1. Introdução

É provável que nunca tenhamos razão acerca das questões movimentadas por uma disciplina tão complexa quanto a filosofia da matemática; mas, se nunca podemos ter razão, é melhor modificarmos de vez em quando nosso modo de errar. A aplicação do julgamento de T. S. Eliot acerca dos estudos shakespearianos ao estudo filosófico sobre a matemática esclarece de imediato o objetivo da dissertação que ora se inicia. Pretende-se investigar, com efeito, alguns desdobramentos da pergunta pela natureza deste objeto que é, nos termos de Frege, o mais próximo e, aparentemente, o mais simples de todas as ciências matemáticas: o número.

A pesquisa referida à natureza numérica constitui um clássico problema filosófico no interior da fundamentação da matemática. De fato, a existência de teses ontológicas e epistêmicas sobre os números pode ser observada já no pensamento desenvolvido por Platão e por Aristóteles na antiguidade clássica, e até mesmo antes deles (como, por exemplo, na escola pitagórica). Não planejo, contudo, apresentar uma coleção de teorias a respeito desta questão, nem planejo considerar o período antigo da filosofia como o seu marco inicial. De modo que, para os fins deste trabalho, considero a afirmação de Frege nas páginas iniciais de seu livro *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) como a origem de semelhante imbróglio, no momento em que ele indaga se não seria vergonhoso o pouco esclarecimento que os matemáticos possuiriam a respeito deste objeto.

A resposta oferecida por Frege manifesta a compreensão de que "uma investigação radical do conceito de número deverá sempre resultar um tanto filosófica. Essa tarefa é comum à matemática e à filosofia"[1]. Assim, ela se desenvolve através de seu projeto logicista (já esboçado em sua *Begriffsschrift*, de

[1] FREGE 1974, p. 201.

1879, e finalizado nos dois volumes de seus *Grundgesetze der Arithmetik*, de 1893 e 1903), cujos conceitos centrais serão tangenciados no interior da argumentação apresentada ao longo do primeiro capítulo e cuja falência, a partir dos paradoxos demonstrados por Bertrand Russell, impulsionará o surgimento de especulações com os mais distintos matizes. Como afirma Oswaldo Chateaubriand, "surgem assim uma versão renovada de Logicismo, formulada principalmente por Russell, várias versões de Construtivismo formuladas por Poincaré, Brouwer, Weyl e outros, e uma importante versão do Formalismo formulada por Hilbert"[2].

Também se observa nestes diferentes programas de pesquisa a concepção de que o domínio de estudo das ciências matemáticas deveria se constituir como um domínio primordialmente estrutural, e não objetual. Para os teóricos com tais inclinações, as perguntas de Frege, tais como "o que é o número um? Ou: o que significa o sinal 1?"[3], seriam completamente desprovidas de sentido matemático. Afinal, nas palavras do eminente matemático francês Henri Poincaré, "não sei se fora da matemática faz-se possível a concepção de um termo independentemente de suas relações com os outros; mas sei que isto é impossível para os objetos da matemática. Se alguém quiser isolar um termo [matemático] e abstraí-lo de suas relações com os outros, não sobra *nada* [para ser concebido]"[4].

Isto significa que, para tal concepção, é impossível a caracterização de um número isolado, pois a existência do mesmo seria ontologicamente dependente de um sistema no qual ele se encontra inserido. De tal modo que, caso se desejasse falar de um número natural, a caracterização de um sistema de números naturais seria necessária, com o mesmo ocorrendo para todas as outras especificações numéricas. Neste panorama, pode-se observar que a axiomatização dos números naturais apresentada nos trabalhos de Richard Dedekind e de Giuseppe Peano[5] constituiu uma decisiva ilustração para tal processo. O desenvolvimento do método axiomático, aliás, permitiu a larga veiculação desta orientação teórica,

[2] CHATEAUBRIAND 2007, p. 11.
[3] FREGE 1974, p. 199.
[4] POINCARÉ *apud* SHAPIRO 1997, p. 154.
[5] Reproduzidos em EWALD 2005 e VAN HEIJENOORT (Ed.) 1967.

oferecendo, nas palavras de Nicholas Bourbaki, a profunda inteligibilidade das mais diversas ciências matemáticas[6].

A análise veiculada na presente dissertação organiza-se assim em torno destes dois pólos: ao mesmo tempo em que abraça o problema formulado por Frege em seus *Grundlagen* acerca da natureza numérica, lança mão de concepções que privilegiam o conceito de estrutura em suas pesquisas (em detrimento do conceito de objeto). Isto é, procurar-se-á investigar o problema da natureza do número a partir de elementos extraídos de teorias com inclinações estruturalistas.

Para isso, esquadrinha-se no primeiro capítulo o artigo do filósofo norte-americano Paul Benacerraf, publicado em 1965. Responsável pelo largo impulso recebido pelas pesquisas estruturalistas na segunda metade do século XX, como atesta Arno Viero[7], este artigo pospõe-se à tese de doutorado por ele defendida alguns anos antes acerca do projeto logicista (*Logicism, Some Considerations*) e intitula-se "What Numbers Could Not Be". Almeja-se com semelhante exame conceitual não apenas elucidar as críticas de Benacerraf ao projeto logicista, mas introduzir o arranjo teórico aqui proposto, o qual vincula o problema fregeano ao desenvolvimento de um pensamento que privilegia a noção de estrutura em seu interior.

Se a argumentação de Benacerraf não sustenta um pensamento estruturalista de maneira firme, mas apresenta de maneira interessante algumas insuficiências entrevistas na teoria fregeana, procura-se discutir no segundo capítulo o desenvolvimento de uma teoria estruturalista em suas minúcias. De fato, "em 1997, Stewart Shapiro publicou um livro intitulado *Philosophy of Mathematics – structure and ontology* no qual pretendia articular a postura estruturalista de uma forma bastante abrangente, resolvendo alguns dos problemas mais sérios que envolvem tal concepção"[8]. Assim, na primeira metade do capítulo, apresenta-se a perspectiva filosófica adotada por Shapiro (sortida de inclinações platônicas), para, na segunda metade, deter a investigação na maneira

---

[6] Esta afirmação encontra-se reproduzida em BOURBAKI 1948.
[7] Em VIERO 2003.
[8] VIERO 2003, p. 16.

pela qual os problemas ontológicos e semânticos são por ele respondidos a partir de tal perspectiva.

Por fim, após a exposição de seu pensamento, Shapiro se questiona pelas heranças conceituais que porventura seriam perceptíveis em seu trabalho. Fato que o faz ressaltar alguns debates ocorridos entre Poincaré e Russell, bem como entre Frege e Hilbert, antes de se dedicar às figuras de Dedekind e de Bourbaki, matemáticos de princípios teóricos intimamente ligados mas cujas biografias não poderiam ser mais díspares. De maneira que reservo para o terceiro capítulo uma breve especulação histórica em torno destes matemáticos, procurando também aproximá-los da pesquisa empreendida por Benacerraf. Com efeito, observam-se aí os dois famosos ensaios de Dedekind – acerca dos números reais e acerca dos números naturais –, bem como o artigo “L’Architecture des Mathématiques”, publicado por Bourbaki em 1948.

Configura-se, assim, não apenas o trajeto a ser percorrido por esta pesquisa, como também o corpo bibliográfico utilizado. Em seu auxílio, foram mobilizadas teses e dissertações de alguns programas de pós-graduação, bem como verbetes de dicionários e de enciclopédias filosóficas. Todo o material citado no escopo da dissertação encontra sua devida referência bibliográfica ao final da mesma, embora uma parte das obras estudadas durante a pesquisa, que não se encontram nem citadas nem referidas, tenha contribuído diretamente para a consolidação de meu aprendizado. De maneira exemplificadora, destaco os dois volumes da obra *Logical Forms* (2001 e 2005) publicados pelo professor Oswaldo Chateaubriand, cuja influência sobre minha formação não poderia ser mensurada sob estes termos. Posto isto, passo à investigação proposta.