja fixar previamente a maneira como a matemática deve ser realizada, e denomina-se como *princípio de filosofia-prévia* (*philosophy-first principle*). Sua idéia geral é que "primeiro determinamos do que é que estamos falando e apenas aí determinamos *como* falamos sobre isso, ou *o que* falamos sobre isso. A filosofia possui então a nobre tarefa de *determinar a matemática*"[87].

A partir de suas observações, Shapiro considera que este posicionamento não corresponde aos eventos ocorridos na história da matemática. O axioma da escolha, por exemplo, o qual é largamente utilizado na prática da matemática contemporânea, não teve sua aceitação como decorrência de uma "sanção filosófica", mas em vista da sua necessidade para a demonstração de diversos teoremas matemáticos[88]. Este caso é paradigmático para o que ocorreu com outras

[86] Como, por exemplo, o debate entre Russell e Poincaré em torno das *definições impredicativas*, a discussão em torno do *axioma da escolha*, da definição *extensional* das noções de conjunto e de função etc.
[87] *Idem*, p. 25 [meus grifos].
[88] São oferecidos, inclusive, exemplos de diversos matemáticos que, apesar de o utilizarem de maneira implícita em suas demonstrações, argumentavam contra sua inclusão no quadro de

ferramentas cuja legitimidade foi motivo de debate no começo do século: em nenhum momento houve uma reunião da comunidade matemática para decidir a relevância filosófica das mesmas, tendo o exercício da disciplina consolidado suas regras. Para ilustrar esta situação, Shapiro destaca uma passagem do artigo “Sur le Platonisme dans les Mathématiques” de Paul Bernays (1935), na qual se apontaria que “existem questões abertas, mas deve-se observar que a situação não é tão crítica quanto procuram fazer crer algumas pessoas que falam de crise fundacional. [Pois] é *apenas do ponto de vista filosófico que estas objeções são sustentadas*”[89]. Este posicionamento de Bernays, continua, contrapor-se-ia diretamente ao de Errett Bishop (1975), o qual afirma em seu artigo “The crisis in contemporary mathematics” que “há uma crise na matemática contemporânea, e qualquer um que não tenha notado isto se encontra voluntariamente cego. A crise se deve à nossa negligência dos problemas filosóficos”[90]. Desconsiderando-se os muitos anos que separam ambos os artigos, Shapiro pondera que

> “ambos falam de “crise” na matemática. Para Bishop, o problema estava no uso incontrolado de métodos não-construtivos. Ele pensou que a “crise” era real, mas, principalmente, um descuido por conta de uma negligência para com a filosofia. Para Bernays, ao contrário, a situação era o resultado de várias antinomias e contradições formais, e ele, mesmo assim, não viu uma crise real. Em resumo, enquanto Bishop vislumbrou uma *emergência real* originada por um descuido, Bernays constatou apenas uma crise aparente”[91].

E ambos os diagnósticos decorreriam do fato de se adotar como fundamento intelectual o *princípio de filosofia-prévia*, de modo que se apresentará neste momento seu correlato contraposto, a saber, o *princípio de filosofia-por-último-quando-muito* (*philosophy-last-if-at-all principle*).

Para iniciar a apresentação deste princípio, deve-se caracterizar precisamente o conceito de *epifenômeno*, considerando-se que as diversas concepções filosóficas acerca dos objetos ou dos enunciados matemáticos serão observadas enquanto *epifenômenos que em nada podem contribuir para a matemática*. Encontra-se, pois, no *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, que um *epifenômeno* é “um produto acidental, acessório, de um processo, de um

axiomas por parte de Zermelo em seu artigo de 1904 (disponível em VAN HEIJENOORT 1967). Notadamente, faz-se menção às figuras de René Baire, Émile Borel e Henri Lebesgue.

[89] BERNAYS 1935, p. 52.

[90] BISHOP 1975, p. 507.

[91] SHAPIRO 1997, p. 26-27.

fenômeno essencial, sobre o qual não tem efeitos próprios". Outros dicionários veiculam informações semelhantes, como, por exemplo, a definição veiculada pelo *Merriam-Webster's Collegiate Dictionary*, que nos diz ser ele "um fenômeno secundário que acompanha outro, o qual é sua causa" (*a secondary phenomenon accompanying another and caused by it*); ou ainda, o verbete do *Le Petit Robert de La Langue Française*, que afirma ser ele "um sintoma acessório que se junta aos sintomas essenciais; um fenômeno que acompanha o fenômeno essencial sem ser para nada sua aparição ou seu desenvolvimento; por extensão, fenômeno secundário, de pouca importância" (*symptôme accessoire qui se surajoute aux symptomes essentiels*; *phénomène qui accompagne le phénomène essentiel sans être pour rien dans son apparition ou son développement; phénomène secondaire, de peu d'importance*). Com efeito, todas as definições apontariam para uma absoluta *contingência* das propriedades *epifenomênicas*, de maneira que sua atribuição aos enunciados filosóficos atestaria a profunda *irrelevância* dos mesmos frente às pesquisas matemáticas. Afinal, a matemática possuiria sua própria vida, e esta independeria das teses e sistemas filosóficos.

Esta *irrelevância* é interpretada como o constituinte fundamental do caráter *anti-revisionista* veiculado por este princípio. Isto significa que, enquanto o princípio de filosofia-prévia sustenta que a orientação filosófica *determina* a prática matemática, o princípio de filosofia-por-último-quando-muito consideraria semelhantes concepções como, no melhor dos casos, um *exercício de distração* para os matemáticos, isto é, algo posterior (e desnecessário) à compreensão do trabalho desenvolvido. Para ilustrar esta tese Shapiro recorda a imagem de Reuben Hersh, na qual os matemáticos seriam *platonistas* durante a semana, quando *fazem* matemática, e *formalistas* durante o fim de semana, quando *pensam* sobre a matemática. Em resumo, de acordo com este princípio, "se a filosofia da matemática tem uma tarefa, esta se resume em oferecer uma abordagem coerente da matemática tal como praticada até determinado ponto, [...] e os filósofos devem estar preparados para rejeitar seu próprio trabalho, se os desenvolvimentos matemáticos entrarem em conflito com ele"[92].

[92] *Idem*, p. 28.

Shapiro discorda sobriamente deste posicionamento *anti-revisionista* através da idéia de que, enquanto seres humanos falíveis, os matemáticos podem cometer erros ocasionais, e até mesmo sistemáticos. A partir disto, ele não considera como absurdas as ocasionais "intromissões" filosóficas na matemática, pois a filosofia poderia, inclusive, auxiliar na correção de alguns destes erros. Ele afirma que sua orientação toma por princípio a tese de que os princípios utilizados na matemática assim os são por *default*, e não em função de uma aparente *incorrigibilidade*. Pavimenta-se deste modo uma estrada para o desenvolvimento de sua própria posição filosófica, a qual possuirá como um de seus alicerces a tese de que

> "a filosofia e a matemática estão intimamente inter-relacionadas, com nenhuma dominando a outra. Ninguém pode interpretar a maneira correta de fazer matemática a partir da ontologia verdadeira, nem pode ler a verdadeira ontologia a partir da maneira como a matemática é praticada. O mesmo ocorre para a semântica, epistemologia, e até mesmo para a metodologia"[93].

Como conseqüência deste posicionamento, põe-se Shapiro a avaliar a história de ambas as disciplinas, destacando que não havia um muro intelectual separando os interesses matemáticos dos interesses filosóficos. Constata, inclusive, que muitos dos grandes matemáticos também eram grandes filósofos, notadamente Descartes, Leibniz, Pascal e, durante os séculos XIX e XX, Bolzano, Brouwer, Russell, Whitehead, Hilbert, Frege, Church e Tarski. Esta afirmação bem poderia ser relativizada, à luz de suas análises, em função de que muitos destes pensadores subscreveram alguma forma do princípio de filosofia-prévia (apesar de a filosofia encerrar a possibilidade de auxiliar nas pesquisas matemáticas, oferecendo alguma direção ou orientação). A título de exemplo, discute-se brevemente a circunstância de demonstração da completude para a lógica de primeira-ordem e da incompletude da aritmética. Lembra-se que o teorema de completude era tido como uma simples conseqüência de alguns dos resultados de Skolem, o qual, se possuísse uma compreensão mais generalizada de seu movimento demonstrativo, poderia facilmente prová-lo. Não apenas Skolem não o fez, como fazia parte das afirmações de Gödel que somente o conseguiu fazer em função de suas inclinações filosóficas – realistas –, as quais se contrapunham àquelas veiculadas por Skolem. Em resumo, a filosofia pode ser proveitosa para a matemática quando

[93] *Idem*, p. 34.

não procura determiná-la ou quando não é considerada como um mero *hobby*, afinal, “o filósofo pode dizer algo acerca da matemática, acerca de sua aplicação, acerca sua linguagem, e acerca de nós mesmos em relação a ela”[94].

Assim, de acordo com o entendimento de Shapiro, a tarefa filosófica em relação à matemática poderia ser pensada como uma *tarefa interpretativa*, o que alçaria a *linguagem* matemática ao primeiro plano. Questões sobre o significado das asserções matemáticas, sobre sua forma lógica e sobre a semântica que lhe seria mais apropriada, desta maneira, não procurariam simplesmente determinar *a maneira pela qual* a matemática se processará, mas sim caracterizar de maneira bastante precisa *os termos com os quais* ela trabalhará em suas pesquisas. Para ilustrar sua perspectiva, são apresentados três modos distintos pelos quais os filósofos orientam seus questionamentos. Obviamente, esta não se configura como uma categorização exaustiva, pois, as fronteiras entre estes modos são bastante tênues, mas possibilitam uma interessante organização do pensamento. O primeiro modo se constitui assim das perguntas filosóficas mais gerais, aquelas que versam sobre toda a matemática – “a maior parte destas questões vêm da filosofia geral: temas de ontologia, epistemologia e semântica”[95]. O segundo grupo de problemas reúne os filósofos que almejam interpretar resultados específicos (matemáticos ou até mesmo científicos), fato também destacado por Benacerraf em seu artigo de 1996, no qual propõe uma reflexão acerca de seus dois artigos publicados nos periódicos *Philosophical Review* (Jan/65) e *Journal of Philosophy* (Nov/73). Afirma Shapiro que “recentemente, alguns exemplos vieram da lógica matemática: os teoremas de Löwenheim-Skolem, os teoremas de completude e incompletude de Gödel, a compacidade, e os muitos resultados de independência”[96]. Por fim, reúnem-se as tentativas de se “articular e interpretar teorias e conceitos matemáticos particulares. O trabalho fundacional em aritmética e em análise reside aqui”[97]. Este último modo é o que sublinha de maneira mais explícita o caráter *interpretativo* da filosofia da matemática, no momento em que esquadrinha os *conceitos* e a *extensão* do discurso matemático, ou seja, no momento em que apontaria o que este discurso *diz* e o que aqueles conceitos *são*.

[94] *Idem*, p. 32.
[95] *Ibidem*.
[96] *Ibidem*.
[97] *Idem*, p. 33.

Ressalta-se que a prática matemática não se encontrará ausente das especulações de Shapiro, de modo que não haverá nenhum comentário negativo acerca dela. Isto significa que ele não sugerirá, em momento algum, que se "encerre" ou se "paralise" o trabalho matemático enquanto não se estiver de posse de uma semântica apropriada para todo o discurso utilizado, pois uma afirmação desta natureza subscreveria alguma versão do princípio de filosofia-prévia, tese que é sistematicamente negada. Apropriando-se da imagem construída por Otto Neurath (que fora a epígrafe de Quine em *Word & Object*), também para ele os filósofos da matemática seriam *como marinheiros obrigados a reparar o seu barco em alto mar*. Isto é, para Shapiro,

> "a filosofia da matemática é feita por aqueles que prestam atenção na matemática e que querem compreender seu papel no barco de Neurath. Um matemático que adota uma filosofia da matemática pode ganhar alguma coisa com isso, uma orientação para o trabalho, uma intuição sobre o seu papel ou sobre sua perspectiva, ou ao menos um guia provisório para sua direção – quais os tipos de problemas que são importantes, quais questões devem ser postas, quais metodologias são razoáveis, e o que deve ser proveitosamente ligado"[98].

A comunicação entre estas disciplinas, assim, não será visualizada como uma fusão ou uma mistura, na qual os componentes se diluiriam e perderiam sua singularidade; ao contrário, propõe este professor a metáfora do *casamento* ou da *parceria*. E sob o signo desta metáfora vêm à luz seu *manifesto realista*, o qual se norteia pelas noções de *objeto* e *verdade*.

Dividido em seis seções, o *manifesto realista* de Shapiro procurará apresentar os princípios que orientarão todo o trabalho desenvolvido posteriormente (não apenas sua ontologia e epistemologia, como também as suas aplicações e ramificações). Assim, a partir de *slogans* disponíveis, realistas ou anti-realistas, sua posição intelectual será delineada, desenvolvendo-se no segundo tópico a *metodologia* que melhor se lhe adéqua (seja esta o seu *realismo operacional*). Esta posição será aproximada, na sequência, de uma postura filosófica determinada, o *realismo filosófico*, a qual se caracterizou tradicionalmente como "a visão que postula a existência de objetos matemáticos independentemente dos matemáticos ou a visão que afirma que os enunciados matemáticos possuem valores de verdade objetivos e não-vácuos, também

[98] *Idem*, p. 35.

independentes do matemático"[99]. Efetua-se, então, um pequeno interlúdio pelas teses anti-realistas, com o objetivo de realçar as teorias realistas expostas através da explicitação de alguns contrastes. Após este interlúdio, incorpora-se no *télos* interpretativo da filosofia da matemática de Shapiro uma série de problemas formulados por Quine em sua vasta obra (como a relatividade ontológica e a inescrutabilidade da referência), ainda que as soluções que lhes foram oferecidas sejam negadas em função dos diferentes princípios adotados. Por fim, em função da ênfase dada ao caráter *interno* do *realismo operacional*, discutem-se alguns tratamentos disponíveis para o caráter *externo* que lhe seria contrário, em especial os casos de Carnap, Arthur Fine e Hilary Putnam. De posse deste breve sumário, passo ao desdobramento conceitual de cada uma destas idéias.

Em primeiro lugar, Shapiro afirma que as posturas *realistas* e *anti-realistas* não devem ser consideradas como meros *slogans*, mas como sérios *programas de pesquisa*. De fato, os adeptos de cada uma destas trilhas de pensamento almejam responder a um vasto conjunto de questões filosóficas que já foram anteriormente mencionadas, como, por exemplo, determinar a forma lógica dos enunciados matemáticos e a natureza ontológica de seus objetos, bem como a maneira pela qual se os conhecem e pela qual se aplica o conhecimento matemático ao estudo do mundo físico. Existem, no entanto, "problemas únicos para cada programa, [e] o problema mais profundo para o realismo está no *front* epistêmico: como é possível para os seres humanos saberem alguma coisa acerca do eterno e abstrato domínio matemático?"[100].

Antes de se dedicar a este impasse, no entanto, Shapiro ressalta que as discussões ontológicas e semânticas, para ele, se desenvolverão na formulação de um *realismo em ontologia* e de um *realismo acerca dos valores de verdade*. Bem como que, neste âmbito, apenas Kreisel teria "fixado sua atenção no realismo em valores de verdade, propondo que as questões interessantes e importantes não são sobre os *objetos* matemáticos, mas sobre a *objetividade* do discurso matemático"[101]. De maneira que, para ordenar seus argumentos, ele nos apresenta

[99] *Idem*, p. 44.
[100] *Idem*, p. 36.
[101] *Idem*, p. 37.

uma posição metodológica intitulada como *realismo operacional* (*working realism*), a qual

> "é uma descrição de como a matemática é feita, mas que procura responder bem pouco às questões norteadoras da filosofia da matemática. Ela, por si só, possui pouca ou nenhuma conseqüência para a semântica, ontologia, e para a aplicação da matemática nas ciências. Suas versões mais fortes equivalem à consideração de que a matemática pode (ou deve) ser investigada *como se* sua matéria fosse um reino de entidades abstratas, eternas e com existência independente"[102].

Constituindo-se, pois, como uma descrição da prática matemática[103], diversos são os níveis nos quais se processará semelhante atividade. A fronteira entre cada um deles não será rigidamente estabelecida, de maneira que se poderiam imbricar mutuamente em algumas situações. No primeiro, e mais fraco, dos estágios ocorre um realismo operacional puramente descritivo, no qual são utilizados irrefletidamente pelo matemático todas as ferramentas conceituais que motivaram alguma contenda intelectual, como o terceiro excluído ou as definições impredicativas, por exemplo. Muitas vezes, este aparato é utilizado de forma tão sutil que mesmo o matemático que o utiliza pode se colocar intelectualmente contra ele, como, por exemplo, o caso dos analistas Baire, Borel e Lebesgue em relação ao axioma da escolha. Este será, assim, classificado por Shapiro como o *realismo operacional de terceira pessoa*. Na sequência deste nível encontra-se o *realismo operacional de primeira pessoa*, no qual o mesmo instrumental seria utilizado de maneira mais consciente, apesar de ainda se abster de um compromisso com teorias ontológicas que decorreriam do mesmo, permanecendo, portanto, em um nível puramente descritivo. Em resumo, "tais teóricos concordam que, até agora, eles utilizaram o terceiro excluído, o axioma da escolha etc., e tudo está bem; mas quem sabe o que o futuro reserva"[104]. De maneira que o terceiro estágio escapa do caráter meramente descritivo e é qualificado como um *realismo operacional normativo* no qual "os princípios e as inferências em questão são aceitos como modelos para guiar pesquisas posteriores e como fundamento para criticar outras. Estes matemáticos sustentam, por várias razões, que a matemática *deveria* se adequar à lógica clássica, às definições impredicativas, ao axioma da

---

102 *Idem*, p. 37-38.
103 Noção que não deve ser confundida com a *filosofia da prática matemática* desenvolvida e apresentada por diversos filósofos no livro homônimo editado por Paolo Mancosu (MANCOSU 2008).
104 *Idem*, p. 39.

escolha, e assim por diante"[105], sem subscrever, obviamente, qualquer versão do princípio de filosofia-prévia. Os exemplos para este nível incluem ilustres matemáticos da grandeza de Dedekind e Gödel, por exemplo.

Reafirma-se neste momento o caráter *interpretativo* da filosofia da matemática, com o objetivo de distinguir a maneira pela qual um matemático opera com sua linguagem daquela maneira apresentada por um lógico (como Benacerraf já fizera). Com efeito, os matemáticos nem apresentam seus resultados na linguagem formal da lógica, nem explicitam de maneira prévia as formas lógicas que sustentarão suas asserções. Menciona-se novamente as teses sustentadas por Kreisel, as quais sublinhavam que "é raro para um matemático disputar sobre *inferências individuais*, tal como elas ocorrem na prática. As disputas sérias e contínuas ocorrem costumeiramente no nível dos *axiomas* e das *regras* de inferência"[106]. Estas idéias dão origem à distinção entre duas espécies de argumentos, uma que se debruçaria sobre a correção de uma parte específica do discurso matemático, e uma que se voltaria sobre a maneira pela qual este discurso se encontra codificado e descrito. Neste cenário, o realismo operacional se constituiria como uma posição dentro desta última forma de se argumentar, e se apresenta de maneira parcialmente filosófica, por sugerir de maneira esboçada algum projeto interpretativo. Uma longa nota é então efetuada por Shapiro sobre a atribuição deste adjetivo, a fim de aprofundar sua argumentação:

> "o realismo operacional, mesmo em sua versão normativa, não é completamente filosófico, ao menos, não por si mesmo. Ele é um fraco começo para um programa filosófico. Ele é uma teoria sobre como a matemática é feita e, de maneira realçada, uma teoria sobre como a matemática deveria ser feita [...]. Não há ontologia, epistemologia, semântica, e nenhuma abordagem sobre sua aplicação. O realismo operacional, em todos os níveis, permanece calado sobre estes assuntos. A versão normativa é um enunciado sobre como a matemática *deveria ser investigada*, mas nada mais é acrescentado como a razão para ela ser investigada desta maneira. *O realismo operacional pode oferecer as normas, mas ele não oferece o télos*"[107].

Pode-se então inferir que ele não seria capacitado a realizar todas as tarefas que configuram o âmbito interpretativo de um programa de pesquisa em filosofia da

[105] *Ibidem*.
[106] *Idem*, p. 40.
[107] *Ibidem*.

matemática, ou seja, que a partir dele não se obtém uma forte compreensão do lugar que a matemática ocupa no barco de Neurath.

Shapiro especula que se poderia assim perguntar sobre a maneira pela qual um realista operacional organizaria os *enunciados independentes* da matemática, como, por exemplo, a hipótese do contínuo (CH)[108]. Afinal, uma postura *interna* deveria possuir um espaço reservado para o tratamento de enunciados desta espécie. Ironiza-se, em um primeiro momento, a restrição de um questionamento desta natureza, pois o mesmo desconsidera em seu horizonte qualquer preocupação com a independência de outros enunciados, como a da comutatividade da multiplicação frente à teoria dos grupos, por exemplo; para, em um momento posterior, atribuir semelhante tranqüilidade ao amplo entendimento que se possui desta teoria (dos grupos), pois a mesma não trataria apenas de estruturas isomórficas, mas de classes de estruturas relacionadas. Este tipo de teoria receberá por parte de Shapiro a denominação terminológica de campo *algébrico*. Em contrapartida, observa-se que a existência de enunciados independentes ocorre apenas em áreas particulares da matemática, como na aritmética, na análise ou até mesmo na teoria dos conjuntos, as quais serão consideradas como áreas *concretas* pelos matemáticos. Como este termo possui outra conotação filosófica, e a idéia que se pretende veicular através dele é que cada um destes campos versa sobre uma estrutura singular até o isomorfismo, ele os intitulará como campos *não-algébricos*. Obviamente, diferenciar estes campos constitui apenas uma tentativa de se organizar a prática matemática dentro da terminologia proposta por Shapiro, ainda que porventura sejam utilizadas durante esta organização noções ontológicas que se encontrariam além do realismo operacional a partir do qual foi caracterizada. Desdobrar em detalhes esta diferença, no entanto, ultrapassaria o *realismo operacional*, e constitui matéria suficiente por agora a compreensão de que esta metodologia não faz exigências acerca do valor de verdade de um enunciado independente, isto é, “enquanto os realistas operacionais aceitam a lei do terceiro excluído, eles aceitam o enunciado

[108] Com efeito, Gödel demonstrou em 1938 que, se ZFC (os axiomas de Zermelo-Fraenkel acrescidos do axioma da escolha) é consistente, não se pode demonstrar a falsidade desta hipótese. Já em 1964, Paul Cohen demonstrou que esta hipótese também não pode ter sua verdade asserida a partir destes mesmos axiomas, de onde se segue a *independência* da mesma em relação a um conjunto de axiomas da teoria dos conjuntos.

"CH ou não-CH", mas isto é diferente da asserção de que CH possui um valor de verdade determinado"[109].

De modo que o foco é agora deslocado para uma discussão acerca dos objetos matemáticos, afinal, "os platonistas tradicionais por vezes notaram que, em sua visão, os objetos matemáticos e os objetos físicos são a mesma espécie de coisas"[110] – concepção veiculada pelo trabalho de Michael Resnik sobre a filosofia da matemática de Frege. Para um realista operacional, pensa Shapiro, esta paridade não apenas é potencialmente enganosa, como somente poderia ser aceita no caso de ser limitada a auxiliar a efetivação de uma analogia entre as melhores descrições possíveis para os raciocínios e discursos matemáticos e as melhores descrições possíveis para os raciocínios e discursos ordinários. E isto por duas explícitas razões: em primeiro lugar, o realismo operacional não se constituiria como uma visão ontológica dos *objetos* matemáticos, pois, como se afirmou em diversos momentos, ele é limitado à metodologia; e, em segundo lugar, até poderia ser consentido pelos seus princípios teóricos que os nomes e as variáveis funcionem da mesma maneira em ambos os contextos, o matemático e o ordinário, mas isto dependerá de o discurso ordinário conformar-se aos seguintes itens: extensionalidade, conjuntos e funções arbitrárias, definições impredicativas e axioma da escolha. Tal analogia também destacaria que enquanto a lógica utilizada pela matemática "seria" a clássica (ao menos, para o realista operacional), a lógica do discurso ordinário não se apresentaria de maneira tão clara, em vista de suas diversas ambigüidades, vaguezas e modalidades; isto é, a lógica clássica se *adequaria* melhor ao discurso matemático do que ao discurso ordinário, apesar de ambos terem de se adequar minimamente a ela. A partir daí, conclui-se que a orientação teórica de um realista operacional frente aos objetos matemáticos deverá considerá-los *como se* eles fossem eternos e independentes, e *como se* o seu conjunto de propriedades e relações fosse absolutamente preciso, aproximando-o das concepções platonistas mais tradicionais. Será esta proximidade que permitirá a Shapiro lançar as pedras angulares de seu *realismo filosófico*.

[109] *Idem*, p. 41.
[110] *Idem*, p. 42.

“O filósofo realista ataca os problemas filosóficos postulando a existência de um reino independente de objetos matemáticos e sugerindo que o discurso matemático é objetivo”[111]. A maneira como esta caracterização harmoniza-se com as conclusões de seu primeiro capítulo, as quais sustentavam que não constitui tarefa filosófica determinar os princípios norteadores da prática matemática, é o fio condutor da argumentação de Shapiro neste momento, pois, para ele,

> “o realismo é um tipo de programa que estrutura uma parte do barco de Neurath, aquela que versa sobre a matemática. Ele oferece um arcabouço para endereçar as questões filosóficas sobre a matemática: caracterizar seu assunto (se ela possui algum); abordar como ela é aprendida, comunicada e estendida; e delinear o seu lugar em nossa ampla vida intelectual, na ciência em particular”[112].

Esta espécie de tratamento sublinharia novamente o caráter *interpretativo* de semelhante programa, e, em conseqüência disso, afirma-se a existência de uma forte ligação (*natural, se não inevitável*) entre o realismo operacional e o realismo filosófico. Afinal, em ambos os casos o exercício filosófico permaneceria como um momento subseqüente à prática matemática, isto é, um movimento que não desconsideraria as mais diversas ferramentas que são utilizadas em seus domínios em função de princípios que lhes preexistiriam. Uma forte ligação com a lógica clássica também seria entrevista, pois o realismo filosófico que ali se delineia sugere que (ou aceita a sugestão de que) as variáveis operam sobre um universo de discurso que forneceria as condições de verdade para as sentenças da linguagem. Assim, Shapiro se sente autorizado a considerar o realismo filosófico como “a filosofia padrão sugerida pela combinação do realismo operacional e da teoria lógica *standard*”[113].

Enquanto um programa de pesquisa em filosofia da matemática, uma série de questões apresenta-se ao realista filosófico, de maneira que Shapiro nos apresenta uma agenda de semelhante teórico. Em primeiro lugar, faz-se necessária uma pesquisa acerca da natureza dos objetos matemáticos, pois serão eles que determinarão os valores de verdade dos diversos enunciados sustentados, bem como será sobre eles que as variáveis da linguagem operarão. Pospor-se-ia à

---

[111] *Idem*, p. 44.
[112] *Ibidem*.
[113] *Ibidem*. Devo ressaltar que esta passagem efetuada por Shapiro será fortemente atacada ao longo da resenha escrita por Øystein Linnebo (LINNEBO 2003).

determinação destes elementos então, enquanto segundo item de pesquisa, todo o problema epistemológico envolvido não apenas em sua aprendizagem, como também na expansão do conhecimento que com eles se relacionam. Faz-se aqui uma pequena nota acerca do artigo "Mathematical Truth" publicado por Paul Benacerraf em 1973, no qual se sustenta a tese de que um intelectual realista não poderia sustentar suas inclinações realistas ao mesmo tempo em que se responde às necessidades ontológicas e epistêmicas. Como nenhum organismo biológico possuiria um nexo causal com o eterno e abstrato domínio matemático, e este é o modelo mais adequado para a veiculação do conhecimento científico, uma abordagem que não o respeite incorreria necessariamente em sérios problemas. Shapiro afirma que "embora a teoria causal do conhecimento não seja a única, nem mesmo a mais proeminente, epistemologia contemporânea, o desafio de Benacerraf permanece"[114], fato que o faz destacar a querela epistemológica como a mais decisiva para o desenvolvimento de suas teorias (apesar de não se constituir como a primeira a ser trabalhada). Um terceiro problema a se considerar, deste modo, seria a *aplicabilidade* do discurso matemático ao científico, o qual se apresenta, de acordo com suas palavras, como uma "faca de dois gumes". Pois, por um lado, sua íntima conexão poderia configurar a existência de uma semântica uniforme para ambas as linguagens, de maneira que muitos dos problemas do realismo poderiam, em princípio, ser bem solucionados (o argumento da indispensabilidade da matemática apresentado por Quine e Putnam se encaixa nesta descrição); e, por outro lado, a partir desta conexão, o filósofo realista deveria oferecer uma abordagem exata da maneira pela qual esta aplicabilidade ocorre, afinal, os universos de discursos seriam radicalmente distintos.

O argumento de Shapiro retorna então às considerações sobre a semântica derivada dos trabalhos de Tarski e à maneira pela qual ela se relacionaria com as ambições de um filósofo realista. Afinal, para ele, é a partir da especificação dos elementos de uma ontologia e das extensões (talvez intensões) de seus predicados, relações e funções que se poderia derivar uma teoria dos modelos, cujos estudos almejam desenvolver as mais diversas noções lógicas (preservando a centralidade

[114] *Idem*, p. 45.

da noção de "verdade em um modelo"). Apesar de iluminar os mais diversos problemas nos quais o filósofo realista deve concentrar seus esforços, com efeito, estes estudos empreendidos pela teoria dos modelos não tratariam de noções semelhantes à *satisfabilidade* ou *referência*, bem como do problema da compreensão da linguagem matemática (e talvez até da compreensão da linguagem em geral). Assim, "mesmo se a semântica da teoria dos modelos for o principal alicerce para o realismo filosófico, apenas por si é um alicerce fraco. [...] A tarefa deste programa é dizer mais precisamente qual é o domínio de discurso e como nós podemos conhecer algo acerca dele"[115]. Mesmo Tarski pensava que esta abordagem não solucionaria os amplos problemas filosóficos, e Shapiro se refere a algumas passagens de seu artigo "The semantic conception of truth and the foundations of semantics" (1944) não apenas para ilustrar sua posição como também para poder determinar a que desenvolverá na sequência. De modo que, em suas palavras,

> "como um realista operacional, assumo que as linguagens formais extraem a linguagem e as formas lógicas da matemática. Além disso, assumo que estas linguagens são compreendidas – de alguma maneira. A semântica da teoria dos modelos é erigida nestas linguagens, e em termos destas linguagens. Posto de outra forma, a partir do realismo operacional observa-se que a linguagem formal *standard* captura algo acerca da linguagem matemática real. O filósofo realista toma ao menos uma destas linguagens como sendo sobre o universo matemático. O trabalho de Tarski ofereceria então as noções semânticas relevantes em uma maneira notadamente direta e não-problemática"[116].

Shapiro acrescenta por fim que a semântica oferecida pela teoria dos modelos não caracteriza completamente o realismo filosófico. Afinal, não apenas seria possível a derivação de teses anti-realistas a partir de seu arcabouço conceitual, como também não haveria uma sanção explícita das conclusões extraídas por um realista operacional. Como se afirmou ao início da exposição, a teoria dos modelos o sugeriria em função de compartilharem os mesmos princípios meta-teóricos, isto é, em função de o realismo filosófico também destacar a *linguagem-objeto* da *metalinguagem*, ou seja, não confundir o esquema conceitual *no qual* é formulado com aquele *com o qual* se compromete. Também a teoria dos modelos permitiria a visualização de uma distinção entre ramos algébricos e não-algébricos, os quais se diferenciariam a partir da existência de

[115] *Idem*, p. 47.
[116] *Idem*, p. 48.

uma interpretação "pretendida" (ou de uma equivalência entre várias interpretações "pretendidas"), ou de uma vasta classe de modelos satisfatíveis (não necessariamente equivalentes entre si mas relacionados). A vantagem entrevista na preservação destas categorias consiste no fato de que, para Shapiro, "não se pode esperar responder todas as questões filosóficas sobre todos os assuntos de uma vez por todas, mas se pode reivindicar algum progresso em filosofia e em ontologia, alguma dissolução de *puzzles*"[117]; a sua desvantagem, em contrapartida, seria a possibilidade de se identificar e regressar em direção à *metalinguagens* indefinidamente. Uma desvantagem que seria evitada por intermédio da estipulação de uma *língua-materna* na qual o discurso se processe (parafraseando o requisito de Quine), e, para apresentá-la de maneira consistente (e definitiva), observa-se a longa passagem do formalista Haskell Curry na qual se afirma que:

> "sempre que se fala sobre uma linguagem se diz que nós devemos fazê-lo em uma segunda linguagem. Neste caso, a primeira linguagem é chamada de *linguagem-objeto*, a segunda de *metalinguagem*. Se então alguém fala acerca da metalinguagem, deve fazê-lo em uma terceira meta-metalinguagem e assim por diante. Mas esta maneira de falar ignora um fato particular: isto é, que qualquer investigação [...] é conduzida não em uma metalinguagem arbitrária, mas na *linguagem comunicativa que é mutuamente compreendida pelo falante e pelo ouvinte*. Chamarei esta linguagem de *linguagem-U*, isto é, a linguagem que está sendo usada [...]. Não é suficiente dizer que a linguagem-U é o inglês [...], [pois] ela é algo em crescimento. Enquanto pesquisamos nós a modificamos, a ampliamos e a refinamos [...]. Nunca podemos transcendê-la – o que quer que estudemos nós o fazemos por meio dela. Ela não pode ser exaustivamente descrita, e pode incorrer em contradições se não for usada com cuidado [...]. Segue-se do que foi dito que não pode existir algo como uma meta-linguagem-U"[118].

Curiosamente, dentre as notas conceituais da *linguagem-U* apresentada por Curry, Shapiro se esquece de mencionar que, nesta linguagem, "sempre há uma vagueza inerente; mas nós podemos obter, através de uma hábil utilização, algum desejado grau de precisão por um processo de aproximação sucessiva"[119], afinal, "esta noção corresponde ao que nós consideramos quando falamos em *linguagem ordinária*"[120]. Independentemente desta ressalva, para Shapiro "a linguagem-U

[117] *Idem*, p. 49-50.
[118] CURRY *apud* SHAPIRO 1997, p. 51.
[119] CURRY 1950, p. 12.
[120] *Ibidem*.

contém a linguagem da matemática, e ainda a utilizamos para tentar efetuar algum progresso nas questões filosóficas. O círculo não é vicioso"[121].

Na sequência destas considerações efetua-se um *interlúdio* por teses anti-realistas, considerando-se que elas também preservariam o realismo *operacional* em função de ser "a matemática real que deve ser interpretada e explicada, e não o que um filósofo diz que ela deve ser"[122]. Afinal, tal como o realismo filosófico, o anti-realismo é descrito como um programa de pesquisa que procuraria traçar o lugar da matemática no barco de Neurath, mas sem postular um realismo em ontologia ou em relação aos valores de verdade. A motivação identificada para os seus recentes desenvolvimentos é a ausência de uma epistemologia razoável que se adéqüe ao conjunto de teses ontológicas disponíveis do ponto de vista realista. De maneira que o objetivo de muitos destes programas é "mostrar como sua epistemologia pode subscrever uma matemática rica o suficiente para a ciência, e sem introduzir noções tão problemáticas quanto aquelas do realismo. Em resumo, o objetivo é reproduzir uma rica matemática ao mesmo tempo em que mantém a epistemologia tratável"[123]. Shapiro então menciona alguns dos intelectuais que o subscrevem (como Hellman, Chihara e Dummett), e as teses gerais que são por eles defendidas, como a consideração da matemática como a variação de um "conhecimento lógico" ou a substituição da noção de *verdade* matemática pela noção de *prova* (ou *assertividade garantida*), por exemplo. Na sequência destas considerações gerais, considera-se determinados problemas levantados pelo trabalho teórico de Quine, notadamente a relatividade ontológica e a inescrutabilidade da referência, as quais relacionam-se com o *slogan* de que de que *ser é ser o valor de uma variável*.

Este *slogan* condensaria a relação existente entre a ontologia e o escopo de variáveis ligadas. Para Shapiro, as concepções de Quine indicam a idéia de que "um objeto existe, ou está em nossa ontologia, apenas no caso em que se encontra no escopo de uma variável ligada"[124], e isto significa que somente se poderia falar da referência de um termo no caso em que se faz possível sua substituição por

---

[121] SHAPIRO 1997, p. 51.
[122] *Ibidem*.
[123] *Idem*, p. 52.
[124] *Idem*, p. 53.

uma variável existencialmente quantificada. Este pensamento, continua, apesar de funcionar relativamente bem para as linguagens apresentadas em textos de lógica, não se adequaria à linguagem ordinária, pois a ontologia do homem comum seria vaga e desordenada quando comparada àquela à qual se referiria o discurso lógico, no que Shapiro identifica a inutilidade apontada por Curry de se descrever a linguagem-U[125]. Assim, se o quantificador existencial é uma boa maquilagem para a vaga noção de existência na linguagem natural, a recomendação de Quine para os “ontologistas” seria a de regimentar ao máximo sua linguagem, traduzindo para o idioma da lógica o máximo de sentenças da linguagem natural. Esta tradução não apenas possibilitará um acesso mais direto à ontologia que se está considerando, como também permitirá um esclarecimento da própria linguagem lógica, alcançando-se assim uma clara economia conceitual. O caso de uma teoria que, ao substituir suas variáveis sobre números por variáveis sobre conjuntos, reduziria o seu compromisso ontológico apenas à existência de conjuntos, é um bom exemplo para a economia de que se trata. Em função das muitas maneiras em que se pode regimentar a mesma parte de uma linguagem, as teses da relatividade ontológica e da inescrutabilidade da referência surgiriam neste momento, e “como a regimentação é similar à tradução da linguagem natural para o idioma da lógica, as teses em questão seriam corolários da indeterminação da tradução”[126].

Obviamente, para Shapiro, tudo isso ainda ocorre no nível de um realismo operacional, pois o instrumental com o qual os matemáticos trabalham cotidianamente em sua disciplina, ao contrário dos compromissos ontológicos efetuados por suas teorias, não se encontra sob a suspeita filosófica. Os realistas operacionais *compromissados* procurarão preservar o fato de que, mesmo após a regimentação de sua linguagem, ainda existirão objetos matemáticos (números ou conjuntos) abrangidos pelas variáveis, de modo que um realismo operacional compromissado seria “uma decisão para *usar* a linguagem matemática e tomar ao menos uma de suas partes diretamente, sem reformular a ontologia em termos não-matemáticos”[127]. Logo, de acordo com Shapiro, após sua regimentação

[125] Observei, no entanto, que a *vagueza* da linguagem-U foi devidamente apontada por Curry como uma de suas características e voluntariamente omitida por Shapiro, talvez, em função de ele querer incorporar em seu interior boa parte do instrumental matemático.
[126] *Ibidem*.
[127] *Idem*, p. 54.

completa, a linguagem seria, no entender de Quine, uma linguagem extensa, de primeira ordem e que empregaria a lógica clássica. Este conjunto de atribuições suscitará uma longa discussão na literatura pertinente, pois outros intelectuais concordarão em utilizar lógicas de segunda-ordem ou uma terminologia modal, por exemplo, e Shapiro deixará claro que, independentemente da opção adotada, a escolha dos recursos desta linguagem regimentada interferirá diretamente nos compromissos ontológicos da teoria – isto é, nos objetos considerados como o universo de discurso sobre o qual as variáveis ligadas operam –, alterando-os e complicando-os por diversas vezes. De maneira que, para ele,

> "a partir da perspectiva interna do realismo operacional (compromissado), pode-se especificar quais *espécies* de entidades matemáticas existem, mas haveria um limite para a habilidade de circunscrever a *extensão* destas entidades ou, em outras palavras, haveria um limite para a habilidade de se especificar o *escopo* de tais variáveis"[128].

A introdução da noção de *universo de discurso* permite a Shapiro considerar o domínio de atuação das variáveis como sendo especificado pela *semântica*, a qual é o componente central da teoria dos modelos. Esta passagem faz com que a discussão novamente se mova do *realismo operacional* em direção ao *realismo filosófico*, pois as teses em questão não apenas seriam significativas em seu contexto, como também seriam substancialmente corretas – por exemplo, "a relatividade ontológica e a inescrutabilidade da referência começam com o fato de que alguém pode oferecer diferentes modelos para a mesma teoria, e que em alguns casos não haveria fatos disponíveis para decidir qual o correto"[129]. Pois bem, considerando-se o fato de que a escolha dos elementos da linguagem causará alguma interferência nos compromissos ontológicos sustentados por uma teoria, e que existe uma distinção semântica entre a linguagem-objeto e a metalinguagem (amparadas por uma linguagem-U), Shapiro pensa que não haveria uma linguagem-objeto capaz de determinar sua ontologia de maneira isolada, principalmente porque, em matemática, somente se determinariam a referência e a ontologia até a identificação de isomorfismos entre sistemas distintos. Neste caso, "no arcabouço do realismo filosófico, a ontologia de uma linguagem-objeto é tipicamente especificada na metalinguagem (ou linguagem-U). Se a

[128] *Ibidem*.
[129] *Idem*, p. 55.

metalinguagem é suficientemente regimentada, então ela possui sua própria ontologia, os valores de *suas* variáveis"[130]. O pressuposto desta tese é que se poderiam expandir os compromissos ontológicos de uma teoria a partir da adoção de uma meta-teoria, cuja descrição não seria semelhante àquela oferecida à linguagem-objeto. Diferentemente da explicitação do caráter interpretativo de uma filosofia da matemática, Shapiro realça neste momento que "um aumento na ontologia a partir do movimento em direção a uma metalinguagem adequada à linguagem-objeto, ou do realismo operacional para o realismo filosófico, não é inevitável"[131], pois existiriam outras maneiras de se desenvolvê-lo em vista das diferentes atribuições conceituais que seriam possíveis a uma linguagem regimentada. Agora, porém, sua argumentação procurará encontrar um lugar para aquilo que é *externo* ao trabalho matemático (ao *realismo operacional* portanto), e seu programa *realista*, tais como os diversos programas anti-realistas, encontram-se aí alojados.

A diferença entre o que é *interno* e o que é *externo* ao trabalho matemático, para Shapiro, é o caráter *interpretativo* de seus argumentos. Enquanto o *realismo operacional* adotaria boa parte dos princípios metodológicos que são utilizados sem profundas indagações, caberia ao *realismo filosófico* determinar qual seria o lugar do pensamento matemático no barco de Neurath, bem como formular uma resposta a questionamentos de natureza filosófica (como o maneira pela qual os acessamos cognitivamente). Shapiro afirma que esta distinção entre o que é interno e externo a uma disciplina é passível de identificação nas obras de outros pensadores, obviamente, a partir de outros critérios. Quase sempre, contudo, seria veiculada uma imagem depreciativa do que é externo, rejeitando-o por vezes como ilegítimo ou mesmo incoerente. De tal maneira que ele apresentará as distinções de Rudolf Carnap (entre as questões internas e as pseudo-questões externas), as de Arthur Fine (entre a atitude ontológica natural e o realismo), e as de Hilary Putnam (entre o realismo interno e o realismo metafísico), com o intuito de iluminar por intermédio do contraste a sua própria distinção conceitual, detalhando as notas do critério por ele adotado. Uma importante diferença, no entanto, deve ser imediatamente realçada, seja esta

[130] *Idem*, p. 56.
[131] *Idem*, p. 57.

a de que a argumentação de Shapiro oferece uma *legitimidade* ao que é externo ao trabalho matemático, pois uma de suas conclusões ao final do primeiro capítulo já expressava o fato de que "a matemática e sua filosofia são disciplinas interconectadas, mas autônomas"[132].

Assim, de acordo com Carnap, perante uma questão semelhante a "existem números?", constitui a tarefa do filósofo ou do matemático oferecer um arcabouço lingüístico provido de uma sintaxe rigorosa e explícita, juntamente de suas regras de uso. Isto significa que, na compreensão de Carnap, o tratamento de questões lingüísticas precederia o tratamento de questões ontológicas, como uma condição para sua solução. No caso da matemática, prossegue, este arcabouço lingüístico se assemelharia a união entre uma linguagem formal e um sistema dedutivo, por exemplo, no caso dos axiomas de Dedekind-Peano em relação à aritmética, e afirma Shapiro que "em um sentido, a noção de arcabouço lingüístico é um precursor da regimentação no programa de Quine"[133]. Sua argumentação então sugere que, uma vez formulado o arcabouço lingüístico de uma teoria, apenas dois tipos de questões ontológicas poderiam subsistir, ou melhor, seriam admissíveis apenas dois sentidos para as questões ontológicas similares à anteriormente mencionada. O primeiro sentido – diz-se o sentido *interno* – remeteria tal questão diretamente às regras definidas pelo arcabouço considerado, de modo a transformar a existência dos números em uma verdade analítica. Já o segundo sentido – diz-se o sentido *externo* – procuraria pensar sobre a verdade acarretada por tal problema, podendo denotar tanto a pergunta sobre se os números *realmente existem*, quanto o objetivo de saber se eles existem *independentemente* da mente, da linguagem ou de qualquer arcabouço lingüístico. Este sentido, aliás, se encontraria presente em boa parte da filosofia tradicional, e, nos termos de Shapiro, almejaria determinar se um arcabouço acurado descreve um domínio de discurso. Por extravasar o arcabouço lingüístico, Carnap considera as questões colocadas desta maneira como *pseudo-questões*, pois a simples aceitação de um arcabouço lingüístico não deveria, em princípio, implicar uma doutrina metafísica acerca dos objetos que são por ela considerados. "Em outras palavras, a boa questão teórica deve ser *interna* a um arcabouço lingüístico mais ou menos

[132] *Idem*, p. 58.
[133] *Ibidem*.

explícito. Questões ontológicas tradicionais falhariam miseravelmente neste teste"[134].

Neste momento, Shapiro relaciona a recusa das questões externas por parte de Carnap com a ausência de uma distinção semelhante à sua naquilo que tangencia a relação entre matemática e filosofia. Isto significa que, para ele, o que Carnap recusa quando recusa as questões externas é uma *determinação* da matemática a partir do pensamento filosófico, isto é, há uma recusa do *princípio de filosofia-prévia*. De fato, para Carnap, frente a um arcabouço lingüístico bem definido, "a única questão que podemos fazer é se aceitamos ou adotamos tal arcabouço"[135], ou seja, uma questão de matriz pragmática, e os programas filosóficos almejariam, em princípio, extrapolar tanto as questões internas quanto as pragmáticas. Shapiro concorda com a recusa de Carnap, caso ela se relacione com a recusa de uma precedência do discurso filosófico perante a prática matemática. Para ele contudo "não se segue da rejeição do princípio de filosofia-prévia a inexistência de uma perspectiva legítima a partir da qual possamos fazer algumas das tradicionais questões filosóficas"[136]. Ou seja, "na presente perspectiva, o filósofo encontra-se em algum lugar *no* barco de Neurath e tenta iluminar outra parte"[137].

Algo semelhante ocorreria na distinção proposta por Arthur Fine entre a atitude ontológica natural[138] e o realismo (ou anti-realismo), isto é, ela também se fundamentaria em uma recusa do princípio de filosofia-prévia, seja esta uma recusa da *determinação* da prática matemática pelo discurso filosófico. As bases nas quais esta recusa se processaria, no entanto, seriam ligeiramente diferentes daquelas sustentadas por Carnap. A começar pela atitude "natural" de tornar facultativo às ciências a asserção sobre os objetos que existiriam ou não. Como a linguagem com a qual os cientistas operam em suas pesquisas não se encontra plenamente regimentada, alguma interpretação lhe seria necessária, fato que possibilita a aproximação efetuada por Shapiro entre esta atitude e o seu realismo operacional, pois, assim como este, a atitude descrita por Fine não seria

[134] *Idem*, p. 59.
[135] *Idem*, p. 58.
[136] *Idem*, p. 60.
[137] *Ibidem*.
[138] No original, *natural ontological attitude* ou NOA.

absolutamente interna às pesquisas científicas. Não ser absolutamente interna e envolver algum tipo de interpretação, no entanto, significa que algum outro tipo de interpretação a esta atitude ontológica será recusado neste cenário, e este tipo será fundamentado na metáfora interno/externo. Afinal, "o realista permanece fora da arena assistindo a continuidade do jogo e então julga (a partir do ponto de vista externo) o que acontece. Isto é, ele diz, *sobre* alguma área externa ao jogo"[139]. Ocorre, contudo, uma consistente ponderação de Shapiro acerca desta recusa do realismo por parte de Fine, no momento em que afirma que

> "muitas das teses que Fine diz serem constitutivas do realismo são simples conseqüências da NOA. Por exemplo, nós lemos que 'em primeiro lugar, o realismo sustenta que há um mundo definido; isto é, um mundo que contém entidades com relações e propriedades que são em larga medida independentes dos atos e agentes humanos [...]. Em segundo lugar, de acordo com o realismo, é possível obter uma parcela substancial de informação independente e confiável acerca deste mundo e de suas características, informações não restritas, por exemplo, apenas a características observáveis'. Novamente, é difícil imaginar um trabalho científico, e um defensor do NOA, que negue isto"[140].

Por fim, Fine considera que a interpretação possui um lugar na ciência desde que *oriunda de dentro*, ao passo que Shapiro considera que a pergunta *dentro do que?* permaneceria irresoluta.

Apresenta-se então a última instância desta metáfora através dos trabalhos de Hilary Putnam, os quais diferenciam o *realismo interno* (ou *internalismo*) de seu "primo feio", o *realismo metafísico*. Putnam caracterizaria o seu realismo como interno a *todo o nosso esquema conceitual*, constituindo-se este como todo o conjunto de conceitos que utilizamos para organizar o mundo. Shapiro ironiza esta caracterização perguntando-se como se pode imaginar algo externo a *isto*, mas Putnam imagina e, de acordo com ele, "a principal tese do realismo metafísico é que 'o mundo consiste de alguma totalidade fixada de objetos independentes da mente. Há exatamente uma verdade e uma descrição completa da *maneira como o mundo é*'"[141]. Para este realismo, haveria uma maneira de

[139] FINE *apud* SHAPIRO 1997, p. 62.
[140] SHAPIRO 1997, p. 62.
[141] *Idem*, p. 65.

conceber a realidade completamente independente de quem a observa[142], e a rejeição de semelhante tese por parte de Putnam implicaria como corolário, no entender de Shapiro, uma relatividade ontológica – afinal, "sustentar que a pergunta *de quais objetos consiste o mundo?* é uma pergunta que apenas faz sentido *dentro* de uma teoria ou descrição é uma característica do realismo interno"[143]. Esta *relatividade ontológica*, evidentemente, retira da lista de problemas filosóficos uma boa caracterização da noção de *correspondência*, pois "um signo que é atualmente empregado por uma comunidade de usuários pode corresponder a objetos particulares *dentro do esquema conceitual destes usuários*"[144], fato que se aproxima das concepções de Fine e de Carnap em simultâneo, bem como lembra a sugestão de Benacerraf ao final de WNCNB (apresentada no capítulo anterior). Acrescente-se a esta idéia a crítica de Putnam de que o metafísico realista não possui acesso epistêmico aos objetos cuja correspondência ele apregoaria e surgem no horizonte duas concepções de Shapiro. A primeira é que a distinção apresentada por Putnam não disputa, em sentido estrito, com a distinção entre o realismo operacional e o filosófico, pois muito do que é afirmado acerca do *internalismo* ressoa no estruturalismo que será desenvolvido; e a segunda é que o estruturalismo "possui interessantes ramificações sobre o que deve ser um *objeto* matemático. E já é tempo de voltarmos nossa atenção para essa direção"[145].

3.2 A Filosofia e Sua Matemática – um exame das estruturas

Shapiro então procura refinar e sofisticar o aparato conceitual com o qual a perspectiva delineada em seu *manifesto realista*, oriundo da relação entre *a matemática e sua filosofia*, lhe possibilita trabalhar. Uma exposição sucinta desta perspectiva permite entrever que a tarefa da filosofia da matemática,

[142] Pode-se recordar da *epistemologia sem sujeito conhecedor* formulada por Karl Popper em alguns ensaios de sua obra *Conhecimento Objetivo*, notadamente "Epistemologia sem um sujeito conhecedor" e "Sobre a teoria da mente objetiva" (POPPER 1975).
[143] PUTNAM *apud* SHAPIRO 1997, p. 65-66.
[144] *Idem*, p. 66.
[145] SHAPIRO 1997, p. 67.

independentemente do nível adotado[146], é uma tarefa *interpretativa*, isto é, que não é atributo constitutivo de sua essência a *determinação* da prática matemática em vista de quaisquer pensamentos filosóficos. Em seus termos, a subscrição de um *princípio de filosofia-prévia* (*philosophy-first principle*) deve ser frontalmente combatida, assim como a radicalização de um *princípio de filosofia-por-último-quando-muito* (*philosophy-last-if-at-all principle*). Em sua máxima expressão, deve a filosofia da matemática combinar a um *realismo operacional*, ou seja, a uma aceitação pragmática das ferramentas utilizadas pelos matemáticos na demonstração de seus teoremas, algum programa de pesquisa filosófico, o qual possibilitaria a orientação do trabalho intelectual desenvolvido (no rastro do exemplo anteriormente destacado de Gödel e Skolem em relação aos resultados de incompletude). Apesar de sua aparente contingência, pois um realismo operacional possui sua própria gradação e, em nenhum dos graus, almejaria explicitar uma postura filosófica[147], Shapiro afirmará que uma natural continuidade entre o realismo operacional e o seu *realismo filosófico* é passível de observação, pois a maneira como este programa filosófico desenvolve os mais amplos questionamentos, tais como o lugar da matemática no barco de Neurath, a maneira como se apreende, se comunica e se expande seu pensamento, e a natureza intrínseca de seus objetos, adéqua-se ao silêncio manifestado por aquele diante de semelhantes perguntas. E é esta adequação que o permitirá desenvolver uma ontologia acerca do conceito de *estrutura*, e uma *epistemologia* sobre a noção de *referência* a partir de agora. Para a primeira etapa deste processo, então, Shapiro subdividirá seu capítulo em seis etapas, com a caracterização ontológica das noções de *objeto* e de *estrutura* seguindo-se a uma rápida abertura conceitual.

---

[146] Observou-se que o trabalho interpretativo pode se efetuar em três níveis diferentes, sejam eles: um nível mais amplo, no qual se procura compreender o lugar da matemática no barco de Neurath, bem como as questões filosóficas mais gerais; um nível mais restrito, no qual se investiga o impacto e as consequências de resultados matemáticos mais pontuais (exemplificou-se com os teoremas de Löwenheim-Skolem e os de Gödel); e, por fim, um nível intermediário, no qual o pensamento se debruça sobre áreas particulares da matemática, como no caso dos fundamentos da aritmética, por exemplo.

[147] Esta gradação refere-se, com efeito, à possível combinação entre o ato de aceitar o instrumental matemático e o compromisso com as suas conseqüências. Observa-se, assim, um realismo operacional, subdividido em uma expressão do ponto de vista da terceira pessoa e em uma expressão de primeira pessoa, em que haveria uma simples adequação do matemático ao instrumental existente, graduando-se em relação ao compromisso perante suas conseqüências; e um realismo operacional normativo, o qual procuraria atestar como a matemática *deveria ser desenvolvida*.

Segue-se então a delimitação de algumas teorias da estrutura, bem como uma caracterização da matemática como uma disciplina absolutamente estrutural. Por fim, expõe-se um breve adendo no qual se relaciona as noções de estrutura e de função através de tese funcionalista em filosofia da mente.

A partir da impossibilidade de se iniciar um trabalho intelectual isento de uma herança conceitual, Shapiro caracteriza a primeira seção de sua discussão acerca das estruturas como uma seção *dialética*. E justifica-se afirmando que "toda teoria, filosófica ou não, deve tomar algumas noções como garantidas. [...] À medida que avançamos, algumas destas noções são refinadas e até mesmo modificadas. [...] Ao final, os enunciados iniciais devem ser vistos como primeiras aproximações"[148]. Deste modo, o fato de o seu programa filosófico expressar um realismo em ontologia e um realismo acerca dos valores de verdade dos enunciados matemáticos é novamente realçado, pois torna explícito o decisivo papel que as noções de *objeto* e de *objetividade* desempenharão ao longo de seu pensamento. Outra característica apresentada de imediato é o contraste usualmente estabelecido entre o *estruturalismo* e o *platonismo*, considerando este como a visão ingênua de que "a *essência* de cada número pode ser asserida sem a referência aos outros números"[149]. Uma maneira ainda mais inocente de se interpretar esta independência ontológica entre os números indica que uma pessoa é capaz de conhecer todas as propriedades envolvidas na caracterização do número 2, por exemplo, e não conhecer absolutamente nada sobre o número 6 (como o fato de ser o primeiro número perfeito). Esta "independência" será imediatamente recusada por Shapiro pela afirmação da tese de que "a essência de um número natural é suas *relações* com outros números naturais"[150], ou seja, que de acordo com sua acepção a aritmética possui como tema "uma estrutura singular abstrata, o padrão comum à qualquer coleção infinita de objetos que possui uma relação de sucessor com um único objeto inicial e que satisfaz o princípio de indução (de segunda ordem)"[151]. De posse desta definição, Shapiro observa algumas equivocidades no próprio texto de Platão que subscreveriam as distintas opiniões acerca do objeto de estudo da aritmética.

[148] *Idem*, p. 71.
[149] *Idem*, p. 72.
[150] *Ibidem*.
[151] *Ibidem*.

Ele atenta inicialmente ao diálogo *Górgias*, no qual Platão distingue duas maneiras de se estudar o conceito de número. A primeira, a *aritmética*, diz respeito "ao conhecimento do par e do ímpar e à quantidade de cada um"[152], e a segunda, o *cálculo*, "também diz respeito ao par e ao ímpar, diferenciando-se em não considerar apenas em si mesmo o valor numérico do par e do ímpar, mas também suas relações recíprocas"[153]. Para um estruturalista, afirma Shapiro, nada haveria no número *em si mesmo* além das relações recíprocas estabelecidas entre ele e os outros números, e sugere-se que mesmo Platão, n'*A República*, pensava ser "através deste estudo das *relações* entre os números que as almas dos guardiões se encontrarão aptas para captar a natureza dos números como eles são em si mesmos"[154]. Ao se observar a passagem da qual Shapiro conclui esta tese, no entanto, percebe-se a riqueza e a sutileza do texto platônico, o qual, por um lado, parece afirmar a necessidade de se estudar semelhante conceito por intermédio de ambas as maneiras, isto é, a aritmética e o cálculo, e, por outro lado, parece dedicar uma atenção especial ao estudo do cálculo. Com efeito, afirma Platão:

> "- Mas realmente o cálculo e a aritmética são totalmente consagradas ao número?
> - Totalmente.
> - Essas ciências parecem, certamente, conduzir à verdade.
> - Acima de tudo.
> - São, portanto, ao que parece, daquelas ciências que procuramos. Com efeito, é forçoso que o guerreiro as aprenda, por causa da tática, e o filósofo, para atingir a essência, emergindo do mundo da geração, sem o que jamais se tornará proficiente na arte de calcular.
> - É verdade.
> - Ora dá-se o caso de o nosso guardião ser guerreiro e filósofo?
> - Sem dúvida.
> - Seria, portanto, conveniente, ó Glaucon, que se determinasse por lei este aprendizado e que se convencessem os cidadãos, que hão-de participar dos postos governativos, a dedicarem-se ao cálculo e a aplicarem-se a ele, não superficialmente, mas até chegarem à contemplação da natureza dos números unicamente pelo pensamento, não cuidando deles por amor à compra e venda, como os comerciantes ou retalhistas, mas por causa da guerra e para facilitar a passagem da própria alma da mutabilidade à verdade e à essência"[155].

[152] PLATAO 2002, 451b.
[153] *Idem*, 451c.
[154] SHAPIRO 1997, p. 73.
[155] PLATAO 2001, 525a-c.

Ainda no rastro de Platão, Shapiro concorda com o fato de que não se pode delinear uma noção filosófica a partir de exemplos concretos, apesar de pensar que a exemplificação pode oferecer uma direção ao pensamento teórico. De modo que ele define um "*sistema* como uma coleção de objetos com certas relações"[156], a partir do qual se pode entrever uma *estrutura*, seja esta "a forma abstrata de um sistema, que ilumina as inter-relações entre os objetos, ignorando quaisquer características deles que não afetem a maneira pela qual se relacionam com os outros no sistema"[157]. Apesar de a epistemologia adequada às estruturas ser o assunto de seu capítulo seguinte, algumas pequenas notas lhe são dedicadas neste momento, de maneira a não ignorar os diversos modos de apreensão das mesmas. Como, por exemplo, o fato de se poder apreendê-las cognitivamente por intermédio de um reconhecimento de padrões comuns a um sistema ou a um conjunto de sistemas, isto é, por intermédio de uma *abstração*; ou através de uma *descrição direta*, oferecendo-se explicitamente uma maneira de se as compor. De qualquer forma, para Shapiro, a despeito de ser ou não exemplificada por algum sistema, é a estrutura o objeto de estudo ao qual a matemática pura dedicaria suas atenções (como uma leitura de Platão sugere). Também a prática matemática orientaria grande parte do seu trabalho por uma metodologia dedutiva em virtude de o matemático interessar-se, primordialmente, pelas relações internas entre os lugares das estruturas consideradas. Afirmar, contudo, que "a maior parte das estruturas estudadas em matemática possui um infinito, talvez incontável, número de posições"[158], já sugere por qual teoria do conhecimento, no par mencionado, Shapiro se inclinará.

De início, portanto, seriam dois os tipos de problemas a serem trabalhados em ontologia do ponto de vista estruturalista: o estatuto de todo tipo de estrutura, como a estrutura de uma sinfonia ou a dos números reais, por exemplo; e o estatuto dos objetos matemáticos, isto é, os lugares presentes nas (ou dentro das) estruturas. A exposição de Shapiro acerca destes tópicos inicia-se pela busca de um tratamento adequado aos objetos, a partir da tese de que o número nada mais

[156] SHAPIRO 1997, p. 73.
[157] *Idem*, p. 74.
[158] *Idem*, p. 75.

seria do que um lugar em uma estrutura[159]. Ele afirma então que "cada objeto matemático é um lugar em uma estrutura particular, havendo assim certa prioridade ao estatuto dos objetos matemáticos. A estrutura é anterior aos objetos matemáticos que encerra, assim como qualquer organização é anterior às funções que a constituem"[160]. Esta relação entre o objeto e a estrutura que o encerra permite que se enderecem algumas notas críticas ao *problema de Júlio César*, oriundo das concepções teóricas de Gottlob Frege, bem como ao artigo de Paul Benacerraf (WNCNB), aos quais dediquei o primeiro capítulo da presente dissertação. Apenas a título de exemplo, para ele, "o problema de Júlio César é análogo ao *dictum* quineano de que nós precisamos de critérios para individuar os elementos em nossa ontologia"[161], e a conclusão de Benacerraf, que afirma o fato de os números não serem objetos, seria inválida em função de ser exatamente a noção de *ser um objeto* que se encontrava sob discussão. Para Shapiro, portanto, "qualquer coisa em absoluto pode "ser" 2 – qualquer coisa que ocupe este lugar em um sistema que exemplifique a estrutura dos números naturais"[162].

Neste momento, pressupondo-se a caracterização do número como *um lugar em uma estrutura*, duas maneiras distintas de se o conceber conceitualmente são introduzidas – uma que os considera como *posições* (*places-are-offices*), e outra que os toma por *objetos* (*places-are-objects*). A primeira perspectiva deve, assim, antepor a si uma ontologia que supra de maneira suficiente os lugares existentes na estrutura – por exemplo, abordando-se sob a perspectiva *posicional* algum sistema particular, como um jogo de xadrez, devem se apresentar, no mínimo, dois conjuntos de objetos móveis com diferentes cores. No caso da aritmética, os conjuntos poderiam funcionar como esta ontologia pressuposta, porém, ao se tratar da matemática de uma maneira mais ampla, Shapiro constata que esta ontologia poderia ser os lugares (posicionais) de outras estruturas (como no caso da exemplificação da estrutura dos números reais pela linha euclidiana) ou, até mesmo, a própria estrutura sob discussão, de um ponto de vista

[159] No caso dos números naturais, especificamente, pode-se dizer que "um número natural é um lugar em uma estrutura de números naturais, um padrão infinito particular. O padrão pode ser exemplificado por diferentes sistemas, mas é o mesmo padrão em cada caso" (*idem*, p. 77).
[160] *Idem*, p. 78.
[161] *Ibidem*.
[162] *Idem*, p. 80.

generalizado (como a constatação da exemplificação da estrutura dos números naturais *pelos próprios* números naturais). "Uma conseqüência disto é que, em matemática ao menos, a distinção entre uma posição e seu ocupante é uma distinção relativa. O que é um objeto a partir de uma perspectiva é um lugar em uma estrutura a partir de outra"[163]. Fato que o permite apresentar a segunda perspectiva, seja esta a que considera os lugares da estrutura como objetos. A partir dela, pode-se afirmar que os elementos que ocupam os lugares nas estruturas podem ser considerados porventura como *termos singulares*, fato que possibilitaria o tratamento de uma estrutura enquanto tal, independentemente de suas possíveis exemplificações – "a aritmética, então, versa sobre a estrutura dos números naturais, e seu domínio de discurso consiste dos lugares nesta estrutura"[164].

Shapiro efetua uma breve consideração sobre a clássica distinção entre os usos do verbo ser – o *predicativo* e o de *identidade* –, a qual, para alguns autores, já se encontraria na antiguidade clássica. Para ele, quando se afirma em uma perspectiva *objetal* que "2 *é* o primeiro número primo", estaria a se a fazer um uso de identidade do verbo ser, de maneira que se pode substituir semelhante verbo pelo sinal "=" ou pela expressão equivalente "é idêntico a"; em contrapartida, quando se afirma em uma perspectiva *posicional* que "{∅, {∅}} *é* o 2" ou que "{{∅}} *é* o 2", estaria a se utilizar o verbo ser de uma maneira predicativa, a qual poderia ser caracterizada como uma *predicação relativa a um sistema* (que exemplifique a estrutura) – assim, simultaneamente, predicar-se-ia como a "segunda posição na estrutura dos números naturais" a expressão "{∅, {∅}}", no sistema de von Neumann, e a expressão "{{∅}}", no sistema de Zermelo. Esta argumentação o permite concluir a tese de que

> "algumas vezes, utilizamos o "é" da identidade ao nos referirmos a posições, ou lugares em uma estrutura. Tratamos assim as posições *como objetos*, ao menos em relação ao seu aparecimento superficial na gramática. Quando o estruturalista afirma que os números são objetos, é isto que ele quer dizer. A perspectiva de que os *lugares-são-objetos* é assim o fundamento para o presente

---

[163] *Idem*, p. 83.
[164] *Ibidem*.

> realismo em ontologia para a matemática. [E a partir destas ressalvas os] lugares nas estruturas são *autênticos* objetos”[165].

Como algumas questões ainda subsistem, por exemplo, se os termos singulares considerados não seriam apenas máscaras para um conjunto implícito de variáveis ligadas, pois os enunciados de uma perspectiva *objetal* poderiam conduzir a uma generalização sobre todos os sistemas que exemplifiquem a estrutura em foco, desloca-se a discussão para o estatuto das estruturas, com a intenção de investigar a viabilidade de tal generalização sobre sistemas.

Já entrevista como a forma abstrata de um sistema, a estrutura será agora caracterizada como o seu *padrão*, isto é, como a unidade que sustentaria uma possível multiplicidade (até o isomorfismo). Shapiro destaca que o conceito de “ser um *padrão*” obteve um amplo tratamento na história da filosofia, como, por exemplo, nas *formas* destacadas por Platão, nas *propriedades* de Aristóteles, nos *universais* discutidos na idade média ou, inclusive, nas recentes discussões sobre a relação *type*/*token* em teoria do conhecimento. À observação desta vasta conceitualização segue-se a constatação de uma espécie de polarização entre as posições platônicas e aristotélicas no que tangencia a ontologia correspondente a estas estruturas (ou formas/propriedades/universais), pois, enquanto uma *dependência* do sistema que o instancie seria por estas afirmadas, uma *independência* de tal sistema se encontraria no interior daquelas. De modo que, enquanto as teorias ancoradas no pensamento de Aristóteles subscreveriam um *realismo in re*, no qual as propriedades dependeriam ontologicamente das relações estabelecidas com os objetos que as instanciam[166], as teorias ancoradas no pensamento de Platão subscreveriam um *realismo ante rem*, no qual as formas possuiriam uma existência independente de suas instanciações. De maneira que Shapiro investigará “se, e em qual sentido, as estruturas existem independentemente dos sistemas que a exemplificam”[167].

Segue-se assim a esta consideração histórica uma observação mais atenta da tese que procura reescrever os enunciados sustentados a partir da perspectiva

---

[165] *Ibidem*.
[166] As teses *conceitualistas*, nas quais os universais são construções mentais, e *nominalistas*, nas quais os universais são construções lingüísticas, são apontadas como variações deste realismo de matriz aristotélica.
[167] *Idem*, p. 85.

de que os lugares das estruturas são objetos (*places-are-objects*) como simples generalizações efetuadas na perspectiva de que estes mesmos lugares seriam posições (*places-are-offices*). Para Shapiro, "o programa de reescrever os enunciados matemáticos como generalizações é uma manifestação do estruturalismo, mas é uma manifestação que não sanciona [absolutamente] os objetos matemáticos como autênticos objetos"[168]. Isto significa que, da mesma forma que o tratamento dos números naturais seria um atalho para o estudo do modelo que exemplifique a aritmética, também o estudo da estrutura que subsume tal sistema seria um atalho para o estudo deste mesmo modelo. Constata-se então uma distinção de matiz semelhante no trabalho de Michael Dummett sobre a filosofia da matemática de Frege, onde se distingue um *estruturalismo místico* ("*mystical structuralism*") de um *estruturalismo inflexível* ("*hardheaded structuralism*") – de modo que enquanto este representaria um realismo aristotélico *in re*, aquele manifestaria um realismo platônico *ante rem*. O objetivo desta elucidação é destacar o *estruturalismo eliminativo* de Charles Parsons como um representante desta orientação "inflexível" (a qual também seria sugerida por Benacerraf ao final de WNCNB), pois, também para ele, os enunciados sobre uma espécie particular de objetos matemáticos não apenas devem ser compreendidos, como devem ter sua "referência singular" eliminada em função de algum tipo de estruturas. Shapiro porém realça que, mesmo em uma perspectiva que privilegie a concepção dos lugares das estruturas como posições, deve existir algum referencial que possibilite uma destacada apreensão cognitiva dos mesmos, dado que, para ele, sem uma referência à natureza dos objetos que compõem semelhante domínio, a única condição à qual se deveria submetê-lo é a *quantitativa*, isto é, devem existir objetos *em número suficiente* para a satisfação das propriedades consideradas[169]. Sem a satisfação desta condição, incorreria toda a estrutura no sério problema da *vacuidade*, para o qual Shapiro visualiza três respostas distintas.

A primeira resposta procura adequar-se ao estruturalismo eliminativo e à condição ressaltada por Shapiro, sendo intitulada como *opção ontológica*. Assim,

---

[168] *Ibidem*.

[169] Fato que o faz recusar a tese que afirma como domínio de discurso matemático o conjunto de objetos físicos, pois "parece razoável insistir que há *algum* limite ao tamanho do universo físico" (*idem*, p. 86).

no rastro dos mais diversos lógicos, considera-se aqui a hierarquia da teoria dos conjuntos como a ontologia necessária ao exercício matemático, seja esta o universo descrito por von Neumann. Este universo, pensa Shapiro, não será entendido em termos estruturalistas, pois a sua pressuposição atende apenas ao objetivo de fixar o número de objetos necessários para livrar a prática matemática do problema da vacuidade. E, "como um dos propósitos da teoria dos conjuntos era fornecer o maior número de tipos isomórficos possíveis, ela é um grande alimento para o estruturalismo eliminativo"[170], constituindo-se matéria suficiente, para tanto, a aceitação de que todos os conjuntos da hierarquia existem. Ele afirma, então, que alguns nominalistas manifestaram um apreço por esta teoria estruturalista, apressando-se porém em falar de estruturas *possíveis*, e não de estruturas *atuais*. Assim, "ao invés de dizer que a aritmética versa sobre todos os sistemas de certo tipo, diz-se que a aritmética versa sobre todos os sistemas *possíveis* de certo tipo"[171], ou seja, "ao contrário da opção ontológica, aqui não se requer uma rica e atual ontologia. Precisa-se aqui que uma rica ontologia seja *possível*"[172] – a este tratamento Shapiro dá o nome de *opção modal*. Esta opção estruturalista não requer, em princípio, a existência de objetos matemáticos – ou até mesmo de estruturas matemáticas –, subscrevendo apenas o fato de que "os enunciados de um ramo não-algébrico são compreendidos como generalizações dentro do escopo de um operador modal"[173], ou seja, ao invés de uma asserção de que um sistema existe, afirma-se que um dado sistema *pode* existir. De maneira que, se o grande problema para a opção ontológica refere-se ao *tamanho* de sua ontologia, o grande problema para a opção modal encontra-se na *natureza* desta modalidade que se está considerando.

Contraposta a estas duas opções, aloja-se a postura realista que caracteriza as estruturas de maneira *ante rem*. De modo que a existência das estruturas, a partir desta opção teórica, independeriam de sua exemplificação por um sistema, pois, para Shapiro, a partir de uma perspectiva *objetal* de seus lugares, a própria estrutura configuraria uma boa exemplificação para si mesma. Isto não denotaria, continua ele, uma "primazia explanatória" com a qual as "formas" sempre foram

[170] *Idem*, p. 87.
[171] *Idem*, p. 88.
[172] *Ibidem*.
[173] *Ibidem*.

apresentadas; ou seja, não é porque participa de (ou se refere a) uma forma que um objeto é tal como ele é, mas porque se observa, neste objeto, a satisfação de determinados princípios requeridos por uma posição que tal relação seria asserida. Assim, "o que faz um sistema exemplificar a estrutura dos números naturais é o fato de ele possuir uma função de sucessor 1-1 com um objeto inicial, e satisfazer o princípio de indução. Isto é, o que faz um sistema exemplificar a estrutura dos números naturais é o fato de ele ser um modelo para a aritmética"[174]. Michael Hand comenta a escolha de tal postura a partir do fato de que a subscrição do caráter *ante rem* para as estruturas matemáticas implicaria em uma adesão aos compromissos tradicionalmente assumidos pelos seus defensores, sob pena de abandonar as motivações explanatórias que a fundamentariam. Shapiro discorda que a ausência de tais compromissos esvaziaria semelhante opção teórica, e aloja sua combinação realista (operacional e filosófica) como uma variação destes clássicos compromissos, ou seja, como uma motivação para se delinear conceitualmente esta opção (abandonando, por exemplo, a primazia explanatória). E conclui afirmando que:

> "de maneira sumária, as três opções são o estruturalismo eliminativo ontológico, o estruturalismo eliminativo modal, e o realismo *ante rem*. Acredito que a opção *ante rem* é a mais perspicaz e a menos artificial dentre as três. Ela chega perto da maneira pela qual as teorias matemáticas são concebidas. No entanto, não tenho a intenção de eliminar as outras opções. De fato, segue-se da tese estruturalista que, em um sentido, todas as três opções são equivalentes. Como será mostrado, cada uma produz a mesma "estrutura de estruturas""[175].

Faz-se necessário, portanto, apresentar uma teoria de estruturas que abranja as opções mencionadas como saídas ao problema da vacuidade. Shapiro considera que qualquer estruturalismo depende em primeiro lugar da noção de que *dois sistemas exemplificam a "mesma" estrutura*, e é por ela que se iniciará sua abordagem. Para ele, muitas relações são capazes de desempenhar esta função, de maneira que serão mencionadas apenas duas – a de isomorfismo e a de subsistema completo. O fato de ambas as noções serem equivalentes simplifica bastante o desenvolvimento das mesmas, de modo que se diz de dois sistemas que eles são isomórficos quando ocorre uma correspondência biunívoca entre os objetos e as relações de um com os objetos e com as relações do outro. À sutileza da noção de

---

174 *Idem*, p. 90.
175 *Ibidem*.

isomorfismo Shapiro contrasta a noção de *subsistema completo*, desenvolvida por Michael Resnik, na qual se imagina um sistema *R* qualquer e um subsistema *P* do sistema *R*, no qual se preservariam os objetos de *R* e se definiriam todas as relações de *R* em termos das relações de *P*. Afirma ele então que "sejam *M* e *N* sistemas. Definem-se *M* e *N* como *estruturalmente-equivalentes*, ou simplesmente *equivalentes*, se há um sistema *R* tal que *M* e *N* são isomórficos a subsistemas (completos) de *R*. *Equivalência* é uma boa candidata para "uniformidade de estruturas" entre sistemas"[176]. Destaca-se, por fim, que esta relação de equivalência é apresentada em termos de *definibilidade*, isto é, em termos lingüísticos, tornando-a dependente dos recursos disponíveis na meta linguagem (ou na linguagem-U anteriormente mencionada)[177].

Assim, pensa-se que é fundamental à opção ontológica refinar determinados pontos de seu argumento antes de alçar o desenvolvimento de tal teoria, como, por exemplo, detalhar a ontologia não-estrutural que se está a considerar (o universo de von Neumann) ou definir a maneira pela qual os sistemas serão abordados nesta ontologia; também é admirado o rigor e a atenção aos detalhes conceituais observados por Geoffrey Hellman na introdução de operadores modais à linguagem formal padrão, apesar de a natureza de semelhante modalidade ainda encontrar-se conceitualmente aberta. Em ambos os casos, Shapiro observa que a noção de isomorfismo encontra-se limitada, pois, no primeiro caso, tanto o isomorfismo quanto a equivalência estrutural se aplicariam apenas a *sistemas* em função do fato de que a opção ontológica subscreve um estruturalismo eliminativo, isto é, se constituiria como um *estruturalismo sem estruturas*; ao passo que, no segundo, apesar de o programa de Hellman encontrar-se bem caracterizado, afirma Shapiro que "não há uma noção de *estrutura* na linguagem modal oficial"[178]. De modo que resta investigar o caso da rota *ante rem*, a qual requer uma minuciosa teoria das estruturas em função de as mesmas serem elementos da ontologia pressuposta (evitando-se assim um regresso a um infinito universo de estruturas). De imediato, enuncia-se a

[176] *Idem*, p. 91.
[177] Quanto a este tópico, Shapiro afirma que não deve haver surpresa desta dependência, pois "é um tema recorrente neste livro que uma grande quantidade de assuntos ontológicos são atrelados aos recursos lingüísticos" (*ibidem*).
[178] *Idem*, p. 92.

necessidade de uma relação de identidade entre estruturas, no rastro das teses quineanas de que "dada uma teoria ou uma linguagem deve haver um critério de identidade definido entre seus objetos"[179]. Para Shapiro, assim como os lugares nas estruturas, este critério "é mais um assunto de decisão ou invenção, baseado na conveniência, do que matéria de descoberta"[180], de modo que ele o tomará como algo primitivo, em conformidade com a noção de isomorfismo, ou seja, "estipula-se que duas estruturas são idênticas se elas são isomórficas"[181]. De posse desta relação, ele alça uma axiomatização direta da noção de *estrutura*.

Assim, o primeiro axioma considerado é o axioma de infinitude – *existe ao menos uma estrutura que possui um infinito número de lugares*. Este simples axioma não seria ontologicamente trivial em função de procurar expressar e complementar o fato de que uma estrutura possui uma coleção de lugares e um conjunto finito de funções e relações sobre estes lugares. Deste modo, considerando-se que as estruturas, os lugares, as funções e as relações constituirão os únicos itens na ontologia *ante rem*[182], um *sistema* será definido como *uma coleção de lugares a partir de uma ou mais estruturas junto de algumas funções ou relações sobre estes lugares*. E, a partir de uma perspectiva objetal (*places-are-objects*), na qual os lugares das estruturas são eles próprios observados como objetos, pensa-se que uma estrutura pode ser um sistema para si própria. Os axiomas apresentados na sequência destas considerações, portanto, tratarão de subestruturas, isto é, tomarão por tema algumas operações possíveis em uma estrutura. Observa-se, então, o axioma de subtração – *se* S *é uma estrutura e* R *é uma relação de* S*, há uma estrutura* S' *que é isomórfica ao sistema que consiste dos lugares, funções e relações de* S*, à exceção de* R *(o mesmo ocorre ao se exemplificar com uma função* f*)* –; o axioma de subclasse – *se* S *é uma estrutura e* c *é uma subclasse dos lugares de* S*, existe uma estrutura isomórfica ao sistema que consiste de* c*, mas sem suas relações e funções* –; e o axioma de adição – *se* S *é uma estrutura e* R *é algumas relação sobre os lugares de* S*, há então uma estrutura* S' *que consiste dos lugares, funções e relações de* S *junto de* R *(o*

[179] *Ibidem*.
[180] *Idem*, p. 93.
[181] *Ibidem*.
[182] Deve-se ressaltar que Shapiro não apenas permite a quantificação sobre as estruturas, como também sobre os lugares nestas estruturas, obtendo a teoria uma segunda espécie de variáveis.

mesmo ocorre para uma função f *qualquer que tenha por domínio e contra-domínio algum lugar em* S*)*. Estes axiomas significam apenas que, em uma estrutura, "pode-se remover lugares, relações e funções; bem como adicionar funções e relações"[183]. Acrescentando-se o axioma de potência[184] obtém-se um tratamento axiomático semelhante ao de Zermelo para a teoria dos conjuntos, e Shapiro tem por objetivo ir além da mesma, de modo que outros três axiomas serão introduzidos.

Logo, em primeiro lugar, propõe-se um axioma de substituição. Este axioma almeja estabelecer que, quando se trabalha com uma função f a partir de uma estrutura S qualquer, e ela atribui a cada x nesta estrutura S um lugar pertencente a esta mesma estrutura, pode-se conceber uma demarcação de um espaço pela função fx a qual se nomeará como S_x. A partir deste movimento, pode-se pensar em uma estrutura T que seja pelo menos idêntica à união dos lugares em S_x, e que, nesta nova estrutura T, existirá uma função g que adotará como argumento um lugar z em S_x tal que haverá um lugar y em T de maneira a denotar o fato de que $gy = z$. Assim, haverá "uma estrutura ao menos tão extensa quanto o resultado da "substituição" de cada lugar x de S pela coleção de lugares de uma estrutura S_x. Com este axioma, todo modelo standard da teoria da estrutura terá o tamanho de um cardinal inacessível"[185]. Em seguida, apresenta-se um axioma de coerência, a partir do qual se afirma que *se Φ é uma fórmula coerente em uma linguagem de segunda ordem, então há uma estrutura que satisfaz Φ*. Este axioma procura expressar o princípio que sustenta qualquer uma das versões do estruturalismo, o qual se refere ao fato de que *qualquer teoria coerente caracteriza uma estrutura, ou uma classe de estruturas*. Obviamente, a pergunta a ser respondida por Shapiro em relação a este axioma é o que esta coerência sustentada significa, e, na investigação de uma solução que não dependa plenamente da *satisfabilidade* tal como definida por uma teoria dos conjuntos (uma teoria é satisfatível se existe um modelo para ela), chega-se à idéia de um

---

[183] *Idem*, p. 94.

[184] "*Seja* S *uma estrutura e* s *sua coleção de lugares. Há uma estrutura* T *e uma relação binária* R *tal que para cada subconjunto* $s' \subseteq s$ *há um lugar* x *em* T *tal que* $\forall z(z \in s' \equiv Rxz)$ – cada subconjunto dos lugares de *S* encontra-se relacionado a um lugar em *T*, e há ao menos tantos lugares em *T*, quanto subconjuntos de lugares em *S*. Assim, a coleção de lugares em *T* é ao menos tão extensa quanto a potência dos lugares de *S*" (*ibidem*).

[185] *Idem*, p. 94.

axioma que expresse o seguinte *esquema reflexivo*: *Φ é uma sentença na linguagem da teoria da estrutura, então, se Φ, há uma estrutura* S *que satisfaz os (outros) axiomas da teoria da estrutura e Φ*. O limite para tal teoria, desta forma, será uma classe própria, de maneira a evitar paradoxos semelhantes àqueles apresentados por Russell ao projeto axiomático de Frege. Isto é, “para todo sistema *S*, não há uma função a partir dos lugares de *S* sobre a classe de todos os lugares em todas as estruturas”[186].

Shapiro então considera a sua teoria da estrutura como uma teoria mais perspicaz e menos artificial do que a teoria dos conjuntos (para os propósitos anteriormente delimitados). Ela não é mais suscetível aos paradoxos do que qualquer outra teoria (modal, de categorias ou mesmo a de conjuntos) e, mesmo quando se procura avançar em direção à metalinguagem, o regresso seria contido pela proposta da linguagem-U anteriormente abordada ou pela constatação de que “há pouca necessidade em ascender além da linguagem estruturalista original, assim como há pouca necessidade em ascender a algum tipo de teoria de super-conjuntos”[187]. Para ele, a perspectiva *ante rem* da teoria da estrutura possui a vantagem de considerar a teoria dos conjuntos como um ramo matemático no mesmo nível de muitos outros, com a possibilidade de uma abordagem estrutural, e não como algo de natureza especial (como faz a opção ontológica, por exemplo). Afinal, “qualquer coisa que pode ser dita em um arcabouço pode ser sustentado em outro. Falar de estruturas, como primitivos, é facilmente “traduzível” para se falar de um isomorfismo ou de tipos equivalentes sobre um universo de conjuntos (primitivos). No final da análise, realmente não importa onde começamos. [...] De certo modo, todas as teorias dizem a mesma coisa, utilizando diferentes primitivos”[188].

Se todas as teorias dizem a mesma coisa valendo-se de distintos primitivos, Shapiro permanece em sua articuladora dialética das noções de *estrutura* e *objeto* na seção que procura legitimar a matemática como *a ciência das estruturas*. Para isso, questiona-se sobre a existência de alguma característica que distinguiria as estruturas matemáticas de quaisquer outras consideradas, dado

186 *Idem*, p. 96.
187 *Ibidem*.
188 *Idem*, p. 96-97.

que o exemplo que ele mais utiliza ao longo de sua exposição é o da estrutura de defesa de uma equipe de baseball. Uma primeira resposta atestaria a ausência de distinção entre ambas no âmbito ontológico, ou seja, se um matemático interessa-se por estruturas em baseball ela passaria a ser considerada do ponto de vista matemático etc., ao passo que uma resposta mais sutil atribuiria a ambas uma distinção metodológica, isto é, a matemática seria o estudo *dedutivo* das estruturas a partir de uma descrição da mesma que independeria dos sistemas que as instanciam. As duas abordagens não satisfazem a teoria de Shapiro, pois, de acordo com suas concepções, "embora existam interessantes casos limítrofes entre as estruturas matemáticas e ordinárias, [...] existem importantes diferenças entre os dois tipos de estruturas. Uma vaga fronteira ainda é uma fronteira"[189]. De modo que ele sublinhará duas distinções cruciais ao longo desta seção: a primeira se refere à *natureza das relações* entre os ocupantes dos sistemas que exemplificam uma dada estrutura, e a segunda se refere à *espécie de objetos* que podem ocupar os lugares em uma estrutura (as estruturas matemáticas seriam autônomas (*freestanding*) em relação a essa propriedade).

O fato de as relações matemáticas não realizarem nenhuma pressuposição acerca de quaisquer propriedades dos objetos relacionados (espaços-temporais, mentais, pessoais etc.) implica no fato de que "em estruturas matemáticas as relações são todas *formais*"[190]. Obviamente, uma caracterização mais rigorosa da noção de *formal* que se está a considerar é a via a ser percorrida pela argumentação de Shapiro, de modo que, para desenvolvê-la, utiliza-se do texto de Tarski intitulado "What are the Logical Notions?". Neste texto, Tarski propõe um critério para se traçar o limite entre as noções que seriam lógicas e aquelas que não o são, o qual se ancoraria no fato de que uma noção lógica não possui sua extensão modificada através de uma permutação de domínio. Para ele, uma noção lógica não opera com características particulares dos objetos de um universo de discurso, mas explicitaria uma invariância sobre o mesmo independentemente das substituições efetuadas no seu conjunto de objetos e relações. Assim, preserva a distinção conceitual defendida por Shapiro entre os sistemas – os quais consideram as particularidades dos objetos – e as estruturas, combinando de

[189] *Idem*, p. 98.
[190] *Ibidem*.

maneira interessante o *estruturalismo* e uma concepção das *noções lógicas*, de modo que acaba por manifestar dois *slogans* distintos: o de que a matemática é a ciência da estrutura e o de que a lógica é neutra em relação aos tópicos sobre os quais versa. A outra importante distinção entre as estruturas matemáticas e as estruturas gerais se refere à espécie de elementos que podem ocupar os lugares presentes nas estruturas. De imediato, afirma-se que qualquer requerimento acerca dos possíveis ocupantes de um lugar em um sistema não é uma atribuição estrutural, e em função disso conclui-se que "as estruturas matemáticas são autônomas (*freestanding*). Todo lugar operacional é completamente caracterizado em termos de como o seu ocupante se relaciona com os ocupantes de outros lugares operacionais da estrutura, e qualquer objeto pode ocupar qualquer um de seus lugares"[191]. Ao afirmar que qualquer objeto pode ocupar um lugar em uma estrutura, Shapiro destaca o fato de que as exigências são efetuadas sobre as relações entre os lugares, e, em função disso, conclui que, "em matemática, não há diferença entre simular uma estrutura e exemplificá-la"[192].

Se não há diferença entre simular uma estrutura e exemplificá-la, haveria a possibilidade de que a construção teórica *ante rem* incorresse em um regresso *ao Terceiro Homem*, isto é, a um *Terceiro* ω. Esta é a argumentação de Michael Hand. Considerando-se pois que tanto o sistema ordinal de von Neumann quanto o sistema numeral de Zermelo exemplificam a estrutura dos números naturais, deveria existir uma outra estrutura que permitisse observar semelhante relação e assim por diante. Shapiro afirma que isto incorre em equívoco devido ao fato de esquecer, no decorrer do comentário crítico, da distinção entre as duas perspectivas acerca dos lugares das estruturas, ou seja, a perspectiva que considera os lugares como objetos e aquela que considera os lugares de maneira operacional. Com o auxílio desta distinção, pode-se considerar que os lugares da estrutura dos números naturais, quando considerados sob a ótica da perspectiva objetal dos lugares, podem ser organizados em um sistema que exemplificará semelhante estrutura (ao mesmo tempo em que se modificaria a perspectiva e se os consideraria sob a ótica dos lugares operacionais). "Neste caso, não há necessidade de um Terceiro. A estrutura dos números naturais, como um sistema

[191] *Idem*, p. 100.
[192] *Ibidem*.

de lugares, exemplifica a si própria. O Terceiro ω é o primeiro ω”[193]. Faz-se então um pequeno comentário acerca da maneira pela qual as teorias *in re* evitam este problema, seja ela a desconsideração da autonomia estrutural, ou seja, a requisição de características por parte dos objetos que ocuparão os seus lugares, para, por fim, observar a conceituação empreendida por Charles Parsons.

Em seu artigo “The Structuralist View of Mathematics Objects” Parsons considera que os objetos matemáticos devem ser contrastados não apenas com os objetos concretos, mas também com uma categoria de objetos que ele intitula de *meio-concretos*, os quais são diretamente representados ou instanciados no mundo material (seu exemplo são as figuras geométricas)[194]. Estes objetos meio-concretos organizam-se em sistemas cujas estruturas não seriam autônomas (*freestanding*), fato que impossibilitaria (momentaneamente) a caracterização da matemática como a *ciência das estruturas* de maneira absoluta, como almejava Shapiro. De modo que, após apresentar sumariamente algumas das críticas que se podem endereçar à tese de Parsons[195], Shapiro argumenta que “um breve olhar sobre a história da matemática mostra que a estrutura dos objetos meio-concretos tem sido gradualmente suplantada por estruturas autônomas (*freestanding*) cujas relações são formais”[196]. Apresenta para isso o caso da Geometria, a qual, em função de seus desenvolvimentos internos, deixou de ser uma disciplina apenas sobre o espaço físico para ser construída de maneira cada vez mais formal, e, por conseguinte, cada vez mais estrutural; e o caso da teoria das cordas na Física, a qual, em função de suas limitações, apresentaria as cordas como algo de natureza meio-concreta, mas que pouco a pouco também se renderia a um tratamento mais estrutural (o qual permitiria inclusive que se considere, com o auxílio da numeração de Gödel, o sistema dos números naturais como uma instanciação da estrutura das cordas).

[193] *Idem*, p. 101.
[194] Este conceito de Charles Parsons possui fortes conexões com a divisão ontológica empreendida por Platão no livro VI d’*A República*.
[195] Como o problema de se os objetos meio concretos seriam ou não objetos matemáticos; o problema se os seus alicerces encontram-se bem construídos a partir desta distinção conceitual; e, por fim, se a estrutura destes objetos ocuparia a fronteira entre os objetos abstratos da matemática e os objetos concretos do mundo físico ou se ela se categorizaria de outra forma.
[196] *Idem*, p. 102.

O último caso considerado é o da teoria dos conjuntos, pois, "tal como a geometria e a teoria de cordas, a idéia intuitiva que subjaz e motiva sua axiomática corrente não é estrutural"[197]. Shapiro considera este como o mais interessante dos casos para o ponto de vista *ante rem*, pois as concepções daí extraídas podem ser extrapoladas para toda a matemática, ou, ao menos, para toda a matemática pura. Afirma-se, portanto, no rastro dos trabalhos de Parsons, que os conjuntos sempre foram pensados ou como uma totalidade "constituída" pelos seus elementos, a qual oferecia uma larga primazia a estes frente à totalidade formada, ou como a extensão de um predicado, a partir da qual a primazia é oferecida ao predicado em detrimento de seus elementos. Nenhuma das duas, no entanto, captaria a caracterização entrevista no sistema de Zermelo-Fraenkel, a qual "se afasta das intuições concretas quando admite conjuntos infinitos, e das noções predicativas quando admite conjuntos impredicativamente definidos"[198]. Este afastamento também decorreria do fato de a relação de pertencimento com a qual opera a teoria dos conjuntos ser uma relação bem formada, e, por isso, substituir noções meio-concretas como a de primazia. Isto permitirá, aliás, a conclusão de que quaisquer conjuntos são relacionados pela noção bem formada de "pertencimento", e, como a noção de "boa formação" se define em uma linguagem de segunda ordem[199], bem se poderia considerar toda a hierarquia dos conjuntos de forma análoga às estruturas autônomas (*freestanding*).

O problema que deve ser então trabalhado, a fim de encerrar o tratamento ontológico das estruturas (ao menos neste momento), é o "resíduo" deixado pela sucessiva *estruturação* de um domínio, isto é, o que será excluído do domínio durante o processo de estruturação. A advertência de Parsons a este respeito é a de que, ao desconsiderar-se completamente o âmbito dos objetos concretos ou meio-concretos, "não podemos motivar ou até mesmo justificar algumas das teorias matemáticas"[200]. Shapiro relembra então seu axioma de coerência, e afirma de forma consoante que esta é a única razão para a permanência de objetos meio-

[197] *Idem*, p. 103.
[198] *Ibidem*.
[199] Shapiro afirma que "a boa formação de uma relação pode ser caracterizada em uma linguagem de segunda-ordem sem utilizar uma terminologia não-lógica, isto é, uma relação *E* será bem definida se e somente se $\forall P[\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \,\&\, \forall y(Eyx \rightarrow \neg Py))]$" (*ibidem*).
[200] *Idem*, p. 104.

concretos em sua teoria de estruturas, concordando com a tese de Parsons que afirma o fato de que a eliminação de semelhantes objetos eliminaria muitas das intuições existentes por detrás de diversas teorias. Sua permanência, contudo, não abalaria os pressupostos *ante rem*, de tal modo que "a idéia de que o assunto próprio da matemática pura é bem construído como uma classe de estruturas autônomas (*freestanding*) com relações formais"[201] permanece em vigor.

Após um adendo sobre a relação que a sua teoria estruturalista *ante rem* possuiria com determinadas teorias funcionalistas em filosofia da mente, Shapiro lança-se em direção ao debate epistemológico sobre a estrutura. Este debate se organizará, com efeito, em torno de nove seções que procurarão delinear acuradamente as noções de linguagem, de referência e de dedução. Para tanto, após um preâmbulo epistêmico, discutem-se duas maneiras distintas de se apreender pequenas e grandes estruturas finitas, sejam elas a abstração e o reconhecimento de padrões. A partir daí, apresenta-se a estrutura dos números naturais e a discussão volta-se para o domínio infinito, trabalhando-se, em sequência, com as noções de indiscernibilidade, identidade e objeto. Procura-se definir o modo pelo qual as estruturas neste domínio serão apreendidas cognitivamente, e introduz-se a definição implícita para tanto. Por fim, como o último estágio a anteceder sua conclusão, as noções de existência e de singularidade são relacionadas às de coerência e de categoricidade.

Encontram-se na epistemologia, para quem observa seriamente o desenvolvimento matemático contemporâneo, os problemas mais delicados para uma filosofia da matemática de matriz realista. Afinal, apesar de haver pouca discussão na literatura pertinente sobre a dicotomia entre os objetos concretos e abstratos, estes são costumeiramente definidos como aqueles objetos não-localizáveis no tempo e no espaço, e, por conseguinte, ausentes do nexo causal. De modo que "se os objetos matemáticos são assim, como podemos conhecer alguma coisa acerca deles? Como podemos formular crenças fundamentadas sobre os objetos matemáticos e possuir alguma segurança de que nossas crenças são verdadeiras?"[202]. Estes problemas decorreriam de uma crítica que subscreve, em

[201] *Idem*, p. 105.
[202] *Idem*, p. 109.

alguma medida, uma teoria causal do conhecimento, a qual é observada enquanto uma instância da *epistemologia naturalizada*. Este tratamento epistemológico determina que a partir do fato de o ser humano se constituir como um ser natural localizado no universo físico, "qualquer faculdade que ele possuir enquanto conhecedor, e da qual puder se valer na busca de conhecimento, deve envolver apenas processos naturais que satisfaçam a pesquisa cientifica usual"[203]. Shapiro procurará, então, uma forma de combinar seu realismo (filosófico e funcional) com uma epistemologia naturalizada que respeite este caráter abstrato dos objetos matemáticos[204].

A relação entre a matemática e a epistemologia naturalizada se processará através de uma sofisticação do conceito de "natural" utilizado, a fim de que este reserve em seu interior um espaço para os conceitos que sejam próprios ao pensamento matemático, como o conceito de números, de pontos, ou até mesmo a hierarquia da teoria dos conjuntos. Isto significa que compõe o conjunto de objetivos de muitos pensadores contemporâneos dedicados a este problema a diluição da fronteira entre o que é um objeto abstrato e o que é um objeto concreto. Para Shapiro, porém, ainda que se dilua ao máximo a fronteira entre estes objetos, sem a sua completa eliminação ela ainda permaneceria (isto é, uma fronteira diluída ainda é uma fronteira), e a pergunta que se deveria trabalhar frente a esta dicotomia debruça-se sobre as razões de sua importância e sobre o papel que ela desempenha no desenvolvimento científico. Por exemplo, uma motivação a ser observada é o fato de esta dicotomia sustentar uma concepção *a priori* do conhecimento matemático, a qual, em vista dos trabalhos de Quine, encontra-se fortemente abalada no cenário da filosofia desenvolvida em língua inglesa. Seu abalo, contudo, não implica no seu esquecimento, e pode-se realçar

---

[203] *Idem*, p. 110.

[204] Antes dessa tarefa, Shapiro discute três possibilidades já desenvolvidas teoricamente. A primeira, proposta por Gödel, postulava uma faculdade análoga à percepção (por vezes chamada de intuição) para a compreensão da dinâmica do domínio matemático; a segunda, proposta por Penelope Maddy, afirma que pelo menos alguns dos objetos matemáticos deveriam ser objetos concretos para serem apreendidos cognitivamente pela percepção sensória usual; e a terceira, entrevista nos trabalhos de Resnik e de Putnam, aborda a epistemologia indiretamente, sugerindo que os objetos matemáticos seriam postulações análogas aos entes teóricos com os quais as mais diversas ciências (e a física em particular) formula o seu processamento cognitivo. Para Shapiro, "os objetos matemáticos – lugares em estruturas – são abstratos e causalmente inertes. Assim, o presente programa não é compatível com versões cruas da teoria causal do conhecimento" (*idem*, p. 112).

para tanto o *neologicismo* sustentado por neo-fregeanos como Bob Hale e Crispin Wright. Assim, a questão epistemológica de Shapiro formula-se da seguinte maneira: como a maneira pela qual a apreensão cognitiva dos objetos próprios à matemática – as estruturas – mostra-se possível? E, para respondê-la, apresenta três maneiras diferentes de se pensá-la: a simples *abstração* ou o *reconhecimento de padrões*, a *abstração lingüística* e a *definição implícita*.

Para iniciar o tratamento da *abstração* Shapiro recorre ao *Oxford English Dictionary*, cuja definição para o adjetivo "abstrato" assemelha-se àquela oferecida pelo *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*: é abstrato aquilo que for o resultado de um processo de abstração. De modo que ele procurará apenas ilustrar "algumas pequenas instâncias deste procedimento [o reconhecimento de padrões], mostrando como ele pode nos levar à apreensão de estruturas autônomas (*freestanding*), *ante rem*"[205]. Destaca-se, então, o caso do reconhecimento das letras e dos números, em função de apreendermos cognitivamente os *types* que lhes são correspondentes através da percepção sensorial de seus mais diversos *tokens*. Esta, pensa ele, seria uma intuição *realista*, e, para sustentá-la, deve-se investigar quais as conseqüências que decorrerão desta apreensão, bem como de que forma se poderia pensar os mais diversos *types* como objetos de uma estrutura. Elege-se, assim, a *definição ostensiva* como o mecanismo primário para a introdução de caracteres diversos, a qual procuraria se referir diretamente a um objeto pelo menos de três formas distintas: através de um gesto, indicando um exemplo, ou pela utilização da sentença "isto é (...)". Os pensadores de inclinação anti-realista procurarão negar que é um objeto que se apreende diretamente por esta definição, argumentando que o que se ensina por intermédio dela é a aplicação de um predicado específico. Para Shapiro, no entanto, "a diferença entre um objeto e uma extensão de predicado (ou de uma propriedade) é relativa, isto é, depende do contexto. É similar à relatividade entre sistema e estrutura"[206]. Ele também observa que, apresentando-se ostensivamente apenas uma letra do alfabeto, a partir de seu reconhecimento individual obtém-se o reconhecimento de suas diversas formas de apresentação (suas mais diversas inscrições), e, de posse das mesmas, se passaria ao reconhecimento do seu lugar no próprio alfabeto. Um

[205] *Idem*, p. 113.
[206] *Ibidem*.

procedimento semelhante ocorreria com o caso dos pequenos números cardinais, os quais já expressariam a estrutura cardinal ou a estrutura dos cardinais finitos, com a diferença de que estas estruturas seriam o paradigma de quaisquer estruturas autônomas (*freestanding*), pois, "como tudo pode ser contado, sistemas de todos os tipos exemplificam os padrões cardinais"[207]. Faz-se, por fim, uma breve distinção entre as estruturas *cardinais* finitas e as estruturas *ordinais* finitas, cujos sistemas seriam considerados sob a égide de uma ordem particular, e apresentam-se algumas notas sobre a precedência que esta possuiria sobre aquela.

Antes de se dedicar ao estudo das estruturas infinitas, as quais apresentariam os mais sérios problemas epistêmicos para uma filosofia da matemática realista, Shapiro discute brevemente o caso dos grandes números naturais. E isto porque, para quem sustenta apenas a simples abstração em sua doutrina epistemológica, o padrão reconhecido em um número alto, isto é, de difícil representação cardinal (um milhão, por exemplo), apresentaria os mesmos problemas entrevistos em padrões infinitos, especialmente a impossibilidade de se poder defini-lo ostensivamente. Lembre-se que, se o tratamento das pequenas estruturas finitas permanece epistemologicamente satisfatório, isto se deve em larga medida ao fato de que nosso aparato sensorial percebe os mais diversos sistemas que as exemplificam, autorizando sua definição ostensiva em ao menos uma das três formas mencionadas. Ele especula que o caso dos grandes números talvez decorra de alguma *projeção* deste tratamento oferecido às pequenas estruturas, isto é, "refletindo sobre estes padrões finitos, compreende-se que a sequência de padrões prossegue perfeitamente além dos estágios em que observa suas instâncias"[208], o que o leva a considerar sua estrutura *ante rem* como uma possível justificativa para a fundamentação desta sugestão. Obviamente, um filósofo de inclinação anti-realista poderia até aceitar o argumento apresentado, pautado pela *projeção*, como uma razão plausível para se justificar a *crença* na existência de estruturas que garantam estes padrões identificados em números altos. Ele, no entanto, não apenas deixaria de qualificá-las como estruturas *ante rem*, como também não subscreveria semelhante argumento como a justificativa para a possibilidade de *conhecimento* das mesmas. Shapiro avança, deste modo,

[207] *Idem*, p. 115.
[208] *Idem*, p. 118.

em direção às estruturas infinitas, as quais são diretamente identificadas com a estrutura dos números naturais[209]. Assim, bem definidas as estruturas finitas ("grandes" ou "pequenas"), introduz-se a possibilidade de ordenação com o estabelecimento de um padrão maior para cada padrão constatado, podendo-se, inclusive, utilizar uma variação dos axiomas formulados por Peano para esta finalidade. Pensa-se, então, que é a caracterização destes padrões enquanto constituintes de uma *estrutura ante rem* que melhor descreve a sua *progressão infinita*, ou que melhor define o seu caráter *potencialmente infinito*. E somente com uma boa definição desta propriedade das estruturas se poderão compreender quaisquer estruturas infinitas, sejam elas sequências enumeráveis (como a dos números inteiros ou dos números racionais compreendidas como variações da sequência dos números naturais), sejam as estruturas não-enumeráveis (como a dos números reais, compreendidas por intermédio dos cortes de Dedekind ou das sequências de Cauchy).

Shapiro apropria-se em seguida da rota epistemológica apresentada por Robert Kraut. Esta rota, apesar de não ser pensada para o desenvolvimento de uma filosofia da matemática, proporia em sua concepção uma interessante via de acesso às estruturas. O ponto de partida de sua argumentação seria o princípio de indiscernibilidade dos idênticos, tal como proposto por Leibniz, para, a partir dele, discutir as noções de objeto e de identidade. Isto é, afirma Shapiro que

> "Kraut combina esta tese [o princípio de Leibniz, o qual, em sua formulação, afirma que: se dois objetos não podem ser distinguidos – isto é, se tudo o que for verdadeiro para um é verdadeiro para o outro –, então os objetos podem ou devem ser identificados] com a observação de que o que é "discernível" depende dos recursos conceituais disponíveis. O resultado é uma teoria da relatividade dos objetos, bastante consoante com a presente relatividade dos objetos e relatividade dos sistemas e das estruturas"[210].

Uma série de conceitos são desenvolvidos no curso da exposição desta aproximação entre as teses de Kraut e as suas teses *ante rem*, em especial as noções de *equivalência* (para a ontologia que sustenta uma linguagem interpretada) e de *congruência* (definida em uma sub-linguagem para tornar indiscerníveis os objetos equivalentes) logo após as noções de *relações*

---

[209] Ressalte-se que a *série* dos números naturais seria apenas uma das *instâncias* da *estrutura* dos números naturais.
[210] *Idem*, p. 121.

equivalentes e *classes equivalentes*. O caso especial em relação a estes conceitos é o caso dos *sistemas*, e Shapiro se questiona sobre a existência de uma linguagem na qual eles pudessem ser congruentes, e, assim, indiscerníveis (lembre-se que eles possuem a mesma estrutura caso sejam isomórficos ou estruturalmente equivalentes). Pensa-se, então, que o aparato conceitual da matemática pura devidamente regimentado poderia servir como um exemplo para tanto, afinal, as próprias estruturas, quando observadas sob uma perspectiva objetal, poderiam exemplificar a si próprias e tornar-se indiscerníveis em relação aos sistemas. Sem entrar em todos os detalhes desta discussão, a qual traceja a sua *definição lingüística*, esboço agora a discussão que procura caracterizar sua noção de *definição implícita*[211].

A partir da constatação de que haveria limites às técnicas epistêmicas até agora discutidas, Shapiro introduz a noção de *definição implícita*, a fim de com ela designar uma coleção de sentenças que normalmente são nomeadas como "axiomas". Deste modo, as estruturas adequadas a este processo de definição poderiam ser consideradas como estruturas *ante rem*, desde que determinadas questões fossem resolvidas. Menciona-se, por exemplo, a contraposição que existiria entre as teses sustentadas pelos platonistas tradicionais e pelos estruturalistas acerca da relação entre estes axiomas e as diversas teorias matemáticas; bem como o problema em se delimitar as mínimas características que garantiriam o bom processamento de tais axiomas. Naquele caso, pensa Shapiro, enquanto o primeiro grupo afirmaria alguma espécie de independência entre ambos – isto é, enquanto sustenta-se que haveria alguma autonomia dos axiomas em relação às teorias –, o segundo afirmaria a inexistência da mesma, pois compreende esta autonomia como uma possibilidade de todos os axiomas provarem-se falsos, algo impossível em sua concepção. Já neste caso, acerca do conjunto de características mínimas necessário, avançar-se-ia a argumentação em direção a uma nova seção, na qual se discutem a *existência* e a *singularidade* de uma estrutura por intermédio das noções de *coerência* e de *categoricidade*. Desta forma, estabelece-se como condição existencial o fato de que *ao menos* uma

[211] Apesar de sua importãncia, desenvolver a definição linguística proposta por Shapiro fugiria ao percurso argumentativo da presente dissertação, pois o mesmo teria de ser bem delineado frente às considerações de matiz anti-realista que também reivindicariam para si tal processo de definição.

estrutura satisfaz um conjunto de axiomas, e como condição de singularidade o fato de que *no máximo* uma estrutura (salvo isomorfismo) é descrita pelo mesmo conjunto. A fim de fundamentar esta característica, a singularidade, Shapiro se utiliza da noção de *categoricidade*, afirmando que "como o isomorfismo entre sistemas é suficiente para caracterizar a noção de "mesma estrutura", uma teoria categórica caracteriza uma estrutura singular se ela caracteriza alguma coisa"[212]; já a fim de fundamentar a noção de existência utiliza-se da noção de *coerência*, tomando-a como uma noção "primitiva, intuitiva e não redutível a uma definição formal"[213] e que melhor se explicaria quando relacionada à *satisfabilidade matemática*, pois "a extensão da satisfabilidade parece razoavelmente próxima da extensão da noção intuitiva de coerência. A idéia é que a satisfabilidade está para a coerência assim como a recursividade está para a computabilidade"[214].

Conclui-se desta discussão epistemológica uma posição sobre a relação entre as noções de linguagem e referência, afinal, "a maior parte destas técnicas epistêmicas sugere uma tensa ligação entre a compreensão da linguagem e o conhecimento das estruturas [apesar de ser a] linguagem a responsável pelo nosso acesso epistêmico às estruturas"[215]. Shapiro considera que uma estrutura nunca é definida em função dos lugares que possui, mas em função da *relação* que estes lugares sustentam entre si. De modo que, como estas relações recebem sua substancialidade na linguagem, é "o uso correto da linguagem que *determina* o que as relações são"[216]. Retorna-se assim ao problema de Tarski e à delimitação das regras que regulariam a noção de *referência* em uma estrutura, pois, como a semântica da estrutura é formulada em teoria dos modelos, seriam definidos operacionalmente (ou *estruturalmente*) somente os termos semânticos de sua linguagem (basicamente, suas constantes e seus predicados). A noção de *referência* não apenas seria estranha à caracterização da epistemologia das estruturas, como estas também seriam compreendidas sob o seu caráter *autônomo* (*freestanding*), seja este a ausência de restrição aos objetos que poderão ocupar os lugares nelas presentes. A fim de finalizar todo o tratamento epistemológico

[212] *Idem*, p. 133.
[213] *Idem*, p. 135.
[214] *Ibidem*.
[215] *Idem*, p. 137.
[216] *Ibidem*.

levantado por Shapiro, deve-se fazer menção ao seu *interlúdio ontológico*, no qual se afirma que

> "vários relativismos ocorrem periodicamente ao longo deste livro. O que é uma estrutura a partir de uma perspectiva é um sistema a partir de outra. O que é um lugar operacional de um ponto de vista é um objeto a partir de outro. As presentes considerações sugerem uma variação neste tema. "Objeto matemático" deve ser entendido como relativo *a uma teoria*, ou, de maneira mais ampla, a um arcabouço conceitual de base. Números naturais são objeto *da aritmética*, mas "números naturais" podem não designar objetos em outra teoria ou em outro arcabouço conceitual. Em particular, números naturais podem não ser objetos na linguagem original de base com a qual começamos. Eles podem ser lugares operacionais. [...] Nossa conclusão é que, em matemática, ao menos, pode-se pensar em "objeto" como uma elíptica para "objeto em uma teoria""[217].

[217] *Idem*, p. 126.