2.
Objetos Lógicos ou Estruturas Abstratas?

Convidado para uma conferência na qual se debateria o estado das discussões em filosofia da matemática, Paul Benacerraf propõe uma reflexão acerca de seus dois artigos publicados nos periódicos *Philosophical Review* (Jan/65) e *Journal of Philosophy* (Nov/73), intitulados, respectivamente, "What Numbers Could Not Be" e "Mathematical Truth". Esta reflexão foi apresentada textualmente em duas partes (em 1996 e em 1999), combinando aqueles trabalhos com outros aspectos que não por eles não foram contemplados. Na qualidade de exemplo, podem ser mencionados a descrição do cenário da filosofia desenvolvida nos Estados Unidos da América nas décadas de cinquenta e sessenta, bem como a apropriação de resultados metamatemáticos para finalidades filosóficas (como o teorema Löwenheim-Skolem e o teorema da incompletude de Gödel). Apesar de não constituírem o tema deste capítulo, estas observações ajudam a dispor de maneira interessante os elementos utilizados em seus artigos anteriores, de modo que elas serão devidamente mobilizadas caso necessário. Afinal, este capítulo concentra-se em esquadrinhar o artigo "What Numbers Could Not Be"[9] com a intenção de ressaltar as razões que permitiriam considerá-lo como o *responsável* pelos futuros desdobramentos da corrente estruturalista a partir de um problema de matriz fregeana.

A organização do artigo evidencia uma estratégia crítica curiosa. A partir de um esquema triádico, Benacerraf propõe um experimento de pensamento com a intenção de explicitar alguns dilemas da proposta logicista em relação à apreensão cognitiva da natureza numérica, para, por fim, esboçar algumas soluções conceituais para tais dilemas. Não seria inapropriado recordar a sugestão de Russell, a fim de se justificar tal estratégia: "uma teoria lógica pode ser testada por sua capacidade em lidar com enigmas, e é um bom plano, ao pensar-se acerca

[9] Doravante, WNCNB.

da lógica, acumular a mente com tantos enigmas quanto possíveis, uma vez que estes servem ao mesmo propósito que os experimentos na ciência física”[10]. Assim, imagina-se como enigma o fato de duas crianças, filhas de logicistas militantes cujas orientações pedagógicas são organizadas a partir de explícitos princípios epistêmicos, receberem uma educação que diverge acerca de determinadas teses. Ao final do artigo, para se evitar tal divergência, são sugeridos alguns esclarecimentos conceituais, os quais também se subdividem em três seções – *identidade, educação e explicação*, e, por fim, *números e objetos*.

Seria possível estudar Benacerraf sem alguma referência às suas epígrafes? Penso que não. Suas escolhas epigráficas constituem um capítulo a parte em muitos de seus artigos, pois seu repertório de citações vai de Jorge Luís Borges até parábolas judaicas, sem deixar de mencionar epístolas de São Paulo e discursos de Mao Tse Tung[11]. De menor poder alegórico, político e religioso, as epígrafes de WNCNB podem ser concebidas como uma *antecâmara conceitual* à oposição teórica que se estabelecerá ao longo de todo o texto. Encontra-se, pois, por um lado, uma difícil citação de Frege, na qual se formula o *problema de Júlio César*, ao passo que, por outro, deparamo-nos com a eloquente passagem do filósofo norte-americano Richard N. Martin, concentrada na contraposição entre os interesses de um filósofo (sensível às questões lógicas) frente àqueles manifestados por um matemático. Como se retornará à citação de Frege durante o curso do artigo, discuti-la-ei em maior detalhe no momento apropriado; em contrapartida, a clareza da passagem de Richard Martin dispensa os extensos comentários que se lhe poderiam destinar. O matemático, para ele, orientaria as suas atenções para a *estrutura matemática*, residindo seu prazer intelectual ou na descoberta da estrutura que subsume uma teoria dada, ou na descoberta da maneira pela qual uma estrutura pode ser modelada em outra com a qual se relacione, ou ainda, na simples descoberta de uma nova estrutura, junto das relações que esta sustenta com as previamente existentes; já o filósofo seria “mais

[10] RUSSELL 1974, p. 14.
[11] Benacerraf cita uma pequena passagem do conto “Funes, el memorioso” no artigo “Recantation or Any old ω-sequence would do after all”, bem como uma parábola judaica no prólogo de “What Mathematical Truth Could Not Be - I”. Aloja também a “Primeira Epístola de São Paulo aos Coríntios” e alguns discursos de Mao Tse Tung como epígrafes ao artigo “What Mathematical Truth Could Not Be – II”.

sensível a assuntos de ontologia e interessa-se especialmente pela espécie ou espécies de entidades existentes”[12]. Isto é, por se encontrar insatisfeito com as explicações estruturalistas em matemática, ele empreende uma investigação mais aprofundada dos objetos utilizados nos domínios desta ciência, com o intuito de oferecer-lhes uma caracterização mais precisa. “Ele também”, afirmará Martin, “desejará questionar se a entidade considerada é *sui generis* ou se ela é, em algum sentido, *redutível* a outras (ou *construída* em termos de outras), talvez, entidades mais fundamentais”[13].

Com a preservação desta distinção no horizonte temático, avança-se em direção à primeira seção de WNCNB, intitulada “A Educação”. Nela, Benacerraf imagina duas crianças que seriam filhas de logicistas militantes, sejam elas Ernie e Johnny. Sua educação, em função da militância de seus pais, foi epistemologicamente ordenada, de maneira que elas não aprenderam imediatamente a contar; ou seja, em vez de iniciar sua formação matemática pela aritmética usual, como qualquer criança no curso de sua educação básica, primeiro elas aprenderam a lógica subjacente à mesma, a qual, neste caso, é identificada com a teoria dos conjuntos. Faz-se interessante ressaltar que o termo *logicismo* designa o projeto intelectual levado a cabo por Frege até a publicação do segundo volume de seus *Grundgesetze der Arithmetik*, em 1903, e que pretendia, de maneira sumária, fundamentar a analiticidade das sentenças matemáticas por intermédio de uma redução das mesmas às leis lógicas mais básicas, como nos permite entrever os primeiros parágrafos de seus *Grundlagen der Arithmetik*[14]. De tal modo que, para estas crianças, a aprendizagem dos números seria análoga ao aprendizado de um novo idioma para a mesma realidade, ou ainda, “antigas verdades (próprias à teoria dos conjuntos) vestindo novas roupas (próprias à teoria dos números)”[15]. Uma última ressalva, do ponto de vista cênico, permite atestar que a referência para o nome destas duas crianças encontra-se nos criadores das

[12] BENACERRAF 1965, p. 47.
[13] *Ibidem*.
[14] Cf. FREGE 1974, §§3-4. Faz-se interessante notar que Richard Dedekind também possuía um projeto logicista, fundamentado em pressupostos epistemológicos diferentes daqueles que foram sustentados por Frege. Ainda que jamais o tenha desenvolvido detalhadamente, uma discussão interessante acerca de seu teor pode ser entrevista no artigo de William Demopoulos e Peter Clark intitulado “The Logicism of Frege, Dedekind, and Russell” (*in* SHAPIRO 2005, p. 129-165).
[15] BENACERRAF 1965, p. 48.

primeiras axiomatizações disponíveis para a teoria dos conjuntos, sejam eles os matemáticos Ernst Zermelo e John von Neumann[16].

Concentrando-se então na educação de Ernie, que bem poderia ser a de Johnny, Benacerraf inicia sua exposição conceitual. Os números naturais são apresentados através da noção *elementos do conjunto (infinito)* $\mathcal{N}$ e organizados por intermédio da relação *menor que*, a qual, por fundamentar a *boa ordem* do conjunto, sempre será referida como a relação ***R***. De maneira intuitiva,

> "Ernie pode verificar que todo subconjunto não-vazio de $\mathcal{N}$ contém um "menor" elemento – isto é, um elemento que sustenta ***R*** para todos os outros membros do subconjunto. Ele também pode mostrar que nada garante ***R*** para si próprio, e que ***R*** era transitiva, assimétrica, anti-reflexiva e conectada em $\mathcal{N}$. Em resumo, os elementos de $\mathcal{N}$ formavam uma progressão, ou série, sob ***R***"[17].

Conceitua-se pois o menor elemento desta série como o elemento distinguido *a* de $\mathcal{N}$, bem como a relação de *sucessor* como uma relação que apenas apresenta o *próximo* elemento de $\mathcal{N}$ sob ***R*** a partir de *a*. Em resumo, devido a sua posição epistemologicamente privilegiada, Ernie estabelecerá em sua linguagem todos os axiomas de Dedekind-Peano para a aritmética de primeira ordem. A partir desta apreciação inicial, outros conceitos serão tranquilamente traduzidos por ele, como as *operações* passíveis de serem efetuadas com os elementos de $\mathcal{N}$ (adição, multiplicação e exponenciação) e as suas respectivas *aplicações extra-matemáticas* (contagem e mensuração), adotando o procedimento adequado a cada caso. Isto é, enquanto a tradução das *operações* ocorrerá por intermédio de definições explícitas, isto é, por meio da apresentação de suas condições necessárias e suficientes, a tradução das *aplicações* ocorrerá por meio de uma minuciosa análise da noção de "contagem", a qual será um pouco mais explorada.

São consideradas duas maneiras distintas de se compreender o processo de contagem, cada uma expressando um possível *uso* do verbo *contar*. Benacerraf discute desse modo um processo de contagem *transitivo*, que admitiria enquanto seu complemento um objeto a ser referido, e um processo *intransitivo*, que

[16] Zermelo, com efeito, propôs uma axiomatização para a teoria dos conjuntos de Georg Cantor no artigo "Investigations in the foundations of set theory I", publicado em 1908, ao passo que von Neumann a propôs no artigo "An axiomatization of set theory", publicado em 1925 (Cf. VAN HEIJENOORT 1967, p 199-215 e p. 393-413).

[17] BENACERRAF 1965, p. 48.

desprezaria semelhante acréscimo. Para a melhor compreensão deste último, ele narra uma pequena história, o caso do paciente que está sendo preparado para a sala de operação. De modo que "uma máscara de éter é posta sobre seu rosto e lhe é dito para contar, tanto quanto puder. Ele não foi instruído para contar alguma coisa. Foi-lhe dito meramente para contar"[18]. Também se discute o fato de que se costuma anexar a esta distinção gramatical uma ordem de aprendizado, a qual refletiria fortes teses epistêmicas. Isto é, devido ao fato de costumeiramente aprendermos os primeiros números a partir de sua aproximação com pequenos conjuntos de objetos materiais, e, somente a partir daí, aprendermos a maneira de gerar o "restante" da cadeia numérica, a *verdadeira* abordagem da natureza dos números deveria considerar uma precedência epistêmica da contagem *transitiva* sobre a *intransitiva*. De modo que para compreender de uma maneira mais lúcida o problema envolvido nesta concepção (o qual será relevante para as aplicações extra-matemáticas), Benacerraf rejeita num primeiro momento qualquer tipo de ordenação, mantendo em seu horizonte de análise apenas a distinção entre os *usos* do verbo "contar", em especial a contagem *transitiva*.

"Contar os membros de um conjunto é *determinar* a cardinalidade deste conjunto"[19]. Esta *determinação* processa-se através de uma *relação particular* obtida entre os elementos de um conjunto e um número específico (isto é, um elemento de $\mathcal{N}$), a qual estabelece que, para se determinar o número k de membros de um conjunto, devem-se tomar os seus elementos da mesma maneira como se tomam os números naturais, isto é, individualmente. Iniciando-se tal correspondência pelo número um, o último número da relação será, em ordem de magnitude, o número k do conjunto. Pode-se retomar a clássica definição de Georg Cantor neste momento, pois ele afirma ao início de suas *Beiträge* que o número cardinal é "o conceito geral que [...] surge de um conjunto quando fazemos a abstração da natureza de seus vários elementos e da ordem na qual eles são oferecidos"[20]. E já que Benacerraf está efetuando uma equivalência entre conjuntos (notadamente, o numérico e o extra-numérico), pode-se novamente aproximar sua teoria do pensamento de Cantor, pois, para este, dois conjuntos são

[18] *Idem*, p. 49-50.
[19] *Idem*, p. 50.
[20] CANTOR 1915, p. 86 [482].

equivalentes quando "se é possível colocá-los, por alguma lei, em tal relação com o outro que, para todo elemento de cada um deles, corresponda um e apenas um elemento do outro"[21]. De todo modo, será um teorema no sistema de Ernie que "qualquer conjunto terá *k* membros se e somente se puder ser colocado em uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números menores ou iguais a *k*"[22].

Para finalizar a exposição da educação logicista recebida por Ernie, uma última condição é destacada por Benacerraf: a relação ***R*** precisa ser recursiva, e, talvez, primitiva recursiva. Ele observa que esta condição jamais foi destacada em análises conceituais do número, mas que sua presença é por demasiado óbvia para ser objeto de polêmicas. A razão para que ela seja explicitada deriva das concepções veiculadas por Quine em *Word and Object*, para quem qualquer suposição acerca da relação que ordena os números é dispensável, considerando-se que "a única condição sobre a qual todas as explicações aceitáveis do número (isto é, os números naturais) podem ser postas é a seguinte: qualquer *progressão* – i.e., qualquer série infinita na qual cada um dos membros possui apenas um numero finito de precursores – servirá"[23]. Benacerraf então propõe um contra-exemplo para a tese de Quine, com a intenção de argumentar que, se não é possível identificar uma regra recursiva que justifique o processo de geração dos elementos de um conjunto, não se pode identificar uma diferença ordenada de sua magnitude. Seu exemplo, desta maneira, utiliza os números de Gödel de fórmulas válidas e de fórmulas não-válidas da teoria quantificacional como índex para os números inteiros positivos.

Esta conclusão obriga Benacerraf a ressaltar dois problemas que com ela travariam estrita relação. O primeiro diz respeito à natureza humana, enquanto que o segundo se vincularia ao limite do conhecimento humano. Deste modo, ele questiona se é possível ao organismo humano caracterizar-se como um "procedimento de decisão para conjuntos não-recursivos" ou, ao menos (na melhor das hipóteses), como uma máquina de Turing. O desenvolvimento da segunda hipótese concluiria que o ser humano não pode gerar uma progressão

[21] *Ibidem*.
[22] BENACERRAF 1965, pp. 50-51.
[23] QUINE 1960, p. 262 [§54]. Nesta razão também se apóia Quine para justificar sua negação da necessidade de explicação de um processo de contagem *transitivo*.

numérica análoga à *A*, tampouco *saber* que era isso que ele pretendia fazer (gerar tal sequência); enquanto que o prosseguimento fornecido à primeira hipótese conduziria à outra questão, de natureza epistemológica, que especula sobre a *possibilidade de conhecer todas as verdades da forma i < j*. Indicados ambos os problemas, Benacerraf reitera que a relação ***R*** *precisa* ser primitiva recursiva, ainda que uma prova mais rigorosa não possa ser oferecida[24]. O fato de esta característica encontrar-se implícita nas mais diversas apresentações desta relação entre os números constituiria uma boa evidência para sua corretude, e, ao se destaca-la, pretende-se apenas iluminar determinados problemas que demandarão uma análise futura.

Efetiva-se assim todo o processo educativo de Ernie, que bem poderia ser o de Johnny. Tudo aquilo que é necessário para se teorizar com o auxílio do conceito de número encontra-se a disposição destas pequenas crianças logicistas, constituindo sua única tarefa a aprendizagem do vocabulário *comum* em que estas teorias se veiculam[25]. Benacerraf afirma, por fim, que a tarefa de "reduzir" o conceito de número à lógica (ou à teoria dos conjuntos) não acrescenta nenhuma novidade à prática matemática, isto é, tudo o que se pode fazer com a "linguagem *logicista*" de Ernie e Johnny poderia ser tranquilamente realizado com a *linguagem comum* empregada pelos matemáticos. Mesmo não contribuindo para a prática, continua ele, tanto Ernie quanto Johnny sabem, agora, o que os números *realmente são*. De maneira que, para recapitular todo o processo de tradução, fez-se necessário

> "(I) oferecer definições de "1", "número", e "sucessor", e "+", e "x", e assim por diante, em base das quais as leis da aritmética possam ser derivadas"; e (II) explicar os usos "extra-matemáticos" dos números, sendo o principal a contagem – introduzindo assim o conceito de *cardinalidade* e número cardinal"[26].

[24] Será sobre esta necessidade da recursão que incidirá o artigo "Recantation or Any old ω-sequence would do after all". Sem entrar nos meandros de sua argumentação, Benacerraf afirma que adicionar esta condição constituiu um erro, afinal, "qualquer sequência-ω servirá, não importando o quanto a relação ***R*** seja indecidível" (BENACERRAF 1996, p. 189).

[25] A importância que Benacerraf oferece à *comunicação* surge em dois momentos de seu artigo. Neste momento, em que se salienta a necessidade de Ernie e Johnny se comunicarem com as pessoas comuns, e, mais adiante, no momento em que se procura justificar a existência de uma notação unificada para se expressarem os números.

[26] BENACERRAF 1965, p. 54.

Também constitui uma tese fundamental o fato de a relação de ordem sustentada por este conjunto ser primitiva recursiva. Agora, Ernie e Johnny poderão se dedicar à prova dos mais diversos teoremas, pois se encontram amparados não apenas pelo *instrumental matemático*, como também pelo conhecimento da *natureza dos conjuntos* aos quais os números se referem.

Um problema, porém, imediatamente vêm à tona: o número 3 pertenceria ou não ao número 17? Ernie pensa que sim, ao passo que Johnny pensa que não. A fim de fundamentar sua opinião, Ernie apresenta o seguinte teorema: *para qualquer par de números, x e y, x é menor do que y se e somente se x pertence a y, e x é um subconjunto próprio de y*. De maneira que, a partir de uma admissão comum de que 3 é menor do que 17, segue-se naturalmente que 3 pertence a 17. Johnny, por seu turno, contrapõe-se ao que nomeou como o *teorema de Ernie*, pois, de acordo com sua concepção: *dados dois números, x e y, x pertence a y se e somente se y é o sucessor de x*. “Excluindo a possibilidade de inconsistência da teoria dos conjuntos compartilhada por ambos, a incompatibilidade talvez resida nas definições”[27], pondera Benacerraf. Sua análise, então, orienta-se para a relação ***R*** anteriormente definida, pois ela, com efeito, é a primeira relação considerada para o conjunto (infinito) $\mathcal{N}$. Esta noção permite entrever que *x é menor do que y se e somente se x preserva **R** para y*, fato que ambas as teorias defendem consistentemente. “Uma pequena exploração, contudo, revelou a fonte do problema. Para Ernie, *o sucessor de um número sob **R** era o conjunto consistindo de x e de todos os membros de x*, enquanto que, para Johnny, *o sucessor de x era simplesmente {x}, o conjunto unitário de x – o conjunto no qual o único membro é x*”[28]. Figurado em linguagem conjuntística, Ernie considera a série dos números como correspondente à seguinte progressão: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$...; enquanto que Johnny, diferentemente, identifica à sua sequência de números a série $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$...

Estes teoremas logo conduzirão a uma séria divergência acerca da noção de *cardinalidade*. Afinal, ainda que ambos concordassem com a tese de que a correspondência biunívoca entre dois conjuntos somente será possível se os seus

[27] *Ibidem*.
[28] *Idem*, p. 55.

elementos puderem ser relacionados por uma função bijetora, as implicações daí extraídas não se encontrariam de comum acordo. Johnny discorda da pretensão de Ernie em colocar um conjunto com *n* elementos em uma correspondência biunívoca com o *próprio número n*, pois, para ele, todo número é um elemento singular – isto é, enquanto que, para Ernie, 17 possui 17 membros, para Johnny, ele possui apenas um. Benacerraf então considera que "sob as circunstâncias, torna-se perfeitamente óbvio porque estes desentendimentos ocorrem. Mas o que não se torna perfeitamente óbvio é como eles irão resolvê-los"[29]. Afinal, se as teses anteriores estavam corretas, ambos eram versados em lógica (teoria dos conjuntos) e possuíam a mesma compreensão, a *verdadeira*, da natureza numérica. A educação epistemologicamente ordenada recebida de seus pais fazia com que eles conhecessem não apenas o objeto ao qual cada número singular reduzia-se, como também o sentido (e a referência) das palavras que expressavam este objeto e as condições cognitivas sob as quais todo o conhecimento acerca deles se assenta. Isto significa que ambos conheciam de maneira perfeitamente determinada o conjunto ao qual as pessoas comuns se referem quando se valem dos termos numéricos em suas frases. "O problema", finaliza Benacerraf, "é que os conjuntos eram diferentes em cada caso"[30].

Em maior escala, este dilema encobriria um problema de fortes implicações filosóficas. Se o projeto logicista, e o processo educativo conduzido pelos pais de Ernie e Johnny por conseguinte, oferece as condições *necessárias e suficientes* para a redução dos números a conjuntos, "o fato de que eles discordam quanto ao conjunto particular que os números são é fatal para a visão que sustenta ser cada número algum conjunto particular"[31]. Afinal, "se o número 3 é realmente algum conjunto particular *b*, não pode acontecer de duas abordagens diferentes do sentido de "3" – e também de sua referência – assinalarem dois conjuntos diferentes para 3"[32]. Em uma terminologia fregeana, sugere Benacerraf, é como se ambas as crianças não apenas fixassem *sentidos* diferentes para as expressões numéricas em questão, como também fixassem *referências* distintas para estes

[29] *Ibidem*.
[30] *Ibidem*.
[31] *Idem*, p. 56.
[32] *Ibidem*.

mesmos termos. Surgem no horizonte, assim, duas possíveis linhas de investigação para esta dificuldade: por um lado, sustentar que ambas as apreciações continuam a apresentar o conjunto de condições necessárias e suficientes, de maneira que se poderão sustentar simultaneamente as expressões “3 = {∅, {∅}, {∅, {∅}}}” e “3 = {{{∅}}}”; por outro lado, aceitar que não podem ambas apresentar este conjunto de condições, esquadrinhando qual destas abordagens apresentaria condições que não são necessárias, e que, por esta razão, também falharia na apresentação do conjunto de condições suficientes. A primeira opção é obviamente contraditória, de maneira que será trilhada por Benacerraf a segunda via de pesquisa.

“As duas abordagens concordam na estrutura geral. Elas discordam no momento em que fixam os referentes para os termos em questão”[33]. Este acordo geral, diz Benacerraf, permite entrever que ambas concordam acerca das notas definidoras da relação ***R***, da progressão recursiva e da função de sucessor definida para esta progressão, bem como sobre as operações aritméticas que lhe serão dedicadas e com o fato de a noção de cardinalidade ser definida a partir da noção de progressão anteriormente adotada. O problema encontra-se precisamente na maneira como a noção de cardinalidade é considerada pelo pensamento de Ernie e de Johnny, pois, para Ernie, “o fato de que o número *n* tem *n* membros é explorado para definir a noção de *ter n membros*”[34]. Como se supôs não ser o caso de o número 3 referir-se a dois objetos distintos, vislumbra-se aqui outra bifurcação na trajetória argumentativa: “ou todas as condições listadas, as quais ambas as abordagens compartilham, são necessárias para uma correta e completa abordagem, ou algumas não o são”[35]. Assumir a primeira opção, continua, significa assumir que as condições supérfluas não são compartilhadas por ambas as teorias. Novamente, surgem duas opções, pois ao menos uma das abordagens que satisfaz o conjunto de condições consideradas necessárias é correta, ou nenhuma o é. “Claramente, elas não podem ser ambas corretas, dado que não são nem extensionalmente, nem intensionalmente equivalentes”[36]. A condição para a

[33] *Ibidem*.
[34] *Idem*, p. 57.
[35] *Ibidem*.
[36] *Ibidem*.

corretude de uma abordagem, na presente situação, se esgotaria na apresentação do que os números são *de fato*, e a pergunta que permanece irresoluta é se existiriam argumentos para sustentar o objeto ao qual os números *realmente* se referem. Afinal, "se os números constituem-se como um conjunto particular e não outro, deve então haver argumentos para se indicar qual"[37]. Para esclarecer semelhante questão, Benacerraf empreende uma análise de enunciados de identidade da forma "*n* = ...".

O conjunto de idéias exposto até aqui conduz à idéia de que se os números configuram-se como um conjunto específico, devem existir argumentos que sustentem semelhante tese, pois, caso esta explicitação não seja possível, a identificação proposta permanecerá seriamente prejudicada. Em outras palavras, *subtraída de argumentos, esta identificação não existirá*. Benacerraf estudará então as idéias desenvolvidas pelo *logicismo* de Frege com a intenção de melhor analisar o tratamento dedicado por esta teoria aos enunciados de identidade. Faz-se conveniente recordar que uma de suas epígrafes apresentava o *problema de Júlio César* desenvolvido no qüinquagésimo sexto parágrafo de seus *Grundlagen der Arithmetik*. Este problema, com efeito, praticamente inaugura a seção na qual Frege propõe seu conceito de número, constituindo-se, de certa forma, como um desafio conceitual para sua própria teoria. De maneira que o percurso analítico até aqui trilhado focalizará agora a apresentação das idéias fregeanas acerca dos objetos que os números *verdadeiramente* são, para, na sequência, retornar ao estudo efetuado por Benacerraf acerca destas teses.

O trabalho apresentado em 1884 por Frege almeja, como seu subtítulo permite entrever, constituir-se como uma *investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*. Pondera-se, no entanto, que "uma investigação radical do conceito de número deverá sempre resultar um tanto filosófica"[38], afinal, "essa tarefa é comum à matemática e à filosofia"[39]. Dividido em quatro seções, ao longo das três primeiras Frege se detém na apresentação e na confrontação das mais diversas teorias existentes acerca da natureza numérica, "a fim de desmentir a

[37] *Idem*, p. 58.
[38] FREGE 1974, p. 201.
[39] *Ibidem*.

ilusão de que, com respeito aos números inteiros positivos, reina a concordância geral, não havendo propriamente nenhuma dificuldade"[40]. Ele analisa, assim, as teses expostas por Leibniz, Spinoza, Newton, Berkeley, Kant, John Stuart Mill e Georg Cantor, submetendo-as aos mais diversos problemas, e observando as suas insuficiências, para, na última seção, apresentar sua própria posição com respeito ao *conceito de número*. E se esta seção almeja demonstrar a tese de que *cada número singular é um objeto independente*, o problema da identidade numérica recebe uma atenção especial, pois é por intermédio desta noção que se poderá apreender de maneira determinada a unidade do objeto numérico. Assim, afirma Frege que, apesar da concordância de que "a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito"[41], por meio das definições até ele oferecidas nunca se poderia decidir "se a um conceito convém o número Júlio César, se este famoso conquistador da Gália é ou não um número"[42].

A sofisticação deste problema justifica sua utilização por parte de Benacerraf contra a teoria fregeana. Afinal, em primeiro lugar, Frege procura excluir a tese de que os números não seriam objetos devido ao fato de não podermos determiná-los espacialmente. Em verdade, "uma determinação do lugar do número 4 não tem nenhum sentido; mas segue-se daí apenas não ser ele um objeto espacial, e não que não seja um objeto em absoluto. Nem todo objeto está em algum lugar. Também nossas representações não estão em nós (subcutaneamente)"[43]. Em seguida, ele caracteriza a relação entre uma *representação* e um *pensamento* como uma relação *exterior*, *arbitrária* e *convencional*, fundamentando-se em algumas evidências curiosas que nem sempre são seriamente consideradas. Por exemplo, a ausência de uma representação *genuína* da distância que separa a Terra do Sol, e mesmo do próprio planeta Terra, não são problemas para o desenvolvimento científico, atestando que "bem freqüentemente somos conduzidos pelo pensamento até muito além do representável, sem perder com isso a base para nossas conclusões"[44]. Na

---

[40] *Ibidem*.
[41] *Idem*, §55.
[42] *Idem*, §56.
[43] *Idem*, §61.
[44] *Idem*, §60.

sequência, em função dos princípios veiculados na introdução de seu trabalho[45], conduz-se o argumento para a tese de que *para obter o conceito de número, deve-se estabelecer o sentido de uma equação numérica*, preservando-se que "o número singular, precisamente por constituir apenas uma parte do predicado, já aparece como objeto independente"[46]. Nos domínios desta proposição numérica, por sua vez, se procurará respeitar a um princípio atribuído a Hume que definiria um critério geral de igualdade entre os números, até chegar-se à definição de que "o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito "equinumérico ao conceito F"".

Três características dos números se encontrariam assim garantidas para Frege: são objetos independentes, não localizáveis no espaço, e carentes de uma representação ou intuição. Eles, no entanto, também permaneceriam carentes de determinação, e, para que esta ocorra (e possibilite-lhes a atribuição de um numeral), faz-se necessário indicar um critério de igualdade entre os números, ou seja, "devemos dispor de um critério para decidir, em qualquer caso, se *b* é o mesmo que *a*"[47]. Frege se dispõe, portanto, a analisar o conteúdo da proposição "o número que convém ao conceito F é o mesmo que convém ao conceito G" sem se valer da expressão *o número que convém ao conceito F*. Utilizando-se do princípio de Hume, o qual suscita uma larga discussão na literatura filosófica posterior[48], diversas questões emergem em seu texto, muitas vezes pontuadas por fortes teses. Por exemplo, considera-se inicialmente a necessidade de a identidade ser compreendida de maneira geral, pois a igualdade numérica apenas constitui-se como tal devido ao fato de ser uma particularidade dela. Como o conceito de número não se encontra perfeitamente determinado, faz-se fundamental obter a partir do conceito geral de igualdade uma noção daquilo que deve ser considerado como igual, a fim de se estabelecer claramente o conteúdo de uma identidade

---

[45] Com efeito, são três os princípios veiculados por Frege ao início de seu trabalho: a separação entre os domínios da lógica dos domínios psicológicos (não confundir o subjetivo com o objetivo); o princípio do contexto, e a distinção que existiria entre um conceito e um objeto. O princípio referido é o segundo, o qual afirma que "deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente" (*idem*, p. 204).
[46] *Idem*, §57.
[47] *Idem*, §62.
[48] Na enunciação de Frege o princípio é o seguinte: "quando dois números são combinados de tal modo que um tenha sempre uma unidade correspondente a cada unidade do outro pronunciamo-los iguais" (*idem*, §63).

numérica a qual, por sua vez, determinará o conteúdo do conceito numérico. Para levar a cabo tal tarefa, Frege se dispõe a esquadrinhar o juízo "a reta *a* é paralela à reta *b*".

Impressiona a minúcia da argumentação fregeana neste momento da discussão. Ela se inicia transpondo o enunciado sobre as paralelas para um enunciado sobre a direção. Com o mudança conceitual, obtém-se uma nova proposição, "a direção da reta *a* é igual à direção da reta *b*", *significando a mesma coisa* que a proposição anterior. Apropriando-se da clássica definição de Leibniz do conceito de igualdade[49], afirma Frege que "dizer como Leibniz "o mesmo", ou "igual", é irrelevante. "O mesmo" parece de fato exprimir uma coincidência perfeita, "igual" simplesmente uma coincidência sob este ou aquele aspecto. [..] Ora, na substituibilidade geral estão de fato contidas todas as leis da igualdade"[50]. No parágrafo seguinte, contudo, retorna a uma "versão" do *problema de Júlio César*, no momento em que faz a seguinte ponderação:

> "aparece ainda uma terceira dúvida quanto à nossa tentativa de definição. Na proposição "a direção de *a* é igual à direção de *b*" a direção de *a* aparece como objeto e nossa definição dispõe-nos de um meio de reconhecer este objeto novamente caso deva apresentar-se sob outra roupagem, digamos como direção de *b*. Mas este meio não atende todos os casos. Ele não permite decidir, por exemplo, se a Inglaterra é o mesmo que a direção do eixo da Terra. Perdoe-se este exemplo aparentemente absurdo! Naturalmente ninguém confundirá a Inglaterra com a direção do eixo da Terra; mas este não é um mérito de nossa definição. Ela não se pronuncia quanto a dever a proposição "a direção de *a* é igual a *q*" ser afirmada ou negada, caso *q* não seja dado também sob a forma "a direção de *b*""[51].

Para superar este problema, Frege introduz a noção de *extensão de um conceito*, a qual ele presume neste momento que todos saibam o que signifique[52]. Intermediado por ela, substituirá a noção de *reta* pela noção de *conceito*, assim como a de *paralelismo* pela *possibilidade de se coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro*, e chegará à definição de que *o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito "equinumérico ao conceito F"*. Retornando então à maneira como procurara

[49] "São iguais as coisas que, salvo a verdade, podem ser substituídas uma pela outra" (*idem*, Nt. 91, p. 251).
[50] *Idem*, §65.
[51] *Idem*, §66.
[52] Cf. *Idem*, Nt. 95, p. 254.

determinar os números inicialmente, conclui que a proposição "a extensão do conceito *equinumérico ao conceito F* é igual à extensão do conceito *equinumérico ao conceito G*" será verdadeira sempre que a proposição "ao conceito F convém o mesmo número que ao conceito G" também o for. Na sequência, Frege almeja *complementar* e *confirmar* a definição que acaba de fornecer, verificando se as propriedades dos números se adéquam à sua caracterização, afinal, "definições confirmam-se por sua fecundidade"[53]. Pois bem, a *fecundidade* de sua definição resolve o problema que ele lançou para sua própria teoria? Isto é: as *extensões de conceitos* resolveriam o *problema de Júlio César*? Enquanto Frege pensa que sim, Benacerraf pensa que não, de maneira que retorno ao estudo proposto por ele em seu artigo.

O conjunto de questões que orientam Benacerraf neste momento é o seguinte: "como alguém poderia distinguir *a* abordagem correta de todas as outras possíveis? Há um conjunto de conjuntos que possua, mais do que qualquer outro, uma forte exigência para se constituir como os números? Existem razões que alguém possa oferecer para destacar este conjunto?"[54]. Observando a definição fregeana, que considera um número como uma *classe de equivalência* e, em virtude disso, destacaria o seu caráter *predicativo*, Benacerraf ressalta a carência de evidências disponíveis para se fundamentar tal especificação. Consoante seu pensamento, a passagem de uma classe de predicados envolvendo numerais, semelhante a *possui dezessete membros*, para a consideração do próprio numeral *dezessete* como um predicado de classes constituiria um verdadeiro exagero conceitual, e esta qualificação se fundamentaria em dois argumentos distintos. O primeiro expressa uma forte razão contrária, e explicita o fato de os numerais diferenciarem-se de adjetivos, excedendo-os em importância, exatamente pela sua função "pouco predicativa", ou, dito sob outro aspecto, por não haver ocorrências de numerais em posições consideradas tipicamente predicativas (isto é, em "x é (são) ..."); e o segundo argumento, mais analítico, procuraria apresentar os números por intermédio de quantificadores, funções de verdade, variáveis e

[53] *Idem*, §70.
[54] BENACERRAF 1965, p. 58.

ocorrências dos sinais de identidade e diferença, isto é, não os destacaria enquanto *predicados*[55].

Surge neste panorama a pergunta pelo fundamento de semelhante concepção. E, para Benacerraf, este se esgota na idéia de que se duas classes possuem o mesmo número de membros, então provavelmente existirá uma classe superior que as contém em virtude disto[56]. Uma ressalva é destinada ao termo *provavelmente* que aí é utilizado, pois, para ele, esta tese varia de acordo com a teoria que se pretende desenvolver, considerando-se a *teoria dos tipos* como um exemplo que escaparia dessa "armadilha conceitual"[57]. Ele também afirma que "a existência dos paradoxos é uma boa razão para negar a "dezessete" este unívoco papel de designação da classe de todas as classes com dezessete membros"[58], concluindo que ""dezessete" não *precisa* ser considerado um predicado de classes, e que não há, similarmente, nenhuma necessidade em enxergar o número 3 como o conjunto de todas as triplas"[59]. Delineando a sua conclusão de maneira ainda mais precisa, Benacerraf pensa que não se encontra em seu horizonte conceitual negar que *ser uma classe que contém três membros* é um predicado de classes, pois não é esta a orientação de seu artigo. O que a sua argumentação estabelece é que não existe uma *única* definição de números que, à exceção de todas as outras, se constitua como *a verdadeira*. Afinal,

> "se os números são conjuntos, então eles devem ser *conjuntos particulares*, pois todo conjunto é algum conjunto particular. Mas se o número 3 é realmente um conjunto ao invés de outro, deve ser possível oferecer alguma razão forçosa para se pensar assim; pois a posição de que isto é uma verdade desconhecida é dificilmente sustentável. [...] Se tudo isto é imprescindível, então há pouco a concluir à exceção de que qualquer aspecto de uma abordagem que identifique o

---

[55] Afirma Benacerraf que a expressão "Há 17 leões no zoológico" seria interpretada da seguinte maneira: $(\exists x_1) \ldots (\exists x_{17}) (Lx_1 \wedge Lx_2 \wedge \ldots \wedge Lx_{17} \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{16} \neq x_{17} \wedge (y) (Ly \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee \ldots \vee y = x_{17})$. "O único predicado que permanece é *leão no zoológico*, "*dezessete*" dá lugar a numerosos quantificadores, funções de verdade, variáveis, e ocorrências de "=", sem o qual, obviamente, alguém desejaria considerar também estes como predicados de classes" (*idem*, p. 61).

[56] Poder-se-ia efetuar uma analogia com a argumentação de Platão em seu diálogo *Parmênides*, especialmente no momento de formulação do clássico problema do *terceiro homem*.

[57] Oswaldo Chateaubriand considera que "a teoria dos tipos de Russell foi uma das mais significativas contribuições à lógica no século vinte. [...] E embora a teoria tenha se complicado bastante, em virtude das distinções predicativas, ela é uma das verdadeiras fundações da lógica moderna" (CHATEAUBRIAND 2005, p. 210).

[58] BENACERRAF 1965, p. 61.

[59] *Ibidem*.

> número 3 com um conjunto é uma abordagem superficial – e que então 3, e seus companheiros numéricos, não podem absolutamente ser conjuntos”[60].

Se tratados adequadamente, os problemas filosóficos que este artigo tangencia originariam as mais profundas análises conceituais. Benacerraf, no entanto, procurará esboçar um desenvolvimento para a discussão apenas *por contraste*, isto é, a parte *positiva* de seu artigo permanecerá em um âmbito *sugestivo*. Para isso, ele destaca como seu objetivo oferecer uma simples *plausibilidade* à tese concluída na seção precedente, a qual estabeleceu que *os números não são conjuntos*. Suas sugestões, deste modo, organizam-se em torno dos seguintes conceitos: em primeiro lugar, o de *identidade*; na sequência, os de *explicação* e *redução*; e, por fim, os de *números* e *objetos*. Desta forma, acompanharei a partir de agora a maneira pela qual suas palavras conduzem à consideração de Charles Parsons, que em seu artigo “The Structuralist View of Mathematics Objetcs” afirma que as notas de Benacerraf “reivindicam um programa estruturalista, apesar de ele não se comprometer com isto”[61].

Ao longo de sua argumentação, Benacerraf tratou de expressões que identificavam termos numéricos com termos conjuntísticos, isto é, expressões da forma “*n* = *s*”. Considerou, junto de Frege, que estas expressões eram sempre significativas, bem como que a tarefa filosófica consistia em verificar quais os casos em que a identidade se apresentava verdadeira e quais os casos em que ela seria falsa. Aparentemente, sua conclusão era que todas seriam falsas. Uma observação minuciosa, contudo, verifica imediatamente a existência de diversas maneiras de se efetuar semelhante expressão de identidade, devido ao fato de que são diversos os “conjuntos” com os quais se identificam uma expressão numérica. Assim, este conjunto poderia ser uma expressão aritmética (algo como “$2^5 = 32$”), uma expressão que designa um número de maneira indireta (algo semelhante a “o número de canetas sobre minha mesa = 11”), ou ainda, uma expressão que em nada se pareça com as duas precedentes (tal como “$\{\{\{\varnothing\}\}\} = 3$” ou “Júlio César = 0”). Cada uma destas expressões demanda para si uma análise singular, pois são diferentes os princípios que estabelecerão tanto a sua significação, quanto o seu valor de verdade.

[60] *Idem*, p. 62.
[61] PARSONS 1990, p. 339 [Nt. 10].

Revisitando a maneira pela qual se efetua a tradução da linguagem usual para a linguagem *logicista* de Ernie e Johnny, nota-se que, para eles, faz-se necessário

> "(I) oferecer definições de "1", "número", e "sucessor", e "+", e "x", e assim por diante, em base das quais as leis da aritmética possam ser derivadas"; e (II) explicar os usos "extra-matemáticos" dos números, sendo o principal a contagem – introduzindo assim o conceito de *cardinalidade* e número cardinal"[62].

Estes dois requerimentos, quando tratados sob a forma de princípios, garantem de maneira efetiva a significação das duas primeiras identificações indicadas, isto é, a identificação entre um número e uma expressão aritmética, e a identificação entre um número e uma expressão que o designe de maneira indireta. Benacerraf afirma que a pesquisa de Frege acerca da *verdadeira* natureza dos números almeja oferecer um critério interessante para as identificações do último tipo, de tal maneira que se possa determinar categoricamente não apenas a significação destas sentenças, como também o seu valor de verdade. A identidade, afinal, seria uma das mais fortes relações lógicas, e, enquanto tal, precisaria estar determinada para quaisquer pares de nomes (ou descrições) da linguagem, estejam eles descrevendo o mesmo objeto ou não.

A proposta de Benacerraf constitui-se, então, na negação da tese que afirma serem significativos todos os enunciados de identidade. A identidade, em sua visão, apenas faz sentido em contextos nos quais estejam explícitas as *condições de identificação*. "Se uma expressão da forma "$x = y$" possui um sentido, isto ocorre apenas em contextos nos quais está claro que ambos, x e y, são de algum tipo ou categoria C"[63]. A fim de ilustrar sua tese, ele oferece um interessante exemplo: imagine que x e y são dois postes e que z e w são números. Se nós sabemos que x e y são postes, podemos questionar se eles são *o mesmo poste*, determinando a resposta para esta pergunta a partir de sua cor, de sua massa, de sua posição no espaço etc.; do mesmo modo, se nós sabemos que z e w são números, podemos questionar se eles são *o mesmo número*, isto é, se eles possuem as mesmas propriedades numéricas (se são pares, ímpares, primos, maiores do que 17 etc.). "Mas, assim como não podemos individuar um poste em

[62] BENACERRAF 1965, p. 54.
[63] *Idem*, p. 64.

termos destas propriedades, não podemos individuar um número em termos de massa, cor ou propriedades similares. O que determina alguma coisa como um *poste particular* pode não determiná-la como um *número particular*”[64]. Afinal, “questões de identidade contém a pressuposição de que as “entidades” investigadas pertencem ambas a alguma categoria geral. Esta pressuposição é normalmente carregada pelo contexto ou pela teoria (isto é, em um contexto mais sistemático)”[65].

Uma maneira diferente de se pensar esta tese procuraria invertê-la e apresentá-la sob o seguinte viés: *um ente se constitui enquanto tal por depender de uma teoria ou de uma categoria específica*. A partir daí, duas são as conclusões possíveis: ou a relação de identidade é precisa e sempre determina a uniformidade do objeto, como apregoava Frege, ou ela é ambígua e depende de uma compreensão da verdadeira natureza dos objetos a que se aplica. Determinar a uniformidade do objeto, no entanto, não significa determinar o objeto, pois “(contra Frege) a noção de *objeto* varia de teoria para teoria, de categoria para categoria”[66]. Esta modificação proposta por Benacerraf almeja preservar a relação de identidade como uma relação lógica geral aplicável a quaisquer contextos particulares bem definidos, isto é, a quaisquer contextos nos quais a noção de *objeto* seja unívoca. Desta forma, “a Lógica continuará a ser vista como a mais geral das disciplinas, aplicável da mesma maneira em qualquer teoria dada. Ela permanece como a ferramenta aplicável a todas as disciplinas e teorias, residindo a diferença no fato de que é reservado para a disciplina ou teoria determinar o que contará como *objeto* ou *indivíduo*”[67]. Após algumas considerações finais acerca desta noção, como o caso das sentenças *intensionais*, Benacerraf parte para uma discussão breve acerca dos conceitos de *explicação* e *redução*.

Ao possuir no horizonte a conclusão adquirida ao final de segunda seção de seu artigo, seja esta a tese de que *os números não podem ser conjuntos devido ao fato de não podermos determinar qual conjunto eles realmente são*, Benacerraf decide esquadrinhar brevemente duas atividades relacionadas à posição que

---

64 *Idem*, p. 65.
65 *Ibidem*.
66 *Idem*, p. 66.
67 *Ibidem*.

afirma serem os números conjuntos, sejam elas a *explicação* e a *redução*. Para ele, quando um filósofo insere em sua explanação uma sentença da forma "3 = $\{\{\{\emptyset\}\}\}$", não necessariamente ele está incorrendo no mesmo erro identificado em Frege. Existiria, afinal, "uma diferença entre *asserir* que 3 *é* o conjunto de todas as triplas e *identificar* 3 com este conjunto, pois o último pode ser feito no contexto de alguma explicação"[68]. Esta diferença faz-se presente no momento em que a *identificação* apenas sugere um substituto explanatório para os números, e não apregoa aquilo que eles *realmente* são. Esta simples distinção entre *reduzir*, isto é, *descobrir* o que os números *realmente são*, e *explicar*, ou seja, *identificar* os números com algum outro conceito para fins de clareza, por exemplo, faz com que Benacerraf retome a epígrafe de Richard Martin, que diferencia os interesses manifestados por um matemático daqueles manifestados por um filósofo. Este, afirma ele, deseja conhecer a *natureza* dos objetos com o qual trabalha, enquanto para aquele bastaria o conhecimento das estruturas nas quais os objetos estão inseridos. Com esta simples distinção conceitual, Benacerraf avança em direção à sua *conclusão: números e objetos*.

A conclusão do texto retoma (e amplia) a tese obtida ao final da segunda seção, na qual se expôs o dilema conceitual enfrentado por um projeto *logicista*. Afirmou-se ali que *os números não podem ser conjuntos* devido ao fato de que, se eles assim os forem, deverão existir argumentos para se os determinar, e como estes argumentos não se encontram disponíveis, esta idéia permanece infundada. Para ampliar esta tese, Benacerraf retoma um pensamento de Quine veiculado na primeira sessão de seu artigo, no momento em que se efetuava a tradução da linguagem comum para a linguagem de Ernie e Johnny. Este pensamento procurava argumentar em favor do fato de que qualquer sistema que formasse uma progressão recursiva constituía-se adequado para a caracterização dos números, ou seja, seriam desnecessárias considerações efetuadas sobre a *cardinalidade* numérica. Considerava-se como fundamental, portanto, apenas as condições que são atribuídas à relação que organiza este sistema, e não aquelas que se atribuem aos *objetos* que o preenche. "Apresentando de maneira diferente, o que qualquer sequência recursiva sugere é que o que é importante não é a

[68] *Idem*, p. 67-68.

individualidade de cada elemento, mas a estrutura que eles exibem em conjunto"[69], afinal, "os *objetos* não desempenham o papel dos números de maneira singular; ou o sistema inteiro o desempenha ou nada o faz"[70]. Esta extensão almeja determinar, então, que se os números não podem ser conjuntos, devido aos argumentos apresentados, eles também não podem ser objetos, pois, tal como aqueles, não existiria nenhuma razão para se os identificar com este ou aquele objeto em particular.

Prosseguindo em seus comentários sugestivos, Benacerraf afirma que o que se pretende caracterizar quando se oferece um determinado conjunto de propriedades é uma *estrutura abstrata*, e não uma *individualidade* cardinal qualquer, residindo a distinção entre ambas "no fato de que os "elementos" desta estrutura não possuem outras propriedades além daquelas que os relacionam com outros "elementos" desta mesma estrutura"[71]. Assim, de acordo com sua concepção, a individuação de um número independentemente da estrutura na qual ele se encontra imerso é impossível, pois "*ser* o número 3 não é nem mais nem menos do que ser precedido por 2, 1, e possivelmente 0, e ser sucedido por 4, 5, e assim por diante. [...] *Qualquer* objeto pode *desempenhar o papel* de 3; isto é, qualquer objeto pode ser o terceiro elemento em alguma progressão"[72]. Estas considerações o permitem eliminar a pretensão de que a aritmética seja uma disciplina que trate de objetos particulares, em prol de sua definição como "a ciência que elabora a estrutura abstrata que todas as progressões possuem em comum meramente em virtude de serem progressões"[73]. A pesquisa pela referência singular dos termos numéricos seria, portanto, uma pesquisa sem sentido, pois "a teoria dos números é a elaboração das propriedades de *todas* as estruturas que possuem o mesmo tipo de ordem dos números. [...] Apenas quando estamos considerando uma sequência particular como sendo, não os números, mas *da estrutura dos números*, começa a fazer algum sentido a questão sobre qual elemento é, ou *corresponde a*, o número 3"[74].

---

[69] *Idem*, p. 69.
[70] *Ibidem*.
[71] *Idem*, p. 70.
[72] *Ibidem*.
[73] *Ibidem*.
[74] *Idem*, p. 71.

Esta visão de Benacerraf sugere uma espécie de formalismo, cujas fronteiras devem ser firmemente delimitadas com a intenção de se evitar radicalismos. Em linhas gerais, continuaria sendo negado que os termos numéricos são apenas nomes de objetos independentes e que

> “a sequência dos termos numéricos é apenas isso – uma sequência de palavras ou expressões com certas propriedades. Não existem dois tipos de coisas, números e termos numéricos, mas apenas um, os termos eles mesmos. Muitas linguagens contêm semelhante sequência, e qualquer sequência assim (de termos ou palavras) servirá aos mesmos propósitos para os quais nós temos a nossa, que é acrescida da recursividade em seu aspecto relevante. Na contagem, nós não correlacionamos conjuntos com segmentos iniciais dos números como entidades extralingüísticas, mas correlacionamos conjuntos com os segmentos iniciais da sequência dos *termos* numéricos. A idéia central é que esta sequência recursiva é um tipo de jarda a qual nós usamos para medir conjuntos. Questões sobre a identificação da referência dos termos numéricos devem ser abandonadas como malformadas da mesma maneira que as questões sobre os referentes das partes de uma regra devem ser vistas como malformadas. [...] Não se pode dizer qual número uma expressão particular representa sem ser oferecida a sequência da qual ele constitui uma parte. Será então a partir de seu lugar em tal sequência – isto é, de sua relação com os outros membros da sequência, *e das regras que governam o uso da sequência na contagem* – que será derivada sua individualidade”[75].

Benacerraf não prossegue na delimitação deste formalismo. Apenas sugere que as operações aritméticas elementares continuariam a ser compreendidas como operações cardinais em pequenos conjuntos, e que suas extensões seriam interpretadas como *projeções* desta “aritmética cardinal” (através de funções de verdade, quantificadores e regras recursivas para as operações). Para finalizar seu artigo, efetua-se um breve retorno às figuras de Ernie e Johnny, afinal, o problema de sua educação não possuiria uma origem *matemática*, pois não há uma diferença significativa entre o que estas crianças sabem e o que as pessoas comuns sabem, mas uma natureza *filosófica*, pois seus dilemas conceituais se originariam a partir da *redução dos números aos objetos lógicos,* e de seu conseqüente afastamento da noção de *estruturas abstratas*.

[75] *Idem*, p. 71-72.