

3

Estratégias de Pré-condicionamento

3.1

Introdução

A solução de sistemas esparsos do subproblema linear do fluxo de carga foi enfocada no capítulo anterior. O estudo das características e propriedades espectrais de matrizes Jacobinas típicas de fluxo de carga mostrou que, as matrizes de coeficientes destes sistemas lineares são normalmente indefinidas, mal condicionadas e muitas vezes próximas da singularidade, especialmente quando os sistemas elétricos são de maior-porte e operam próximos ao máximo carregamento (Mori et al., 1996; de Leon & Semlyen, 2002). Estas características dificultam o processo iterativo de solução levando a uma convergência lenta, ou até mesmo à falha do processo, justificando a necessidade de se considerar estratégias que atenuem ou eliminem estas dificuldades.

Neste capítulo é estudada, avaliada e justificada a estratégia de pré-condicionamento para as dificuldades abordadas no Capítulo 2, em especial para o subproblema o fluxo de carga. Esta estratégia explora tanto as características estruturais como também as propriedades espectrais da matriz Jacobiana, substituindo o sistema linear original por outro equivalente, com a matriz de coeficientes apresentando um menor número de condicionamento e autovalores mais afastados da origem do plano complexo, agrupados próximos a unidade (Semlyen, 1996; Semlyen & de Leon, 2001; Dag & Semlyen, 2003; Chen & Shen, 2006).

3.2

O Pré-condicionador

O termo “pré-condicionamento” foi usado pela primeira vez em (Turing, 1948), onde se utilizou a palavra pré-condicionamento para se referir às transformações realizadas em um sistema linear para reduzir o número de condicionamento da

matriz de coeficientes. Posteriormente, (Evans, 1968) menciona que para melhorar a convergência de um método iterativo é necessário que a matriz de coeficientes apresente o menor número de condicionamento possível.

Caso contrário, é aconselhável que o sistema seja preparado ou “pré-condicionado” antes de ser solucionado. Portanto, inicialmente a estratégia de pré-condicionamento foi indicada para reduzir o número de condicionamento da matriz de coeficientes e conseqüentemente aumentando a taxa de convergência do método iterativo melhorando sua eficiência computacional.

A significativa melhoria do desempenho dos métodos pré-condicionados motivou o desenvolvimento de diversos algoritmos, estes agrupados em três categorias (Chen, 2005): pré-condicionadores de matriz descomposta, pré-condicionadores de aproximação esparsa da matriz inversa e, pré-condicionadores multi-nível (ou multigrid). As duas primeiras categorias já foram aplicadas em problemas de engenharia elétrica, especificamente para análises de fluxo de carga e no domínio do tempo (Galiana et al., 1994; Mori et al., 1996; Alves et al., 1999; Borges et al., 1996; Pai & Dag, 1997; Flueck & Chiang, 1998; de Leon & Semlyen, 2002; Dag & Semlyen, 2003; Chen & Shen, 2006; Mori & Iizuka, 2007; Pessanha, et. al., 2009; Siddhartha et al. 2010).

Já os pré-condicionadores multi-nível são apropriados para solucionar sistemas de equações lineares associados aos métodos de discretização do domínio dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas (Coutinho et. al., 1993; Tsukerman & Plaks, 1999; Yu Zhu & Cangellaris, 2002; Lahaye et al., 2002; Malas et al., 2007; Wu Wang et al., 2008, Maza, 2009), não sendo portanto de interesse para o presente trabalho. Devido à extrema dificuldade da solução destes problemas, os algoritmos dos pré-condicionadores multi-nível, normalmente são desenvolvidos para implementação em ambiente computacional paralelo ou em arquiteturas computacionais com memória distribuída (Wu Wang et al., 2008).

Pré-condicionadores de fatoração incompleta tem sido a técnica mais estudada e explorada entre os pré-condicionadores do tipo matriz descomposta, apresentando em diferentes aplicações os melhores desempenhos (Alves et al., 1999; Borges et al., 1996; Pai & Dag, 1997; Flueck & Chiang, 1998; de Leon & Semlyen, 2002; Mori & Iizuka, 2007; Pessanha, et. al., 2009; Siddhartha et al. 2010). Entre as estratégias de pré-condicionamento é dada maior ênfase aos

pré-condicionadores de fatora o incompleta por apresentarem caracter sticas que se adequam bem   solu o do subproblema linear de fluxo de carga.

3.2.1 Formas de Pr -condicionamento

O pr -condicionamento de um sistema linear   realizado usando-se um operador M conhecido como matriz de pr -condicionamento, de transforma o, ou simplesmente pr -condicionador (Saad, 2003). No subproblema do fluxo de carga, para se construir um pr -condicionador deve-se decidir entre encontrar M como uma aproxima o de A (pr -condicionadores de matriz descomposta) ou encontrar M como uma aproxima o de A^{-1} (pr -condicionadores de aproxima o esparsa da matriz inversa) (Chen, 2005). Em ambos os casos, o sistema pr -condicionado   mais f cil de resolver do que o sistema original (Barrett & Ed, 2006).

Existem tr s formas de utilizar um pr -condicionador M , sendo estas: pr -condicionamento pelo lado esquerdo, pr -condicionamento pelo lado direito e pr -condicionamento por ambos os lados. As tr s formas produzem o mesmo sistema equivalente, com as mesmas propriedades espectrais e normalmente desempenhos similares do m todo iterativo (Saad, 2003). Por m, o pr -condicionamento pelo lado esquerdo   a forma mais simples e de f cil implementa o computacional (Benzi, 2002; Saad, 2003), sendo, portanto, o adotado aqui. Abaixo s o apresentadas as tr s formas de se realizar o pr -condicionamento, para ambos os tipos: aproxima o esparsa da matriz inversa e matriz descomposta.

Pr -condicionadores de aproxima o esparsa da matriz inversa: $M \approx A^{-1}$

- I. (Lado esquerdo) $M \cdot A \cdot x = M \cdot b$
- II. (Lado direito) $A \cdot M \cdot y = b, x = M \cdot y$
- III. (Ambos os lados) $M_2 \cdot A \cdot M_1 \cdot y = M_2 \cdot b, x = M_1 \cdot y$

Pr -condicionadores de matriz descomposta: $M \approx A$

- I. (Lado esquerdo) $M^{-1} \cdot A \cdot x = M^{-1} \cdot b$
- II. (Lado direito) $A \cdot M^{-1} \cdot y = b, x = M^{-1} \cdot y$
- III. (Ambos os lados) $M_2^{-1} \cdot A \cdot M_1^{-1} \cdot y = M_2^{-1} \cdot b, x = M_1^{-1} \cdot y$

O pré-condicionador M possui duas partes fundamentais, conhecidas como: o algoritmo de pré-condicionamento e a regra de preenchimento. O algoritmo de pré-condicionamento é usado para construir M (Benzi, 2002; Chen, 2005). Por exemplo, no caso dos pré-condicionadores baseados em fatoração incompleta, normalmente utiliza-se algum algoritmo de fatoração triangular (do tipo IKJ ou KIJ) para construir implicitamente M na forma de duas matrizes triangulares L' e U' ($M=L' \cdot U' \approx A$) (Chen, 2005).

Já a regra de preenchimento é o critério usado para decidir que elementos devem ser preenchidos ou não no pré-condicionador. As regras de preenchimento normalmente usam parâmetros escalares cujos valores são escolhidos antes de se iniciar o processo de solução. O significado de cada parâmetro depende do critério associado a cada regra de preenchimento. A idéia fundamental é escolher os valores dos parâmetros que permitam preencher o menor número de elementos sem prejudicar a qualidade do pré-condicionador, isto é, sem torná-lo muito diferente de A ou A^{-1} . A grande quantidade de parâmetros associados aos métodos iterativos com pré-condicionadores é visto como uma desvantagem se comparados aos métodos diretos, já que estes não precisam de parâmetro nenhum. No próximo capítulo, apresenta-se um método para facilitar a determinação desses parâmetros, além de se propor um pré-condicionador que faz uso de um único parâmetro.

3.2.2

Efeitos do Pré-condicionamento no Subespaço de Krylov do Método GMRES

O método GMRES usa o algoritmo de Arnoldi para calcular os vetores base V que definem o subespaço de Krylov (vetores coluna v_k^f de V) e a técnica de rotações de Givens para calcular o vetor coluna y_k (Saad, 2003). Tanto os vetores base como o vetor y_k são usados para estimar em cada iteração k uma solução aproximada x_k , como mostrado em (2.26). As informações numéricas para este procedimento são adquiridas da matriz de coeficientes A e do vetor do lado direito b . No entanto, quando o sistema é pré-condicionado, as informações são adquiridas da matriz de coeficientes pré-condicionada $M^{-1} \cdot A$ e do vetor do lado direito pré-condicionado $M^{-1} \cdot b$. Conseqüentemente, são gerados vetores base pré-condicionados V^M e um vetor y_k^M pré-condicionado, cuja solução

aproximada x_k^M , calculada de acordo com (3.2) está muito mais próxima da solução exata que a conseguida pelo sistema não pré-condicionado.

$$x_k = x_0 + V \cdot y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^f & v_2^f & \dots & v_k^f \end{bmatrix}}_V \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{y_k} = \varepsilon_1 \cdot \begin{bmatrix} v_1^f \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \cdot \begin{bmatrix} v_2^f \end{bmatrix} + \dots + \varepsilon_k \cdot \begin{bmatrix} v_k^f \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$x_k^M = x_0 + V^M \cdot y_k^M = \varepsilon_1^M \cdot \begin{bmatrix} v_1^{Mf} \end{bmatrix} + \varepsilon_2^M \cdot \begin{bmatrix} v_2^{Mf} \end{bmatrix} + \dots + \varepsilon_k^M \cdot \begin{bmatrix} v_k^{Mf} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Ilustra-se através de um exemplo, como o pré-condicionamento influencia positivamente na criação de um subespaço de Krylov permitindo encontrar uma melhor aproximação da solução, conseqüentemente melhorar a convergência do método GMRES. O sistema linear (3.3) é solucionado de duas formas diferentes; a primeira usando-se o GMRES sem pré-condicionador e a segunda o GMRES com um pré-condicionador de fatoração incompleta apresentado em (3.4). Em (3.5) apresenta-se o subespaço de Krylov para o caso sem pré-condicionador (V e y_k) e em (3.6) para o caso com pré-condicionador (V^M e y_k^M), ambos calculados pelo algoritmo de Arnoldi e a técnica de Rotações de Givens do GMRES.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ 20 & 10 & 20 \\ 40 & 30 & 50 \end{bmatrix}}_A \cdot [x] = \underbrace{\begin{bmatrix} 500 \\ 290 \\ 680 \end{bmatrix}}_b \quad (3.3)$$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ & -50 & -60 \\ & & -2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0,56 & -0,83 & 0,04 \\ 0,32 & 0,17 & -0,93 \\ 0,76 & 0,53 & 0,37 \end{bmatrix} \quad y_k = \begin{bmatrix} 11,9 \\ 10,2 \\ 17,9 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$V^M = \begin{bmatrix} 0,36 & -0,93 & 0,01 \\ 0,71 & 0,28 & 0,64 \\ -0,60 & -0,23 & 0,77 \end{bmatrix} \quad y_k^M = \begin{bmatrix} -20,8 \\ -6,9 \\ 9,0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Na Figura 3.1(a) apresenta-se, para a primeira iteração do método GMRES, os subespaços de Krylov (retas), para os casos: sem pré-condicionamento (reta cinza) e com pré-condicionamento (reta preta). Nesta iteração, o erro para o caso sem pré-condicionamento é $\|X^*-X_1\| = 20,5$ e para o caso com pré-condicionamento é $\|X^*-X_1^M\| = 11,3$. Na Figura 3.1(b) apresenta-se, para a segunda iteração do método GMRES, os subespaços de Krylov (planos). Nesta iteração, o erro para o caso sem pré-condicionamento é $\|X^*-X_2\| = 17,8$ e para o caso com pré-condicionamento é $\|X^*-X_2^M\| = 8,9$. Observa-se que, em ambos os gráficos, o GMRES quando pré-condicionado aproximou-se mais da solução exata $X^*=[-1, -11, 21]^T$, apresentando os menores erros.

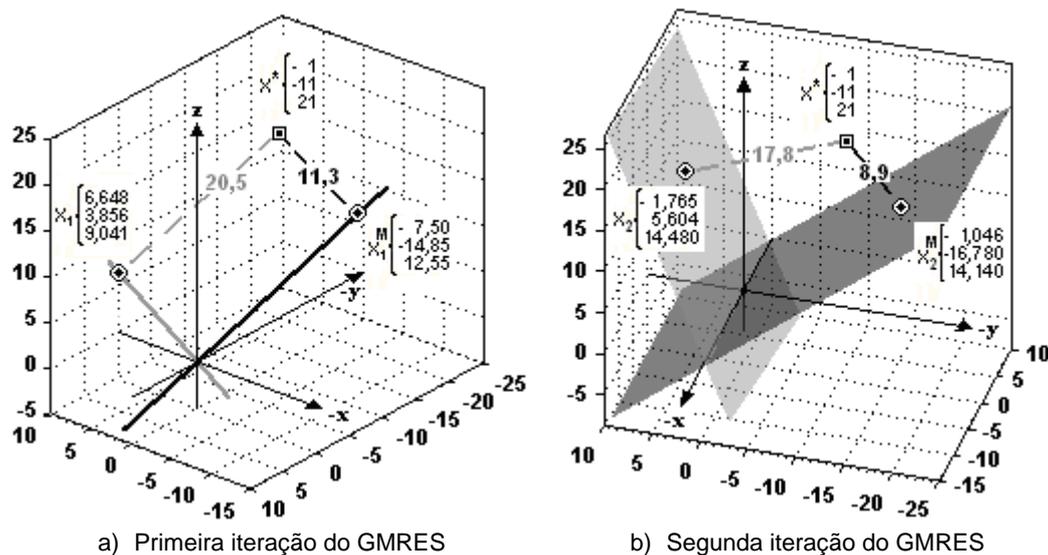


Figura 3.1 – Subespaços de Krylov, suas soluções aproximadas e erros para cada iteração do GMRES, com e sem estratégia de pré-condicionamento.

3.2.3

Efeitos da Estratégia de Pré-condicionamento nas Propriedades Espectrais da Matriz Jacobiana

As propriedades espectrais são úteis para avaliar os efeitos do pré-condicionamento no condicionamento e singularidade dos sistemas de equações lineares típicos de fluxo de carga (Semlyen, 1996; Semlyen & de Leon, 2001; Dag & Semlyen, 2003; Chen, 2005; Chen & Shen, 2006).

São comparados os autovalores e número de condicionamento das matrizes Jacobianas de sistemas lineares pré-condicionados e não pré-condicionados. As matrizes Jacobianas estão associadas aos sistemas lineares da primeira

iteração Newton-Raphson do problema de fluxo de carga no ponto mais Próximo do Máximo Carregamento (PMC), apresentados no capítulo anterior para os sistemas hipotéticos do IEEE e para as configurações dos sistemas norte-nordeste e brasileiro. Os pré-condicionadores utilizados são do tipo ILUT(τ, ρ), e os valores de τ e ρ usados para cada sistema elétrico são apresentados na Tabela A.1 do Apêndice V.

Na Figura 3.2 apresentam-se os gráficos dos autovalores das matrizes Jacobianas não pré-condicionadas (em vermelho) e pré-condicionadas (em azul). Observa-se que, em todos os gráficos os autovalores das matrizes Jacobianas pré-condicionadas estão agrupados próximos de um e grande parte afastada da origem do plano complexo.

Esta característica indica que os sistemas lineares pré-condicionados estão mais afastados da singularidade. Observa-se também que em todos os casos os autovalores possuem parte real sempre positiva, ou seja, os sistemas lineares que antes eram indefinidos (IEEE300-barras e Norte-Nordeste de 274 barras), agora são definidos.

Nestes casos, os métodos iterativos que antes podiam apresentar um processo lento de convergência ou até mesmo falhar, agora devem apresentar uma rápida convergência livre de falhas (Benzi, 2002; Chen, 2005). Todas estas informações podem também ser conferidas na Tabela 3.1, onde são apresentados os autovalores com menor e maior parte real, tanto para o caso não pré-condicionado como também para o caso pré-condicionado.

Com a finalidade de comparar os resultados anteriores, na Figura 3.3 apresentam-se em escala logarítmica os valores do número de condicionamento das matrizes Jacobiana de todos os sistemas considerados aqui, para os casos com e sem pré-condicionamento.

Observe-se que sempre o número de condicionamento é menor nos sistemas lineares com pré-condicionamento, comprovando que a estratégia de pré-condicionamento melhora significativamente as propriedades espectrais da matriz Jacobiana, substituindo o sistema linear original por outro sistema linear menos singular e não indefinido. Portanto, espera-se que o desempenho do

método GMRES melhora significativamente durante a solução destes sistemas lineares pré-condicionados.

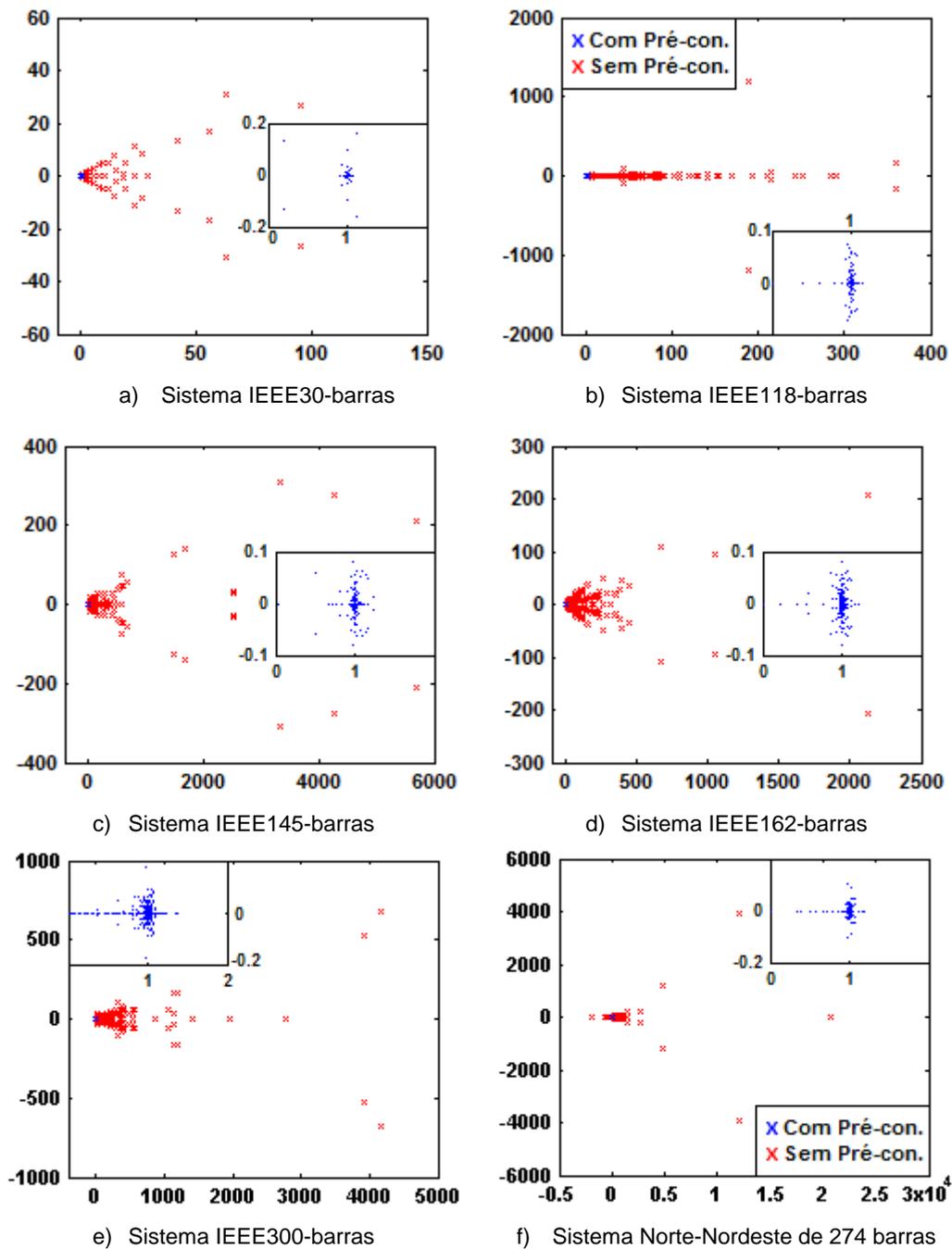


Figura 3.2 – Autovalores da matriz Jacobiana pré-condicionada (azul) e não pré-condicionada (vermelho) de sistemas lineares de pequeno porte, no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).

Tabela 3.1 – Propriedades espectrais das matrizes Jacobianas Pré-condicionadas e Não Pré-condicionadas.

Sistema	Autovalores do Sistema Pré-condicionado		Autovalores do Sistema Não Pré-condicionado	
	Com a Menor Parte Real	Com a Maior Parte Real	Com a Menor Parte Real	Com a Maior Parte Real
IEEE30	0,19±0,13i	1,12±0,16i	0,00798	95,70±26,42i
IEEE118	0,00924	1,14	0,00983	360,60±164,28i
IEEE145	0,03460	1,24±0,01i	0,00519	5.621,68±202,72i
IEEE162	0,00741	1,21	0,01871	2.122,98±209,50i
IEEE300	0,00014	1,37	-1,45015	4.164,81±673,07i
Norte-Nordeste 274	0,00187	1,20	-1.873,08000	20.703,42

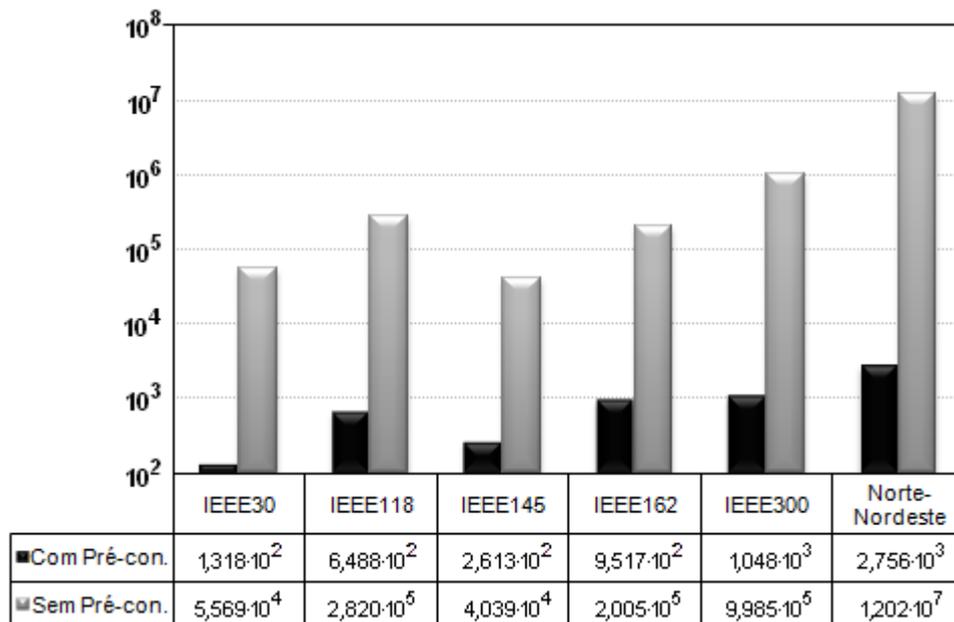


Figura 3.3 – Número de condicionamento para o caso próximo do máximo carregamento (PMC)

3.3 Pré-condicionadores de Fatoração Incompleta

Os pré-condicionadores de fatoração incompleta são aproximações da matriz de coeficientes, construídos na forma de fatores triangulares L' e U' , sendo que, o preenchimento ou não de cada elemento dos fatores triangulares deve estar de acordo com uma “regra de preenchimento” (Saad, 2003). Conseqüentemente, os fatores triangulares são calculados de forma incompleta e esparsa, sendo que

seu produto é igual à matriz de pré-condicionamento M , como apresentado em (3.7). Normalmente, o processo de construção deste tipo de pré-condicionador é realizado utilizando-se algum dos diferentes tipos de algoritmos de eliminação de Gauss comumente usados nos métodos diretos (Saad, 2003), alguns identificados segundo a ordem dos três laços associados com o controle das variáveis i , j e k , usadas nos algoritmos.

$$M = L' \cdot U' \quad (3.7)$$

Nem todos os algoritmos de eliminação de Gauss são igualmente vantajosos quando usados nos pré-condicionadores de fatoração incompleta. Por exemplo, o algoritmo KIJ (ver Figura A.2(a) do Apêndice III) apresenta dificuldades durante sua implementação já que em cada passo k devem-se modificar todas as linhas restantes, desde $k+1$ até n (Saad, 2003). No entanto, o algoritmo IKJ, também apresentado na Figura A.2(b) do Apêndice III, destaca-se por oferecer algumas vantagens, justificando a sua preferência na maioria dos pré-condicionadores de fatoração incompleta. Uma vantagem é que em cada passo i pode substituir os valores dos elementos da linha i da matriz de coeficientes pelos elementos dos fatores triangulares L e U (considera-se aqui que, os elementos da diagonal de L não precisam ser armazenados por serem iguais a 1). Na Figura 3.4 mostra-se como todos os elementos desde a linha 1 até a linha i da matriz de coeficientes foram substituídos pelos elementos dos fatores triangulares L e U , nos passos 1, 2, ..., i do algoritmo IKJ.

Observa-se que no passo i calcula-se $i-1$ elementos de L ($L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{i,i-1}$) e $n-i+1$ elementos de U ($U_{ii}, U_{i,i+1}, \dots, U_{in}$) usando-se apenas os elementos das linhas anteriores (sem modificá-los), e também os elementos da própria linha i . As equações (3.8) e (3.9) são utilizadas pelo algoritmo IKJ para calcular os elementos dos fatores triangulares L e U na linha i , respectivamente. O procedimento se repete nos próximos passos para as linhas $i+1, i+2, \dots, n$; sendo que, após o passo n , o algoritmo deve terminar de substituir todos elementos da matriz de coeficientes pelos elementos dos fatores triangulares.

$$L_{ik} = \frac{a_{ik}}{U_{kk}} \quad (3.8)$$

$$U_{ir} = a_{ir} - [L_{i1} \cdot U_{1r} + L_{i2} \cdot U_{2r} + \dots + L_{ik} \cdot U_{kr} + \dots + L_{i,i-1} \cdot U_{i-1,r}]$$

$$U_{ir} = a_{ir} - \sum_{j=1}^{i-1} [L_{ij} \cdot U_{jr}] \quad (3.9)$$

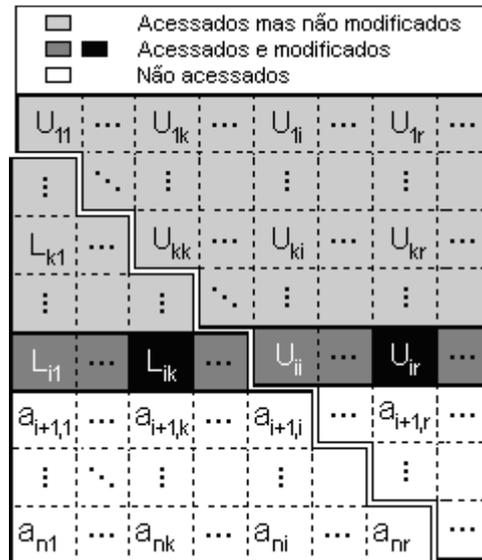


Figura 3.4 – Passo i da fatoração do tipo IKJ.

Outra vantagem do algoritmo IKJ é sua fácil adaptação quando usados vetores esparsos, uma vez que os elementos das linhas de L e U são calculados sucessivamente. As linhas são calculadas uma por vez e armazenada usando-se o formato de armazenamento de matrizes esparsas conhecido como compressão esparsa por linha (CSR). Este esquema de armazenamento é preferido por ser muito útil e prático para a realização de operações com matrizes esparsas, como multiplicações matriz por matriz ou matriz por vetor (Saad, 2003). Apesar das vantagens do IKJ em relação aos outros tipos de algoritmos de eliminação de Gauss, todos são equivalentes e realizam o mesmo número de operações de ponto flutuante (Saad, 2003). Não entanto, o tipo de algoritmo a ser usado no pré-condicionador pode influenciar no desempenho da regra de preenchimento. Nos próximos itens são apresentados maiores detalhes sobre as regras de preenchimento dos principais pré-condicionadores.

3.3.1

Regras de Preenchimento em Pré-condicionadores de Fatoração Incompleta

Quando usado um método direto, durante a fatoração LU calcula-se todos os elementos para encontrar a solução exata do sistema linear após substituição

direta/inversa. Já um pré-condicionador de fatoração incompleta não precisa calcular todos os elementos dos fatores triangulares para que o método iterativo encontre a solução. Para reduzir o esforço computacional realizado durante a construção do pré-condicionador, são considerados apenas alguns elementos nos fatores triangulares. Este procedimento é conhecido como preenchimento de elementos não-nulos e produz um pré-condicionador M de fatores triangulares incompletos (L' e U').

O procedimento é realizado utilizando-se algumas heurísticas conhecidas como regras de preenchimento para decidir quais elementos dos fatores triangulares devem ser preenchidos e quais devem ser descartados (substituídos por zero). A regra pode ser aplicada para preencher elementos em L' e U' , tanto em posições ocupadas como também em posições antes não ocupadas da matriz de coeficientes, neste último caso, está-se referindo ao preenchimento ou não de novos elementos não-nulos. Por exemplo, a regra de preenchimento deve decidir em cada passo i do algoritmo IKJ (ver Figura 3.4) se as posições da linha i da matriz de coeficientes devem ser preenchidas com os elementos L_{ik} e U_{ir} calculados em (3.8) e (3.9), ou devem ser preenchidas com zero.

Observa-se que, por cada elemento descartado, evita-se realizar todas as operações matemáticas futuras onde este elemento poderia ser requerido, tanto durante a construção do pré-condicionador como também cada vez que é requerido no processo iterativo do GMRES, melhorando a eficiência computacional da sua construção. Simultaneamente, por cada elemento descartado se introduz um erro que pode chegar a ser considerável ou não, dependendo principalmente da quantidade de vezes que o elemento descartado seria usado nas próximas operações, e também dos valores numéricos de todos os outros elementos envolvidos em tais operações (Saad, 2003).

Depois de terminada a fatoração incompleta, uma forma simples de estimar o erro total originado pelos elementos descartados é através de (3.10) (Mori et al., 1996). O produto dos fatores triangulares incompletos é igual ao pré-condicionador M , e o produto dos fatores triangulares completos é igual à matriz de coeficientes A (3.11). Quando não usada regra de preenchimento, os fatores triangulares são calculados completamente e o pré-condicionador é igual à matriz de coeficientes, e o GMRES converge em uma única iteração.

$$\|R\| = \|A - M\| \quad (3.10)$$

$$\|R\| = \|L \cdot U - L' \cdot U'\| \quad (3.11)$$

Portanto, uma regra de preenchimento eficiente deveria descartar o maior número de elementos possível, sem incrementar o erro até valores que afetem negativamente ou impeçam a convergência do método GMRES. A seguir ilustra-se como uma regra de preenchimento quando muito simplificada introduz muitos erros e pode ser inapropriada para problemas que requerem regras mais sofisticadas.

3.3.2

Pré-condicionador ILU(0)

Uma das regras de preenchimento mais simples foi adotada pelo pré-condicionador ILU(0), permitindo elementos não-nulos apenas em posições antes ocupadas por elementos não-nulos da matriz de coeficientes (Saad, 2003). Este tipo de pré-condicionador pode ser útil para algumas matrizes do tipo banda de pequeno porte, associadas à discretização de equações diferenciais parciais por diferenças finitas.

Na Figura 3.5 apresentam-se os fatores triangulares incompletos L' e U' em (a) e (b) respectivamente, a matriz de coeficientes A em (c) e finalmente o produto $L' \cdot U'$ em (d). Observa-se que o pré-condicionador ILU(0) criou fatores triangulares com a mesma estrutura que a matriz de coeficiente, não entanto, o produto $L' \cdot U'$ possui uma estrutura diferente à estrutura da matriz de coeficientes e 51 elementos de valores diferentes (de cor cinza), sendo que estes elementos são os responsáveis pelo aumento do erro. Neste exemplo estas diferenças não chegam a prejudicar a convergência do GMRES e este tipo de pré-condicionador pode ser muito apropriado para este tipo de sistema linear.

Na Figura 3.6 apresenta-se outro conjunto de matrizes (Jacobiana do problema de fluxo de carga - configuração do sistema elétrico brasileiro de 3.513 barras) com os fatores triangulares incompletos L' e U' apresentados em (a) e (b) respectivamente, a matriz de coeficientes A em (c) e o produto $L' \cdot U'$ em (d). O pré-condicionador ILU(0) criou fatores triangulares com a mesma estrutura que a

matriz de coeficientes, mas o produto $L' \cdot U'$ possui muitos elementos de valores diferentes aos encontrados na matriz de coeficientes (elementos de cor cinza), sendo os responsáveis pelo aumento do erro. Neste caso, estas diferenças podem prejudicar bastante a convergência do GMRES, sendo, portanto, inapropriado para este tipo de problema de dimensões e dados reais. Nos gráficos nz é o número total de elementos não-nulos.

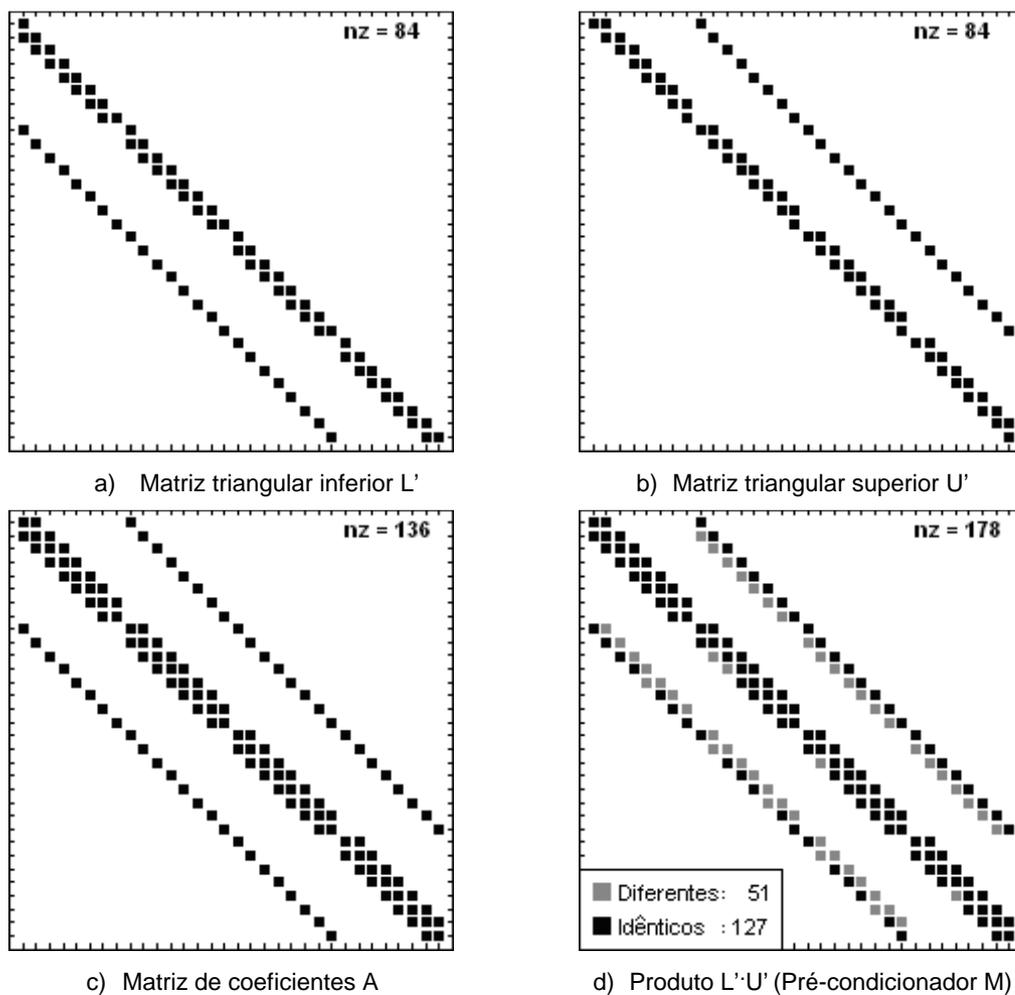


Figura 3.5 – Fatoração incompleta ILU(0) para uma matriz banda de pequeno porte.

Normalmente, em problemas reais envolvendo matrizes de certas dimensões, é necessário preencher mais posições nos fatores triangulares do que os permitidos no ILU(0), pois este pode ficar muito distante dos fatores triangulares completos. Portanto, para estes casos são necessárias regras de preenchimento mais complexas e sofisticadas que permitam adicionar novos elementos não-nulos aos fatores triangulares. No entanto, a escolha de quais novos elementos não-nulos devem ser adicionados pela regra de preenchimento deve ser realizada de forma cuidadosa, a fim de preencher apenas aqueles elementos

que vão diminuir significativamente o erro. Uma eventual desconsideração destes elementos poderia manter os erros introduzidos pela aproximação, e poderiam continuar prejudicando ou impedindo a convergência do método iterativo. Este problema está associado às deficiências das heurísticas das regras de preenchimento dos pré-condicionadores convencionais.

O problema acima é bastante estudado ao longo deste trabalho. A seguir, apresentam-se os pré-condicionadores de fatoração incompleta $ILUT(\tau, \rho)$ e o $ILU(k)$, sendo os mais representativos segundo a literatura especializada, e ambos utilizam o algoritmo de eliminação de Gauss IKJ com regras de preenchimento diferentes.

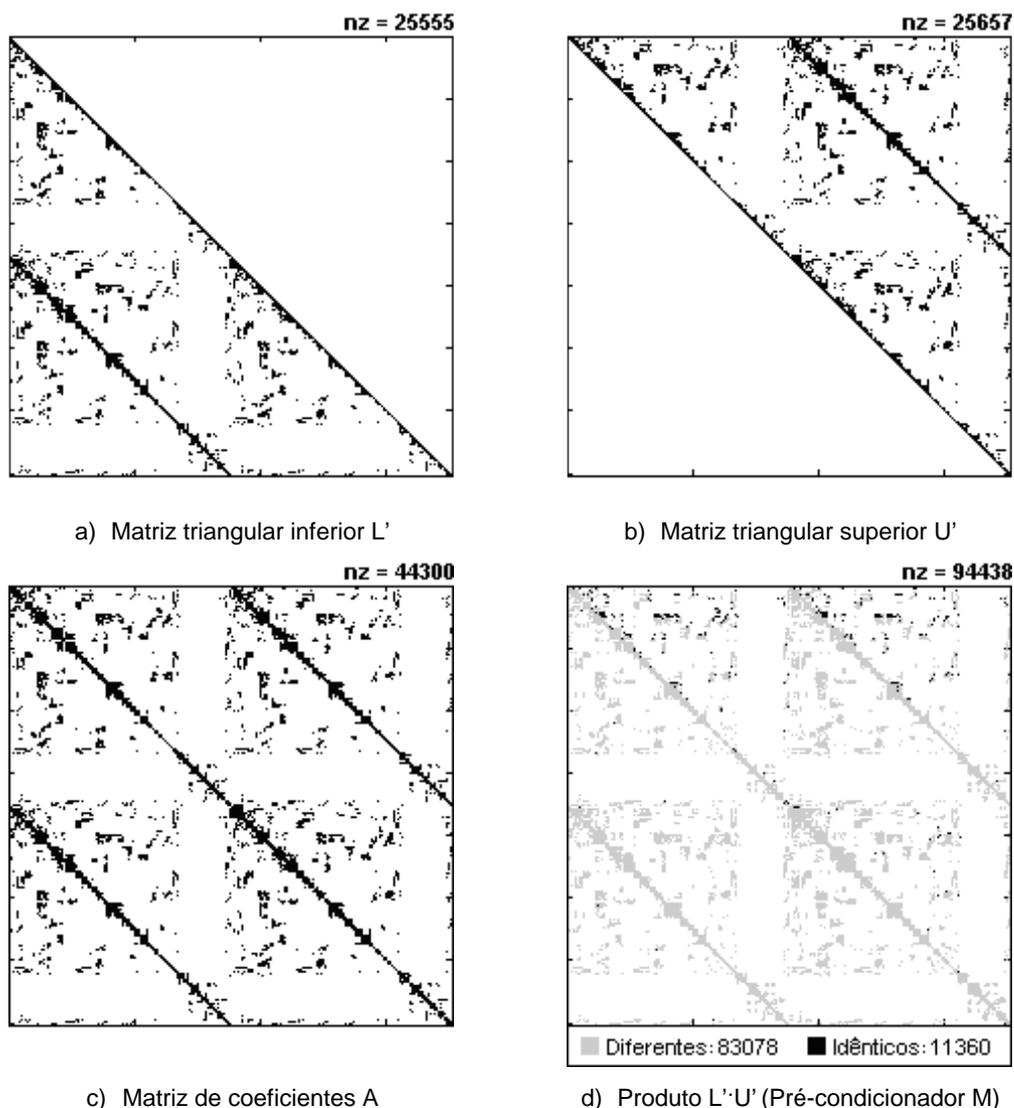


Figura 3.6 – Fatoração incompleta $ILU(0)$ para a matriz Jacobiana do sistema brasileiro de 3.513 barras.

3.3.3 Pré-condicionador ILU(k)

Fatorações triangulares incompletas mais precisas são geralmente mais eficientes e confiáveis por se aproximarem mais da matriz de coeficientes, e por produzirem uma taxa de convergência mais adequada no GMRES. Este tipo de pré-condicionador se diferencia da classe ILU(0) por permitir alguns preenchimentos de novos elementos não-nulos em posições antes nulas. Este é o caso da classe de pré-condicionadores ILU(k), onde k especifica qual o nível de preenchimento usado pelo pré-condicionador.

A cada elemento que é processado através da eliminação de Gauss é associado um nível de preenchimento, sendo que, dependendo do valor desse nível, o elemento pode ser preenchido ou descartado. O nível de preenchimento indica de forma aproximada o tamanho dos elementos; quanto maior o nível, menor a magnitude dos elementos. Em (Saad, 2003), emprega-se ϵ^k para representar o tamanho do elemento, que é atribuído a qualquer um cujo nível de preenchimento seja k, onde $\epsilon < 1$. Segundo (Saad, 2003), um elemento não-nulo inicia com um nível de preenchimento 1 (esse valor muda durante a implementação computacional) e um elemento zero tem nível de preenchimento infinito. No algoritmo IKJ do Apêndice III, um elemento a_{ij} no passo 5, é atualizado pela seguinte fórmula:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} \quad (3.12)$$

Considerando lev_{ij} como o nível atual do elemento a_{ij} , o modelo desenvolvido por Saad diz que o tamanho do elemento atualizado deve ser aproximado segundo:

$$a_{ij} \approx \epsilon^{lev_{ij}} - \epsilon^{lev_{ik}} \cdot \epsilon^{lev_{kj}} = \epsilon^{lev_{ij}} - \epsilon^{lev_{ik} + lev_{kj}} \quad (3.13)$$

O tamanho de a_{ij} é o máximo dos dois tamanhos $\epsilon^{lev_{ij}}$ e $\epsilon^{lev_{ik} + lev_{kj}}$, o que implica que o novo nível de preenchimento é definido por:

$$lev_{ij} = \min\{lev_{ij}, lev_{ik} + lev_{kj}\} \quad (3.14)$$

Na bibliografia especializada, recomenda-se que os níveis de preenchimento sejam substituídos por -1, conseqüentemente, o nível inicial de preenchimento de um elemento a_{ij} na matriz de coeficientes é definido por:

$$\text{lev}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ij} \neq 0 \text{ ou } i=j \\ \infty & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (3.15)$$

A cada modificação do elemento a_{ij} o nível de preenchimento é atualizado usando-se a seguinte equação:

$$\text{lev}_{ij} = \min\{\text{lev}_{ij}, \text{lev}_{ik} + \text{lev}_{kj} + 1\} \quad (3.16)$$

Se $a_{ij} \neq 0$, na matriz original A , então o elemento na posição i, j deve ter nível de preenchimento igual a zero em todo o processo de eliminação de Gauss. Esta observação se deve ao fato de que o nível de preenchimento destes elementos nunca aumenta durante a fatoração ($\min\{0, \text{lev}_{ik} + \text{lev}_{kj} + 1\}$ é sempre igual a 0), isto é, a regra de preenchimento apenas é utilizada para decidir quais os novos elementos não-nulos devem ser preenchidos ou substituídos por zero.

- **Regra Baseada no Nível de Preenchimento**

Para este pré-condicionador a regra baseada no nível de preenchimento é dada por:

Em $ILU(k)$, todos os novos elementos não-nulos a_{ij} cujo nível de preenchimento lev_{ij} não excede k são preenchidos e todos aqueles cujo nível de preenchimento lev_{ij} excede o valor de k são descartados ou simplesmente não são preenchidos.

A regra baseada no nível de preenchimento k modifica o algoritmo básico IKJ de eliminação de Gauss para criar o algoritmo do pré-condicionador $ILU(k)$ (ver Figura A.3 do Apêndice III). Dependendo do problema, este pré-condicionador pode apresentar desvantagens, algumas delas já mencionadas na seção 3.2.2.

Os aspectos negativos apresentados por (Van der Vorst, 2003) associados ao pré-condicionador ILU(k) são os seguintes:

1. Devido a que o número de novos elementos não-nulos preenchidos depende do valor de k , então, para $k > 0$, não é possível estimar a quantidade de elementos não-nulos e o esforço computacional necessário para se obter a fatoração ILU(k).
2. O custo associado à atualização dos níveis de preenchimento de elementos não-nulos pode ser elevado.
3. O nível de preenchimento de elementos não-nulos para matrizes indefinidas pode não ser um bom indicador da magnitude dos elementos que estão sendo descartados e o algoritmo pode descartar elementos grandes resultando numa imprecisão da fatoração incompleta, no sentido que $\|R\| = \|L \cdot U - A\|$ pode não ser pequeno. A prática tem mostrado que geralmente isto leva a um grande número de iterações para se obter a convergência.
4. Não existe um método que permita escolher apropriadamente o valor de k , a escolha de k depende do problema que está sendo solucionado, normalmente k é escolhido de forma empírica para apenas um sistema linear específico. Em problemas que precisam solucionar vários sistemas lineares seqüencialmente, como é o caso do problema de fluxo de carga é necessário encontrar um valor ou faixa de valores adequados para k tal que garantem a solução de todos os sistemas lineares no menor tempo de execução possível. Em análises mais complexas como, por exemplo, aquelas que precisam resolver vários fluxos de carga de diferentes pontos de operação, a escolha de um valor apropriado para k se torna ainda mais relevante.

Estes aspectos negativos sugerem que o pré-condicionador ILU(k) com uma regra baseada nos níveis de preenchimento, pode não ser o mais indicado para análises de sistemas de potência como, por exemplo, o fluxo de carga. A seguir, apresenta-se outro pré-condicionador de fatoração incompleta com uma regra de preenchimento diferente, que considera os valores numéricos de cada elemento da matriz de coeficientes. Na seção 3.5, ambos os pré-condicionadores ILU(k) e ILUT(τ, ρ) são avaliados e comparados em termos de robustez e eficiência computacional.

3.3.4 Pré-condicionador ILUT(τ, ρ)

Pré-condicionadores cujas regras são baseadas apenas no nível de preenchimento consideram apenas a posição dos elementos (estrutura da matriz de coeficientes) sem levar em consideração o valor numérico dos elementos dos fatores triangulares (Saad, 2003). Portanto, este tipo de pré-condicionadores pode provocar a perda da robustez e velocidade de convergência do GMRES e causar problemas em aplicações práticas e reais como os mencionados na seção anterior.

Uma estratégia alternativa conhecida como ILUT(τ, ρ) é apresentada em (Saad, 1994), também baseada na eliminação de Gauss IKJ e sua regra de preenchimento considera a magnitude dos elementos ao invés de apenas a sua posição. Neste caso, a regra de preenchimento usa dois parâmetros (ρ e τ), onde, ρ é um número inteiro que limita o número máximo de elementos permitidos em cada linha dos fatores triangulares L e U. Já τ é um número real (tolerância) usado para descartar os elementos considerados pequenos. Basicamente, ρ é responsável pelo controle do uso da memória, enquanto que τ é usado para reduzir o tempo computacional (Benzi, 2002 e Saad, 2003).

- **Regra de Preenchimento com Duplo Parâmetro Limitante**

A idéia central que permite definir a regra de preenchimento do pré-condicionador ILUT(τ, ρ) é descartar apenas os menores elementos (em valor absoluto) dos fatores triangulares. Neste caso, aparentemente, quando os menores elementos são descartados se produz um menor erro do que quando se descarta os maiores.

A regra se fundamenta em duas heurísticas; uma usa o parâmetro τ para decidir quais elementos pequenos devem ser descartados; e a outra usa ρ para decidir quantos elementos grandes serão preenchidos em cada linha dos fatores triangulares. Esta regra de preenchimento é chamada de duplo parâmetro limitante e é resumida como:

Um elemento w_k é substituído por zero se este for menor que uma tolerância relativa τ_i obtida multiplicando-se a tolerância τ pela norma da i -ésima linha da matriz de coeficientes original (norma-2). Entretanto, são mantidos apenas os ρ maiores elementos de cada linha no fator L e no fator U, em adição aos elementos diagonais, que são sempre mantidos. O cálculo de w_k é efetuado de acordo com o algoritmo do ILUT(τ, ρ) apresentado na Figura A.4 do Apêndice III.

Na Figura A.4 do Apêndice III ilustra-se como a regra de preenchimento é inserida dentro do algoritmo de eliminação de Gauss IKJ, para formar o algoritmo do pré-condicionador ILUT(τ, ρ). Embora o ILUT(τ, ρ) pretenda superar as limitações do ILU(k), propondo uma regra que considera a magnitude dos elementos, esta regra pode apresentar algumas falhas que prejudicam o desempenho do ILUT(τ, ρ).

A seguir, avalia-se a regra com duplo parâmetro limitante do pré-condicionador ILUT(τ, ρ) para o problema de fluxo de carga. O objetivo é ilustrar as falhas provocadas pela regra e mostrar como estas falhas prejudicam o desempenho do método GMRES.

3.3.5

Avaliação da Regra com Parâmetro Limitante - ILUT(τ, ρ)

Para ilustrar as deficiências associadas a esta regra para o problema de interesse, simula-se um fluxo de carga utilizando um sistema-teste de pequeno porte de cinco barras e dois geradores (CEPEL, 2001), apresentado na Figura 3.7.

Na Tabela 3.2 são apresentados todos os elementos do fator triangular L, resultado da fatoração LU completa, realizada sobre a matriz Jacobiana da primeira iteração do método Newton-Raphson. Na primeira coluna apresenta-se a ordem ou seqüência que teoricamente a regra deveria seguir para descartar os elementos desde o menor até o maior, em valor absoluto. A segunda e terceira coluna (i e k , respectivamente) indicam a posição de cada elemento na matriz L.

Já na quarta coluna apresenta-se, em ordem crescente, os valores dos 21 elementos de L .

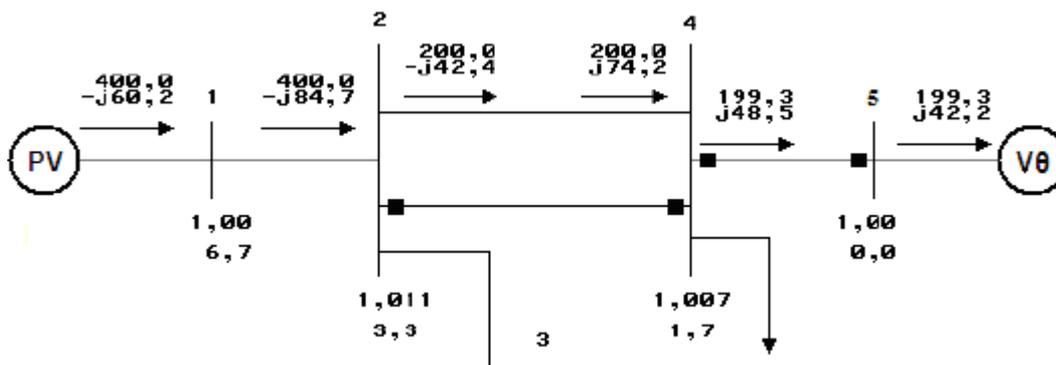


Figura 3.7 – Sistema teste de 5 barras.

Os experimentos numéricos consistem em calcular os fatores triangulares incompletos L' e U' , a fim de verificar em L' , quais elementos foram descartados pela regra de preenchimento do pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$. Com a finalidade de registrar falhas da regra de preenchimento, foram realizados dois experimentos para dois valores diferentes de tolerância, sendo, $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ e $\tau_2 = 2,5 \cdot 10^{-4}$, conforme descritas na Tabela 3.2. O parâmetro ρ não foi considerado, pois o sistema é de pequeno porte, ou seja, não há limite máximo para o número de elementos não-nulos. Para cada experimento, na quinta e sexta colunas, especifica-se com **D** se o elemento foi descartado, e com **P** se o elemento foi preenchido.

Um dos objetivos deste exemplo é verificar se a regra descarta os menores elementos não-nulos (em valor absoluto) na ordem especificada na primeira coluna da Tabela 3.2. Portanto, não se deve esperar que elementos grandes, maiores que a tolerância especificada, sejam descartados. Se isto ocorrer, comprova-se os efeitos negativos no desempenho do GMRES associados a falha da regra com parâmetro limitante. Para este propósito, registrou-se na Tabela 3.3 o número de operações de ponto flutuante para a construção do pré-condicionador e para a execução do método iterativo.

Apenas para fins comparativos, apresenta-se também o número de operações de ponto flutuante para um pré-condicionador de fatores completos (LU) e para o GMRES puro.

Tabela 3.2 – reenchimento de elementos usando a regra com parâmetro limitante τ

Ordem	i	k	L_{ik}	τ_1	τ_2
1	10	2	$-1,31 \cdot 10^{-18}$	D	D
2	6	5	$7,62 \cdot 10^{-16}$	D	D
3	8	6	$-7,66 \cdot 10^{-16}$	D	D
4	9	5	$7,66 \cdot 10^{-16}$	D	D
5	8	5	$-6,62 \cdot 10^{-15}$	D	D
6	9	6	$-6,62 \cdot 10^{-15}$	D	D
7	7	2	$-6,68 \cdot 10^{-15}$	D	D
8	10	4	-0,0095	P	P
9	9	8	-0,0156	P	P
10	8	7	-0,0241	P	P
11	10	7	0,0247	P	P
12	7	3	-0,0328	P	D
13	4	3	-0,0332	P	P
14	2	1	0,0612	P	D
15	10	9	-0,0613	P	D
16	7	1	0,0620	P	D
17	10	8	-0,6831	P	D
18	9	7	-0,6985	P	P
19	10	3	-0,9888	P	P
20	7	4	-1,0123	P	P
21	10	1	-1,0142	P	P

Observa-se que, para τ_1 foram descartados efetivamente os sete (7) menores elementos em L realizando 155 operações para construir o pré-condicionador, 44 operações a menos que a fatoração completa LU. A regra surtiu o efeito esperado uma vez que elementos grandes não foram descartados resultando no mesmo número de iterações e operações do método GMRES (214 operações) do caso LU completo. Portanto, este exemplo ilustra que a regra foi usada sem comprometer a eficiência do método GMRES.

Tabela 3.3 – Número de operações realizadas na simulação de fluxo de carga no sistema-teste de 5 barras

Etapas \ Casos	GMRES+ILUT(τ, ρ)		GMRES+LU	GMRES
	τ_1	τ_2		
Pré-condicionador	155	143	199	---
Método Iterativo	214	428	214	16.164
Total	369	571	413	16.164

Por outro lado, para τ_2 , aumentou-se o valor da tolerância com o objetivo de descartar mais elementos não-nulos, especificamente o menor ainda não descartado ($L_{10,4}$). O resultado não foi o esperado, pois foram descartados os elementos L_{21} e L_{73} , cujos valores são maiores que os não descartados: $L_{10,4}$; $L_{9,8}$; $L_{8,7}$; $L_{10,7}$ e $L_{4,3}$. Embora o número de operações efetuadas para a construção do pré-condicionador tenha diminuído as efetuadas pelo método GMRES aumentou. O total de operações foi de 571, ou seja, 158 operações a mais que para o GMRES+LU, significando que a eliminação dos elementos L_{21} e L_{73} prejudicou a convergência do GMRES. Sem pré-condicionamento, o GMRES é muito ineficiente como comprovado pelo elevado número de operações.

O exemplo detectou efeitos indesejáveis associados à regra com duplo parâmetro limitante quando se aumenta o valor da tolerância τ para eliminar mais elementos não-nulos. Esse experimento mostrou que, para o problema de interesse, a regra com duplo parâmetro limitante pode não seguir corretamente a sua função de descartar os menores elementos na ordem desejada. A seguir, mostra-se que nem sempre a magnitude do elemento é o indicador mais apropriado para decidir se o elemento deve ou não ser descartado.

3.3.6 O Erro Gerado

Quando pelo menos um dos elementos dos fatores triangulares é descartado, erros são introduzidos no cálculo dos próximos elementos, tornando o produto dos fatores diferente da matriz de coeficientes. Usando (3.11), pode-se calcular o erro resultante após o elemento L_{ik} ser descartado, neste caso, o erro é estimado por (3.17), onde, L' representa o fator triangular inferior incompleto. De forma

análoga, o erro resultante após o elemento U_{ik} ser descartado é estimado por (3.18). Em ambos os casos, o erro é também um indicador da qualidade dos fatores incompletos (pré-condicionador), ou seja, quanto menor for melhor a qualidade do pré-condicionador. A norma-1 e norma- ∞ são escolhidas convenientemente para facilitar o cálculo do erro, a fim de realizar o menor número de operações possíveis.

$$\|R(L_{ik})\|_1 = \|L \cdot U - L' \cdot U\|_1, \quad i > k \quad (3.17)$$

$$\|R(U_{ik})\|_\infty = \|L \cdot U - L \cdot U'\|_\infty, \quad i < k \quad (3.18)$$

Uma vez calculado o erro para cada um dos elementos dos fatores triangulares, é possível estimar a matriz de erros ME, de acordo com (3.19) (Mori et al., 1996). O valor de cada elemento da matriz ME representa o erro associado com a eliminação do elemento que ocupa a mesma posição na matriz de fatores triangulares. Para fins ilustrativos, na Figura 3.8 apresentam-se as matrizes dos fatores triangulares e de erros estimadas para a matriz Jacobiana usada no exemplo anterior. A tonalidade das cores está associada a magnitude dos elementos. O símbolo infinito na diagonal desta matriz não está associado a nenhum valor numérico, apenas indica que os elementos da diagonal do fator triangular superior U não são eliminados.

$$ME = \begin{bmatrix} \infty & \dots & \|R(U_{1j})\| & \dots & \|R(U_{1i})\| & \dots & \|R(U_{1n})\| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|R(L_{j1})\| & \dots & \infty & \dots & \|R(U_{ji})\| & \dots & \|R(U_{jn})\| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|R(L_{i1})\| & \dots & \|R(L_{ij})\| & \dots & \infty & \dots & \|R(U_{in})\| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|R(L_{n1})\| & \dots & \|R(L_{nj})\| & \dots & \|R(L_{ni})\| & \dots & \infty \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

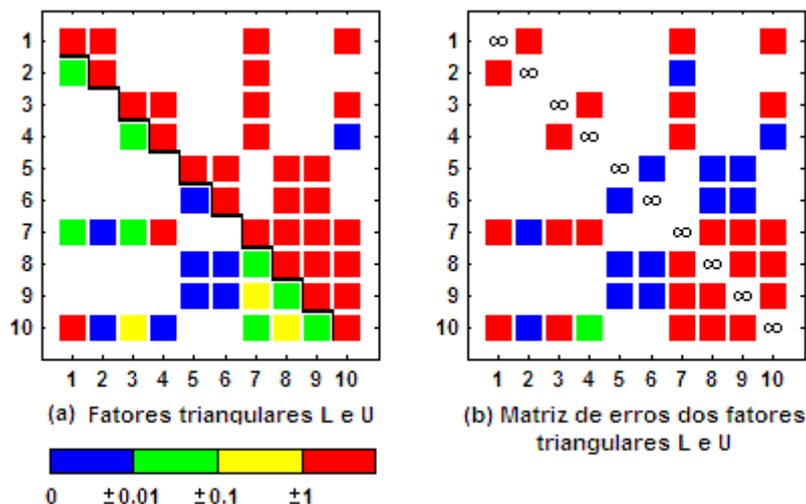


Figura 3.8 – Padrão de cor dos fatores triangulares e de sua correspondente matriz de erros

Nota-se uma relação entre os menores elementos da matriz L e os elementos da matriz de erros (cor azul), esta diferenciando os elementos que podem ser eliminados (em azul e verde) daqueles que não devem ser eliminados (em vermelho). Este mecanismo indica que uma regra que descarte os elementos que produzem o menor erro possível seja mais eficiente e precisa que a anterior.

Para investigar tal indicação, a simulação do exemplo anterior é repetida e os elementos são mostrados na Tabela 3.4. Uma vez calculados os erros e ordenados os elementos, são realizadas 21 simulações descartando-se um elemento por cada simulação, na ordem especificada na Tabela 3.4, registrando-se o número de operações associadas à construção do pré-condicionador (coluna 6) e ao GMRES (coluna 7).

Observa-se que, o número de iterações do GMRES aumenta cada vez que os elementos que produzem os maiores erros são descartados, comportamento similar ao detectado quando os elementos L_{21} e L_{73} foram descartados pela regra com parâmetro limitante (em cinza). Isto justifica o aumento do número de iterações do método GMRES registrado na Tabela 3.3 (quando usado τ_2).

Este exemplo revelou dois pontos adversos da regra com duplo parâmetro limitante, ou seja, descarta alguns elementos que não deveriam ser descartados e não descarta alguns que deveriam.

Tabela 3.4 – Erro produzido depois de que o elemento L_{ik} é descartado e número de operações de ponto flutuante realizadas por etapas

Ordem	i	k	Elemento L_{ik}	Erro Associado	Número de Operações		
					ILUT(τ, ρ)	GMRES	Total
1	10	2	$-1,31 \cdot 10^{-18}$	0,0010	193	214	407
2	6	5	$7,62 \cdot 10^{-16}$	0,0018	175	214	389
3	8	6	$-7,66 \cdot 10^{-16}$	0,0018	175	214	389
4	9	5	$7,66 \cdot 10^{-16}$	0,0018	175	214	389
5	8	5	$-6,62 \cdot 10^{-15}$	0,0076	163	214	377
6	9	6	$-6,62 \cdot 10^{-15}$	0,0076	163	214	377
7	7	2	$-6,68 \cdot 10^{-15}$	0,0077	155	214	369
8	10	4	-0,0095	0,0328	151	214	365
9	9	8	-0,0156	3,2377	147	428	575
10	2	1	0,0612	4,0129	141	428	569
11	7	1	0,062	4,0699	135	428	563
12	8	7	-0,0241	4,8524	127	428	555
13	10	7	0,0247	4,9734	123	428	551
14	10	9	-0,0613	6,5961	121	428	549
15	7	3	-0,0328	8,0816	115	428	543
16	4	3	-0,0332	8,1728	Divergente		
17	10	1	-1,0142	66,5423			
18	9	7	-0,6985	140,4832			
19	10	8	-0,6831	141,4121			
20	10	3	-0,9888	243,616			
21	7	4	-1,0123	249,6776			

Observa-se também que, a ordem estabelecida na tabela permite saber quantos e quais elementos, como o máximo que se pode descartar antes que o método iterativo comece a realizar mais operações prejudicando a sua eficiência. Neste exemplo, recomenda-se descartar apenas os 8 primeiros elementos da tabela, conseguindo-se um total de 365 operações. Contudo, após apresentados e

ilustrados os aspectos negativos associados ao pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$, pode-se concluir que:

- I. A heurística da regra com duplo parâmetro limitante, em alguns casos, não consegue distinguir os menores dos maiores elementos (em valor absoluto). Nesses casos a regra falha ao descartar alguns dos maiores elementos ao invés dos menores.
- II. Nem sempre a eliminação dos menores elementos (em valor absoluto) produz um erro menor que o produzido quando descartados alguns dos maiores elementos.
- III. De forma similar ao $ILU(k)$, a escolha de valores apropriados para os parâmetros do $ILUT(\tau, \rho)$ é uma tarefa difícil, já que este possui dois parâmetros e existe uma interdependência entre os parâmetros do GMRES e o tipo de problema que está sendo solucionado. Em análises mais complexas, como aquelas que solucionam vários fluxos de carga com diferentes pontos de operação, a escolha de valores apropriados para ρ e τ se torna ainda mais relevante.

Uma das propostas deste trabalho é uma regra de preenchimento para tornar o processo de pré-condicionamento mais eficiente e robusto com base nos erros associados a cada elemento descartado. Esta regra, apresentada no capítulo 4, não resulta em operações adicionais e permite descartar maior número de elementos que a regra com duplo parâmetro limitante do $ILUT(\tau, \rho)$ e que a regra baseada no nível de preenchimento do $ILU(k)$.

3.4 Pré-condicionadores Aplicados a Problemas de Sistemas Elétricos de Potência

Neste ponto, fica mais evidente a importância de se construir um pré-condicionador de qualidade para melhorar o desempenho do método iterativo e torná-lo competitivo em relação aos tradicionais métodos diretos, tanto em termos de eficiência computacional como também de robustez. Algumas referências apresentam pré-condicionadores aplicados a diversos problemas da ciência e da engenharia, inclusive para o problema de interesse do trabalho (Galiana et al., 1994; Mori et al., 1996; Alves et al., 1999; Borges et al., 1996; Pai & Dag, 1997; Flueck & Chiang, 1998; de Leon & Semlyen, 2002; Dag & Semlyen,

2003; Chen & Shen, 2006; Mori & Iizuka, 2007; Pessanha et al., 2009). Parte destes trabalhos se limita a apresentar e avaliar pré-condicionadores já existentes aplicados a outros tipos de problema, sem investigar a qualidade e adequação destes ao problema tratado, como por exemplo, o uso de algoritmos inapropriados, de regras de preenchimento e o uso de parâmetros cujos valores não necessariamente se adequam a todos os tipos de problema.

A seguir são analisados os principais avanços ocorridos durante os últimos anos com base nas referências mencionadas e de estudos sobre recentes desenvolvimentos computacionais realizados em pré-condicionadores (Benzi et al., 1999a; Benzi et al., 1999; Benzi et al., 2000; Benzi, 2002; Chen, 2005).

3.4.1 **Características dos Principais Pré-condicionadores**

Na Tabela 3.5 apresentam-se as características mais relevantes das estratégias de pré-condicionamento aplicadas a problemas de sistemas elétricos de potência. A primeira coluna identifica o pré-condicionador e a segunda indica a categoria a qual pertence cada estratégia de pré-condicionamento, ou seja, pré-condicionadores de aproximação esparsa da matriz inversa (PAEI) e pré-condicionadores de matriz descomposta (PMD). Na terceira coluna é informado o tipo de matriz de coeficientes que cada algoritmo de pré-condicionamento utiliza para calcular o pré-condicionador M . Na quinta coluna é mencionado o tipo de algoritmo usado para construir o pré-condicionador. Finalmente na última coluna apresenta-se o tipo de regra de preenchimento dos elementos do pré-condicionador.

A primeira estratégia de pré-condicionamento, que se tem conhecimento, aplicada ao problema de fluxo de carga foi Cholesky incompleto utilizando-se o método iterativo Gradiente Conjugado (Galiana et al., 1994; Mori et al., 1996). Para construir este tipo de pré-condicionador é necessário que a matriz de coeficientes seja numericamente simétrica e definida positiva. Este pré-condicionador é do tipo matriz descomposta devido à descomposição de Cholesky em fatores triangulares. A regra de preenchimento não permite a presença de novos elementos não-nulos nos fatores incompletos, isto é, apenas são preenchidas as posições antes ocupadas na matriz de coeficientes original. Por esta razão, esta regra não usa nenhum tipo de parâmetros. Em (Mori et al.,

1996) define-se pela primeira vez a matriz de erro R, com a intenção de mostrar que erros são introduzidos quando novos elementos não-nulos não são preenchidos no pré-condicionador.

Tabela 3.5 – Principais características dos pré-condicionadores propostos na área de sistemas de potência

Nome do Pré-condicionador	Tipo	Tipo de Matriz de Coeficientes	Algoritmo	Regra de Preenchimento
Cholesky Incompleto	PMD	Simétrica e definida positiva: B' e B''	Fatoração Cholesky: $M=L \cdot L^T$	Sem novos elementos não-nulos
Jacobiana da Primeira Iteração	PMD	Assimétrica: J	Fatoração LU: $M=J^0=L^0 \cdot U^0$	---
Cholesky Completo da Primeira Iteração	PMD	Simétrica e definida positiva: B' e B''	Fatoração Cholesky: $M=L \cdot L^T$	---
Matriz Diagonal	PAEI	Assimétrica: J	$M=Diagonal(J)$	Preencher elementos da diagonal
ILU(0)	PMD	Assimétrica: J	Algoritmo KJI de Fatoração LU: $M=L' \cdot U'$	Sem novos elementos não-nulos
Blocos Diagonais	PMD	Assimétrica: Blocos Pθ e QV de J	Algoritmo KJI de Fatoração LU: $M=Blocos (Pθ \text{ e } QV)$	Sem novos elementos não-nulos
FastD	PMD	Assimétrica: B'	Algoritmo KJI de Fatoração LU: $M=B' = L \cdot U$	---
ILU(τ)	PMD	Assimétrica: J	Fatoração LU: $M=L' \cdot U'$	Com parâmetro limitante τ
Aproximação da Inversa por Chebyshev	PAEI	Simétrica e definida positiva: B' e B''	Aproximação de B'^{-1} usando o Polinômio de Chebyshev	Polinômio de Chebyshev
JFNG	PAEI	Assimétrica: J	Fórmulas de Broyden	Fórmulas de Broyden
ILU(k)	PMD	Assimétrica: J	Algoritmo IKJ de Fatoração LU: $M=L' \cdot U'$	Nível de novos elementos não-nulos
ILUT(τ)	PMD	Assimétrica: J	Algoritmo IKJ de Fatoração LU: $M=L' \cdot U'$	Com parâmetro limitante τ
ILUT(τ,p) Quase-Fixo	PMD	Assimétrica: J	Algoritmo IKJ de Fatoração LU: $M=L' \cdot U'$	Com duplo parâmetro limitante τ e p
Multifrontal LU	PMD	Assimétrica: J	Algoritmo Multifrontal de Fatoração LU: $M=J^0=L^0 \cdot U^0$	---

Uma forma simples e prática de pré-condicionamento é usar os fatores triangulares de Cholesky completos, sem regra de preenchimento,

conseqüentemente também sem parâmetros. Este tipo de pré-condicionador é proposto e usado em (Alves et al., 1999) para análise de contingências, usando-se sempre o mesmo pré-condicionador durante todo o processo de solução, evitando-se uma nova construção por cada sistema linear. Uma versão deste tipo de pré-condicionador para matrizes assimétricas de fluxo de carga foi apresentada anteriormente em (Borges et al., 1996), onde se propõe usar a matriz Jacobiana da primeira iteração Newton-Raphson para construir um pré-condicionador igual ao produto dos fatores triangulares completos, sem regra de preenchimento, sem parâmetros e fixo durante toda a simulação.

Já em (Flueck & Chiang, 1998) são apresentados e comparados quatro tipos de estratégias de pré-condicionamento conhecidas como: pré-condicionamento Matriz Diagonal, pré-condicionamento ILU(0), pré-condicionamento de Blocos Diagonais e o pré-condicionamento de aproximação da matriz Jacobiana pela matriz Desacoplado Rápido (FastD). A primeira é conhecida como uma das mais simples formas de pré-condicionamento (Saad, 2003). Neste caso, M é igual à inversa da matriz formada apenas pelos elementos da diagonal da matriz Jacobiana (3.20). Quando usado este pré-condicionador, o sistema equivalente é calculado explicitamente devido à facilidade em se determinar a matriz inversa da matriz diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} J_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/J_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/J_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

A segunda estratégia de pré-condicionamento conhecida como ILU(0) é similar ao pré-condicionador apresentado em (Galiana et al., 1994), sendo neste caso possível aplicar em matrizes assimétricas. A regra de preenchimento permite apenas usar as posições antes ocupadas na matriz de coeficientes original, não permitindo o preenchimento de novos elementos não-nulos. A terceira estratégia, pré-condicionador de Blocos Diagonais da matriz Jacobiana (J) também não oferece dificuldades na sua construção, pois considera apenas os blocos de $P\theta$ e QV de J , como apresentado em (2.6). O pré-condicionador é construído implicitamente na forma de fatores triangulares incompletos sem considerar novos elementos não-nulos.

$$M = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & \\ & L \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O quarto e último pré-condicionador FastD, proposto em (Flueck & Chiang, 1998) é igual à matriz B' do método desacoplado rápido, construído na forma de fatores triangulares completos. Este pré-condicionador é avaliado e comparado com os outros três anteriores em sistemas lineares de Fluxo Carga de até 8.027 equações, usando-se o método iterativo GMRES. Obviamente os melhores resultados são conseguidos com o pré-condicionador FastD, já que preenche totalmente os fatores triangulares, não usando, portanto, parâmetros.

Outra estratégia conhecida como pré-condicionador de fatoração incompleta com parâmetro limitante ILU(τ), do tipo matriz descomposta é apresentada em (de Leon & Semlyen, 2002). Neste caso, o pré-condicionador é igual ao produto dos fatores triangulares incompletos, construído usando-se uma regra de preenchimento com parâmetro limitante τ . A referência apresenta um método para calcular um valor de τ para cada sistema elétrico (3.22), assumindo a tolerância τ como a metade do número total de equações totais (N_{eq}) do sistema linear. A regra permite preencher em L' e U' apenas os elementos maiores que τ .

$$\tau = \frac{1}{2 \cdot N_{eq}} \quad (3.22)$$

Em (Dag & Semlyen, 2003) é proposto o uso de pré-condicionadores do tipo aproximação esparsa da matriz inversa, onde tanto a construção do pré-condicionador como o preenchimento de seus elementos dependem do grau do polinômio de Chebyshev (3.23) escolhido. Neste caso, quanto maior for o grau k do polinômio, melhor a aproximação da matriz inversa, logicamente que também mais elementos são preenchidos e o pré-condicionador se torna menos esparsa. Em (3.23), I é matriz identidade, T_k é conhecida como a matriz do polinômio de Chebyshev com $T_0(Z)=I$ e $T_1(Z)=Z$.

$$A^{-1} = \frac{C_0}{2} \cdot I + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot T_k(Z) \quad (3.23)$$

Em (Chen & Shen, 2006) é apresentado um pré-condicionador M adaptativo que, a partir de um pré-condicionador inicial M_0 , é aumentado e atualizado internamente em cada iteração do GMRES e externamente em cada iteração Newton. O valor de M_0 usado nos experimentos é igual à inversa da matriz formada apenas pelos elementos da diagonal da matriz Jacobiana (3.20). Portanto, em cada iteração GMRES e Newton, novos elementos são inseridos fora da diagonal de M , aproximando-a cada vez mais da matriz inversa e reduzindo sua esparsidade. Após várias atualizações, M se torna um pré-condicionador de boa qualidade. O algoritmo deste pré-condicionador usa as fórmulas de Broyden para realizar as adaptações ou atualizações tanto de forma externa no algoritmo Newton, como também de forma interna no algoritmo GMRES. O pré-condicionador Newton-GMRES Livre de Jacobiana (JFNG) pode ser considerado do tipo aproximação esparsa da matriz inversa, já que em cada atualização preenche cada vez mais elementos para se aproximar mais da matriz inversa.

Recentemente, a referência (Mori & Iizuka, 2007) apresentou outro pré-condicionador do tipo matriz descomposta identificado como pré-condicionador de fatoração incompleta baseado no nível de elementos não-nulos $ILU(k)$ (também encontrado na literatura como $ILU(p)$), apresentado na seção 3.3.3. Neste pré-condicionador o parâmetro inteiro k é conhecido como o nível de elemento não-nulo, e é utilizado para decidir que elemento deve ou não ser preenchido nos fatores triangulares incompletos L' e U' . Segundo a heurística da regra de preenchimento, cada vez que se aumenta o valor de k , aumenta-se também o número de novos elementos não-nulos preenchidos. Este pré-condicionador também é usado e recomendado em (Pai & Dag, 1997) em análises no domínio do tempo de fenômenos de estabilidade.

Continuando as propostas de pré-condicionamento fixo apresentadas em (Borges et al., 1996; Flueck & Chiang, 1998; Alves et al., 1999), em (Pessanha et al., 2009) propõe-se uma estratégia de pré-condicionamento quase-fixo para solucionar cenários de difícil convergência de fluxo de carga. A matriz Jacobiana calculada antes da primeira iteração Newton-Raphson é utilizada para construir o pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ e a fim de amenizar o custo computacional associado a sua construção, uma estratégia para mantê-lo fixo sempre que possível é incluída.

Finalmente em (Siddhartha et al. 2010) é apresentado e avaliado em análises no domínio do tempo um dos pré-condicionadores do tipo matriz descomposta mais usados e recomendados pela literatura especializada, o pré-condicionador de fatoração incompleta ILUT(τ) com um parâmetro limitante τ . É proposto também um pré-condicionador quase-fixo chamado de Multifrontal LU (Davis, 2004) para calcular os fatores triangulares completos L e U, ou seja, sem regra de preenchimento. Este pré-condicionador utiliza método direto no início do processo de solução da análise no domínio do tempo a partir da primeira matriz Jacobiana, e são usados sem nenhuma atualização nas iterações e intervalos de tempo subseqüentes, até não obter convergência para então recalculá-los os fatores.

3.4.2

Vantagens e Desvantagens dos Principais Pré-condicionadores

Uma vez apresentadas as principais características dos pré-condicionadores, é necessário determinar se estas favorecem ou não o desempenho do GMRES, quando usados para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga. A seguir, a partir das características expostas na Tabela 3.5, apresentam-se as principais vantagens e desvantagens das estratégias de pré-condicionamento mencionadas anteriormente, as quais são apresentadas de forma resumida na Tabela 3.6.

Os pré-condicionadores: Cholesky Incompleto, Cholesky Completo da Primeira Iteração e Aproximação da Inversa por Chebyshev (Galiana et al., 1994; Mori et al., 1996; Dag & Semlyen, 2003) embora sejam de rápida construção, não podem ser usados quando o problema de fluxo de carga se soluciona pelo método de Newton-Raphson devido à assimetria numérica da matriz Jacobiana e normalmente indefinida para sistemas de médio e maior porte, como visto no capítulo 2. A aplicação deste tipo de pré-condicionador deve ser limitada apenas para solucionar o problema de fluxo de carga Linearizado, já que só podem ser usados em matrizes simétricas.

Os pré-condicionadores fixos: Jacobiana da Primeira Iteração e Aproximação da Matriz Jacobiana pela Matriz Desacoplado Rápido (FastD) (Alves et al., 1999; Flueck & Chiang, 1998) conseguem reduzir o custo computacional uma vez que são contruídos uma única vez, no início da primeira iteração do método Newton-

Raphson, sendo mantidos nas subseqüentes iterações sem nenhum tipo de atualização de seus elementos. É vantajoso computacionalmente usar o pré-condicionador fixo como proposto em (Alves et al., 1999; Flueck & Chiang, 1998) apenas em análises de fluxo de carga sem controles e sem considerar limites.

Quando considerados, por exemplo, os limites de geração de potência reativa, ocorrem consideráveis alterações numéricas na matriz Jacobiana, cada vez que uma barra PV é transformada em PQ, ou retorna ao seu tipo original PV. Conseqüentemente, o pré-condicionador fixo deixa de ser uma boa aproximação da matriz Jacobiana e impede a convergência do método iterativo (Pessanha et al., 2009). Portanto, deve-se ter cautela ao usar os pré-condicionadores fixos do tipo Jacobiana da Primeira Iteração ou FastD devido a baixa robustez de ambos

Em (Pessanha et al., 2009) propõe-se uma solução para contornar a baixa robustez dos pré-condicionadores fixos utilizando um quase-fixo. Este pré-condicionador é atualizado cada vez que a matriz Jacobiana de fluxo de carga sofrer alterações numéricas devido à ação dos controles ou quando os limites são atingidos. Experimentos numéricos corroboram a robustez numérica e a eficiência computacional do método proposto. O pré-condicionador quase-fixo consegue convergir nos casos onde o pré-condicionamento fixo usado por (Borges et al., 1996; Flueck & Chiang, 1998; Alves et al., 1999) não conseguiria.

Os pré-condicionadores Matriz Diagonal, ILU(0) e Blocos Diagonais (Flueck & Chiang, 1998) são pouco efetivos quando usados em sistemas de médio e maior-porte, pois preenchem poucos elementos na aproximação da matriz inversa ou nos fatores triangulares. Neste último caso não são preenchidos novos elementos não-nulos. O preenchimento de poucos elementos no pré-condicionador afeta sua qualidade e piora o desempenho do método iterativo.

Tabela 3.6 – Principais vantagens e desvantagens dos pré-condicionadores aplicados a problemas de sistemas de sistemas de potência.

Pré-condicionador	Vantagens	Desvantagens
Cholesky Incompleto	<ul style="list-style-type: none"> Rápida construção devido a que apenas precisa calcular e armazenar elementos de L' ($U=L'^T$). 	<ul style="list-style-type: none"> Pode ser usado apenas com métodos desacoplados.
Jacobiana da Primeira Iteração	<ul style="list-style-type: none"> É construído só uma vez (pré-condicionador fixo). Isento de erros introduzidos por regras de eliminação. 	<ul style="list-style-type: none"> Não há convergência em fluxo de carga com controles e limites.
Matriz Diagonal	<ul style="list-style-type: none"> Custo computacional insignificante para sua construção. 	<ul style="list-style-type: none"> Produz péssimo desempenho do método iterativo em sistema de médio e maior-porte.
ILU(0)	<ul style="list-style-type: none"> Baixo custo computacional durante sua construção. 	<ul style="list-style-type: none"> Produz baixo desempenho do método iterativo em sistema de médio e maior-porte.
Blocos Diagonais	<ul style="list-style-type: none"> Baixo custo computacional durante sua construção. 	<ul style="list-style-type: none"> Produz baixo desempenho do método iterativo em sistema de médio e maior-porte.
FastD	<ul style="list-style-type: none"> É construído só uma vez (pré-condicionador fixo). 	<ul style="list-style-type: none"> Erros introduzidos devido a que é usada B' invés de J para construir o pré-condicionador. Não há convergência em fluxo de carga com controles e limites.
ILU(τ)	<ul style="list-style-type: none"> Produz um desempenho aceitável do método iterativo. 	<ul style="list-style-type: none"> Péssimo critério para eleger o valor do parâmetro limitante τ. A regra de preenchimento pode inserir erros quando a matriz J seja mal escalonada.
ILU(k)	<ul style="list-style-type: none"> Produz bom desempenho do método iterativo. 	<ul style="list-style-type: none"> A regra de preenchimento não tem controle do erro inserido quando um elemento não é preenchido. Apenas deixa de preencher novos elementos não-nulos.
Aproximação da Inversa por Chebyshev	<ul style="list-style-type: none"> Nenhuma. 	<ul style="list-style-type: none"> Pode ser usado apenas com métodos desacoplados. Custo computacional alto para a construção do pré-condicionador.
JFNG	<ul style="list-style-type: none"> Nenhuma. 	<ul style="list-style-type: none"> Custo computacional alto para a construção do pré-condicionador, precisa de várias atualizações para melhorar sua qualidade.
ILUT(τ)	<ul style="list-style-type: none"> Produz o melhor desempenho registrado em métodos iterativos aplicados ao problema de fluxo de carga. 	<ul style="list-style-type: none"> A regra de preenchimento não tem controle do erro inserido quando um elemento não é preenchido..
ILUT(τ,p) Quase-fixo	<ul style="list-style-type: none"> Melhor robustez que os pré-condicionadores fixos. Converge em fluxo de carga com controles e limites. 	<ul style="list-style-type: none"> A regra de preenchimento não tem controle do erro inserido quando um elemento não é preenchido.
Multifrontal LU	<ul style="list-style-type: none"> Produz o melhor desempenho registrado em métodos iterativos aplicados ao problema de simulação dinâmica. 	<ul style="list-style-type: none"> Não há convergência em fluxo de carga com controles e limites.

Os pré-condicionadores de aproximação esparsa da matriz inversa aplicados ao problema de fluxo de carga nomeados como Aproximação da Inversa por Chebyshev e JFNG (Dag & Semlyen, 2003; Chen & Shen, 2006), baseados nas fórmulas de Chebyshev e Broyden, respectivamente, não são efetivos porque precisam preencher vários elementos até conseguir melhorar o desempenho do método iterativo. Preencher mais elementos significa usar um alto grau no polinômio de Chebyshev ou realizar várias atualizações usando-se a fórmula de Broyden, produzindo pré-condicionadores menos esparsos e aumentando o número de operações de ponto flutuante necessárias durante sua construção. Segundo os autores, métodos iterativos usando este tipo de pré-condicionadores podem apresentar melhor desempenho que os métodos diretos quando usados em computação paralela, devido à não seqüencialidade das operações envolvidas nos seus algoritmos (Chen, 2005).

No caso do pré-condicionador ILU(k) (Mori & Iizuka, 2007), o maior problema está associado à efetividade da regra de preenchimento para decidir que elementos devem ou não ser preenchidos nos fatores triangulares. Neste pré-condicionador a regra usa apenas informação da estrutura da matriz Jacobiana e das posições dos elementos nos fatores triangulares. Informação do tamanho dos elementos não preenchidos ou do erro associado não é considerada, portanto, a regra pode deixar de preencher elementos importantes introduzindo erros e afetando a qualidade do pré-condicionador resultante (Saad, 2003; Saad & Van der Vorst, 2000; Mori & Iizuka, 2007). Uma restrição desta regra é que apenas pode deixar de preencher novos elementos não-nulos, isto é, sempre são preenchidos os elementos dos fatores triangulares relativos às posições ocupadas na matriz Jacobiana original.

Embora os pré-condicionadores com parâmetro limitante $ILU(\tau)$ e $ILUT(\tau)$ (de Leon & Semlyen, 2002; Siddhartha et al. 2010), aplicados ao problema de fluxo de carga, consigam deixar de preencher também elementos que ocupam as posições dos elementos da matriz Jacobiana, ainda apresentam problemas associados às regras de preenchimento (Saad & Van der Vorst, 2000). As regras de preenchimento destes pré-condicionadores foram propostas com a intenção de melhorar o desempenho e superar as restrições da regra usada no pré-condicionador ILU(k), levando em consideração o tamanho dos elementos no momento de decidir se devem ser preenchidos ou não. Porém, as heurísticas e aproximações matemáticas que fundamentam estas regras apresentam

problemas que serão esclarecidos e estudados posteriormente neste capítulo. Estas regras introduzem erros nos fatores triangulares quando alguns elementos importantes deixam de ser preenchidos. Nesta tese comprova-se que, nem sempre, o não preenchimento dos menores elementos (em valor absoluto) introduz erros menores no pré-condicionador.

Existem versões mais atuais tanto dos pré-condicionadores de Aproximação da Inversa por Chebyshev e JFNG como também dos pré-condicionadores $ILU(\tau)$ e $ILUT(\tau)$. Estes pré-condicionadores, ainda não avaliados no problema de fluxo de carga são conhecidos na literatura como: Aproximação da Inversa (AINV), Aproximação Esparsa da Inversa (SPAI) (Benzi & Tuma, 2000; Benzi, 2002; Chen, 2005) e o pré-condicionador de fatoração incompleta com duplo parâmetro limitante $ILUT(\tau, \rho)$ (Saad, 1994; Saad, 2003). A única diferença entre a versão $ILUT(\tau)$ (de Leon & Semlyen, 2002), aplicada ao fluxo de carga e o pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ é que este último incorpora o parâmetro ρ na regra de preenchimento. Testes computacionais apresentados neste capítulo mostraram que a escolha de um valor apropriado para ρ pode trazer benefícios em termos de eficiência computacional.

Embora o pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ não tenha sido ainda aplicado e avaliado no problema de fluxo de carga, é considerado um dos mais bem sucedidos e muitas vezes superior ao $ILU(k)$, em vários outros problemas da ciência e da engenharia (Benzi, 2002), por tanto, resulta interessante sua implementação e avaliação no problema de fluxo de carga e posterior comparação com o pré-condicionador proposto nesta tese. Neste capítulo, estes tipos de pré-condicionadores são avaliados e comparados. Após apresentadas as vantagens e desvantagens dos pré-condicionadores aplicados ao problema de fluxo de carga pode-se concluir que:

- Pré-condicionadores baseados no cálculo da aproximação da inversa não devem ser aplicados no problema de fluxo de carga, já que o custo computacional associado à sua construção é elevado. Por não terem sido encontrados trabalhos onde estes pré-condicionadores sejam comparados com os pré-condicionadores de fatoração incompleta (no problema de fluxo de carga), neste capítulo são realizadas avaliações e comparações com o objetivo de confirmar que os pré-condicionadores de aproximação esparsa da

inversa são computacionalmente ineficientes e inferiores aos pré-condicionadores baseados em fatoração incompleta.

- Os pré-condicionadores baseados no cálculo dos fatores triangulares incompletos ILU(k) e ILUT são atualmente os mais eficientes e apropriados para o problema de fluxo de carga. Simulações apresentadas nesta tese confirmam sua influência positiva no desempenho dos métodos iterativos, não apenas em termos de eficiência computacional, mas também em termos de robustez. Porém é necessário estudar, ilustrar e solucionar os problemas associados às regras de preenchimento. Neste capítulo estes pré-condicionadores são amplamente estudados e são apresentados detalhes associados à eficácia de seus algoritmos e regras de preenchimento.

Apesar do estudo, avaliação e comparação dos mais recentes e bem sucedidos pré-condicionadores serem importantes para o desenvolvimento deste trabalho, uma das principais preocupações nesta tese está relacionada com o desenho de uma nova estratégia de pré-condicionamento que torne o método iterativo mais eficiente e robusto. Entretanto, encontrar um pré-condicionador para acelerar a convergência do processo iterativo não é uma tarefa fácil. Segundo (Van der Vorst, 2003), M deve ser uma boa aproximação para A (ou A^{-1}), o custo para construir M não pode ser muito grande e o sistema resultante equivalente deve ser mais fácil de resolver do que o original. A informação apresentada neste capítulo tem como objetivo registrar o conhecimento necessário para que, no próximo capítulo, seja proposto um novo pré-condicionador aplicado ao problema de fluxo de carga.

3.5 Avaliação do Desempenho do Método GMRES

O objetivo principal é verificar qual a influência da estratégia de pré-condicionamento sobre o desempenho do método GMRES sem reordenamento. Para tal, são realizados experimentos numéricos nos sistemas-teste IEEE30, IEEE118, IEEE145, IEEE162, IEEE300 e o sistema Norte-Nordeste de 274 barras para comparar o desempenho de quatro configurações que agregam o método GMRES com quatro tipos de pré-condicionadores; ILU(k) e ILUT(τ, ρ) do tipo matriz descomposta, SPAI e AINV(τ, ρ) do tipo aproximação esparsa da

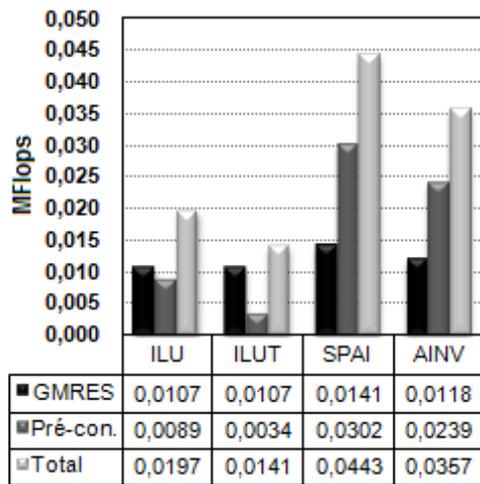
inversa. O fundamento teórico dos pré-condicionadores SPAI e $AINV(\tau, \rho)$ é apresentado no Apêndice VI.

As simulações são realizadas unicamente para o cenário do ponto mais Próximo do Máximo Carregamento (PMC) e os objetivos aqui são, comprovar quantitativamente os benefícios que o pré-condicionamento produz no desempenho do método GMRES, comparar os pré-condicionadores $ILU(k)$ e $ILUT(\tau, \rho)$, e comprovar que a qualidade dos pré-condicionadores de aproximação da inversa é inferior a dos pré-condicionadores de fatoração incompleta. Os dados dos sistemas-teste são apresentados no Apêndice VII.

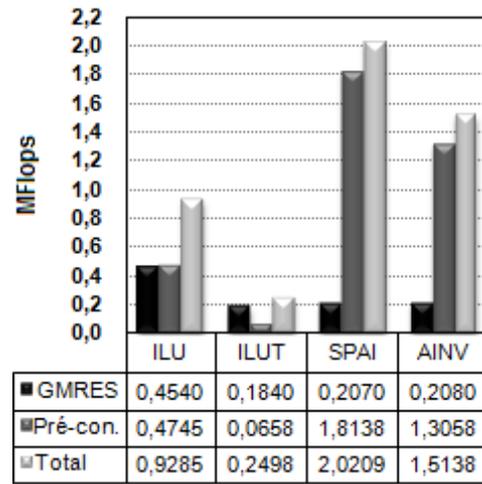
Na Figura 3.9 apresenta-se os resultados das simulações em 6 gráficos (para cada sistema elétrico). Em cada gráfico apresenta-se 4 grupos de diagramas de barras, cada um apresentando 3 barras onde a barra em preto informa o número de operações realizadas pelo GMRES, a cinza escura para a construção do pré-condicionador e a cinza clara é o número total de operações realizadas (soma das duas barras anteriores).

Baseado no número de operações de ponto flutuante, o $GMRES+ILUT(\tau, \rho)$ apresentou o melhor desempenho em comparação aos demais, e por esta razão será utilizado nos próximos experimentos para comparações com o pré-condicionador proposto nesta tese. O desempenho dos pré-condicionadores de aproximação esparsa da inversa é inferior já que realizam muitas operações de ponto flutuante durante o preenchimento de muitos elementos da matriz inversa, como visto principalmente em (b), (c) e (f).

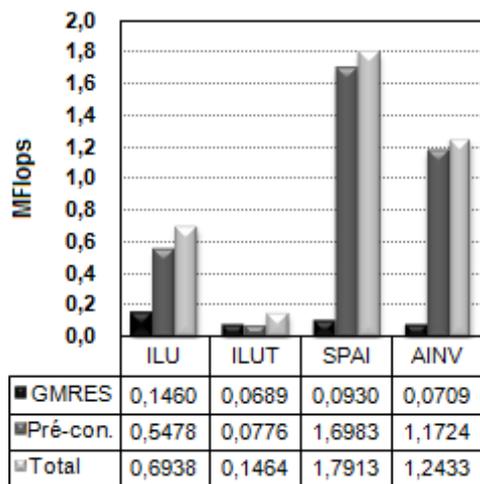
Na Tabela 3.7 são apresentados os resultados dos desempenhos do $GMRES+ILUT(\tau)$ aplicado ao problema de fluxo de carga sem o uso do parâmetro limitante ρ (de Leon & Semlyen, 2002) e o pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ aplicado primeiramente em (Pessanha et al., 2009) para o problema de interesse, lembrando que a única diferença entre ambos os pré-condicionadores é que este último incorpora o parâmetro ρ na regra de preenchimento. Os resultados mostram que na maioria dos casos um valor pequeno para ρ é capaz de reduzir bastante o número de operações de ponto flutuante uma vez que se limita o número de elementos por linha nas matrizes L e U .



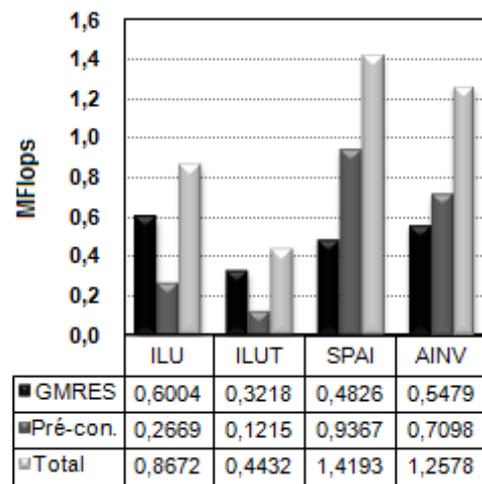
a) Sistema IEEE30-barras



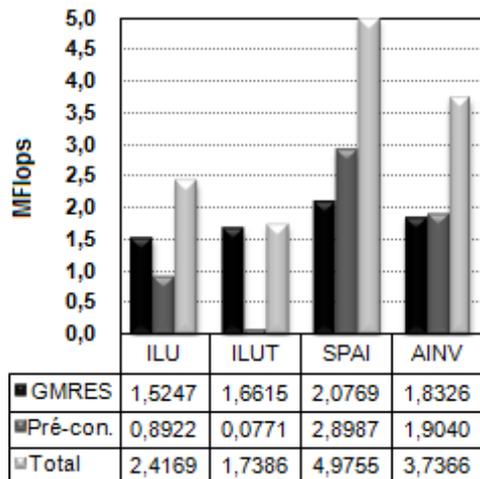
b) Sistema IEEE118-barras



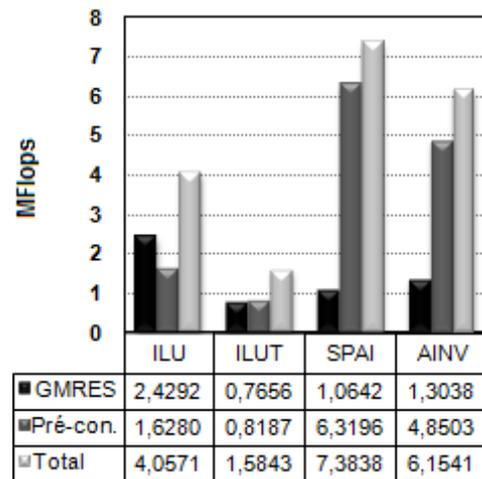
c) Sistema IEEE145-barras



d) Sistema IEEE162-barras



e) Sistema IEEE300 barras



f) Sistema Norte-Nordeste de 274 barras

Figura 3.9 – Desempenho computacional do método GMRES com pré-condicionamentos de fatoração incompleta e de aproximação da inversa.

Por exemplo, para o ILUT(τ) se uma linha tem 20 elementos cujos valores são maiores que τ , então todos são preenchidos. No entanto, para o ILUT(τ, ρ), se o

valor de ρ for 10, mesmo que os 20 elementos sejam maiores que τ , apenas são preenchidos os 10 maiores. Neste caso, são evitadas todas as operações associadas com os outros 10 elementos não preenchidos. Um caso excepcional é apresentado no sistema IEEE300-barras, já que o uso do parâmetro ρ não fez diferença. Nos próximos experimentos numéricos só se usará o pré-condicionador em sua forma completa, com duplo parâmetro limitante, como apresentado em (Saad, 1994; Saad, 2003).

Tabela 3.7 – Comparação de desempenhos entre o GMRES com pré-condicionador ILUT(τ, ρ) e com ILUT(τ)

Sistema Teste	GMRES+ILUT(τ, ρ)			GMRES+ILUT(τ)	
	τ	ρ	MFLOPS	τ	MFLOPS
IEEE30-barras	10^{-2}	10	0,0141	10^{-2}	0,0162
IEEE118-barras	10^{-3}	10	0,2498	10^{-3}	0,3973
IEEE145-barras	10^{-4}	9	0,1464	10^{-4}	1,2065
IEEE162-barras	10^{-3}	10	0,4432	10^{-3}	0,6976
IEEE300-barras	10^{-2}	32	1,7386	10^{-2}	1,7386
Norte-Nordeste de 274 barras	10^{-4}	20	1,5843	10^{-4}	3,1925

3.6 Reordenamento da Matriz Jacobiana

São apresentados experimentos numéricos para avaliar o desempenho do método GMRES quando usadas conjuntamente estratégias de reordenamento e pré-condicionamento. O reordenamento melhora a qualidade do pré-condicionador e reduz o tempo necessário para sua construção, gerando subespaços de Krylov mais próximos da solução exata que quando não usado, chegando à convergência em poucas iterações (Benzi & Tuma, 2000). Portanto, a influência do reordenamento na convergência do método iterativo se dá de forma indireta, através do pré-condicionador. Sem o pré-condicionador o reordenamento não tem efeito nenhum sobre o subespaço de Krylov, como mostrado em alguns experimentos realizados.

O objetivo principal é verificar qual a influência das estratégias de reordenamento MD e RCM sobre o desempenho do método GMRES com pré-condicionamento. Para tal, verifica-se a eficiência computacional e a robustez de quatro configurações, sendo estas: GMRES puro, GMRES+ILUT(τ, ρ), GMRES+ILUT(τ, ρ) e reordenamento RCM e GMRES+ILUT(τ, ρ) e reordenamento MD. No teste de convergência do método GMRES considera-se que tanto a tolerância absoluta como a relativa são iguais a 10^{-5} . Os mesmos sistemas do experimento anterior são mantidos aqui, sendo que agora duas condições de operação são consideradas; uma para carga normal (base) e a outra para carga pesada (PMC). Os dados dos sistemas-teste são apresentados no Apêndice VII. Os valores de τ e ρ usados nas simulações são apresentados na Tabela 3.7.

Na Tabela 3.8 apresenta-se o número de operações de ponto flutuante para ambos os casos referentes a cada técnica de reordenamento. Adicionalmente, para fins comparativos, na penúltima coluna apresenta-se o número de operações realizadas pelo solucionador direto MA28, cujas características serão apresentadas no Capítulo 4.

Comparando a terceira e a quarta coluna da Tabela 3.8, observa-se que a estratégia de pré-condicionamento melhora consideravelmente a eficiência do método iterativo. No entanto, seu desempenho é inferior ao direto devido às operações realizadas pelo grande número de novos elementos não-nulos gerados no pré-condicionador. Portanto, já que o pré-condicionador é baseado em fatoração triangular é imprescindível considerar alguma estratégia de reordenamento que permita reduzir o número de novos elementos não-nulos nos fatores triangulares e, conseqüentemente reduzir o número de operações realizadas.

O desempenho do método iterativo quando se usa reordenamento (RCM e MD) são apresentados na quinta e sexta coluna. Observa-se que para ambos os reordenamentos o método iterativo pré-condicionado foi superior ao direto, destacando-se o reordenamento MD. Para o sistema IEEE162, o MA28 apresentou uma interrupção durante a substituição direta/inversa. No entanto, foi solucionado normalmente pelo programa ANAREDE para ambos os casos (Base e PMC).

Tabela 3.8 – Número de operações de ponto flutuante para as 4 configurações em (MFLOPS), comparação de desempenho com o solucionador direto MA28.

Sistema	Cenário	GMRES	GMRES+ ILUT(τ,ρ)	GMRES+ ILUT(τ,ρ)+ RCM	GMRES+ ILUT(τ,ρ)+ MD	MA28	$\frac{\text{Eficiência}_{SI}}{\text{Eficiência}_{SD}}$
IEEE30- barras	C. Base	1,4986	0,0141	0,0050	0,0039	0,0055	1,4
	PMC	3,0990	0,0212	0,0100	0,0077	0,0111	1,4
IEEE118- barras	C. Base	534,1593	0,1397	0,0583	0,0424	0,0894	2,1
	PMC	575,7488	0,2498	0,0782	0,0565	0,1194	2,1
IEEE145- barras	C. Base	227,1236	0,1464	0,0763	0,0751	0,1893	2,5
	PMC	278,2075	0,1821	0,0868	0,0841	0,2012	2,4
IEEE162- barras	C. Base	294,2203	0,2665	0,1951	0,1792	Interrup.	---
	PMC	410,3758	0,4432	0,3263	0,3198	Interrup.	---
IEEE300- barras	C. Base	4.803,7987	0,9901	0,1962	0,1019	0,1763	1,7
	PMC	5.663,5704	1,7386	0,3246	0,1753	0,2645	1,5
Norte-Nordeste de 274 barras	C. Base	4.741,2796	1,0788	0,1996	0,1062	0,1448	1,4
	PMC	5.278,0255	1,5843	0,2660	0,1416	0,1930	1,4

Os melhores resultados são conseguidos pelo GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD. Portanto, esta é a melhor configuração. Na última coluna da Tabela 3.8 apresenta-se a relação de eficiências entre a melhor configuração e o solucionador direto. Esta coluna informa a superioridade do GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD em relação ao solucionador direto. A relação de eficiência é calculada como a divisão do número de operações realizadas pelo solucionador direto entre o número de operações realizadas pelo GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD. Por exemplo, esta configuração foi 2,1 vezes mais rápido que o solucionador direto na simulação de fluxo de carga do sistema-teste IEEE118 para ambos cenários.

Na Figura 3.10 apresentam-se os valores de taxa de convergência do método GMRES puro (barra em vermelho), GMRES+ILUT(τ,ρ) (em azul), GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento RCM (barra em verde) e GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD (barra em amarelo), para cada sistema elétrico no caso-base. As barras verdes e amarelas associadas com a

taxa de convergência do método GMRES usando reordenamento RCM e MD, respectivamente, mostram que nestes casos o GMRES deve satisfazer o teste de convergência em menos iterações que os outros casos onde não é usado reordenamento (barras vermelhas e azuis).

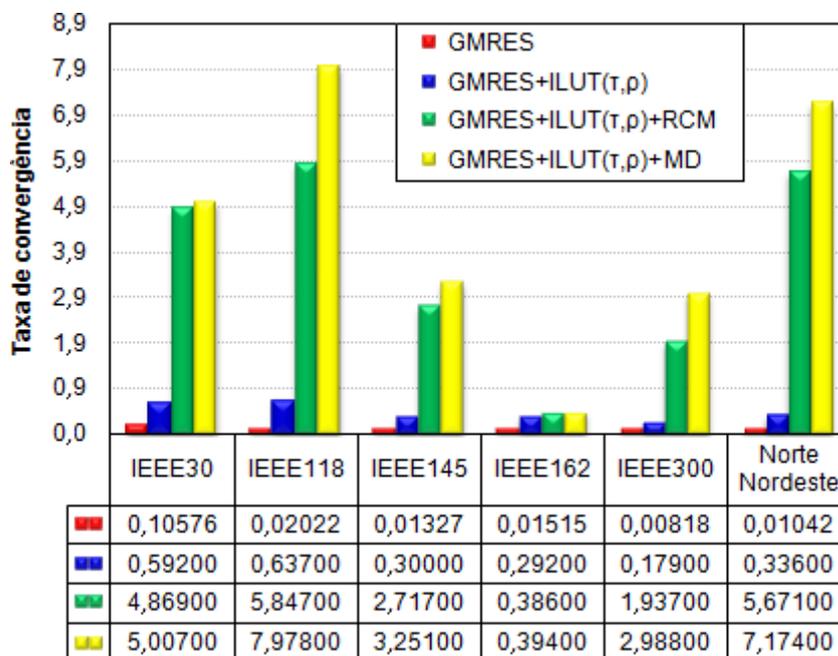


Figura 3.10 – Taxa de convergência do método GMRES para as quatro configurações dos solucionadores iterativos no CASO BASE, na primeira iteração Newton-Raphson.

Na Figura 3.11 apresentam-se os valores de taxa de convergência para as mesmas configurações anteriores do método GMRES, para a condição de PMC. De forma similar ao caso base, observa-se que para todos os sistemas os valores das taxas de convergência com reordenamento são indicadores de uma rápida convergência do método GMRES. Com estes resultados comprova-se que o reordenamento não serve apenas para reduzir o número de novos elementos não-nulos, como normalmente é observado nos métodos diretos e nos pré-condicionadores de fatoração incompleta, mas também influência na convergência do método iterativo GMRES com pré-condicionamento.

Observa-se nas Figuras 3.10 e 3.11 que o efeito do reordenamento para o sistema-teste IEEE162 é desprezível, uma vez que não foi possível obter um pré-condicionador de boa qualidade, ou seja, próximo da matriz Jacobiana. Isto reduziria o erro em cada iteração linear do GMRES, o número de iterações lineares, aumentando a taxa de convergência. Os efeitos do reordenamento podem ser observados para outros valores de τ e ρ .

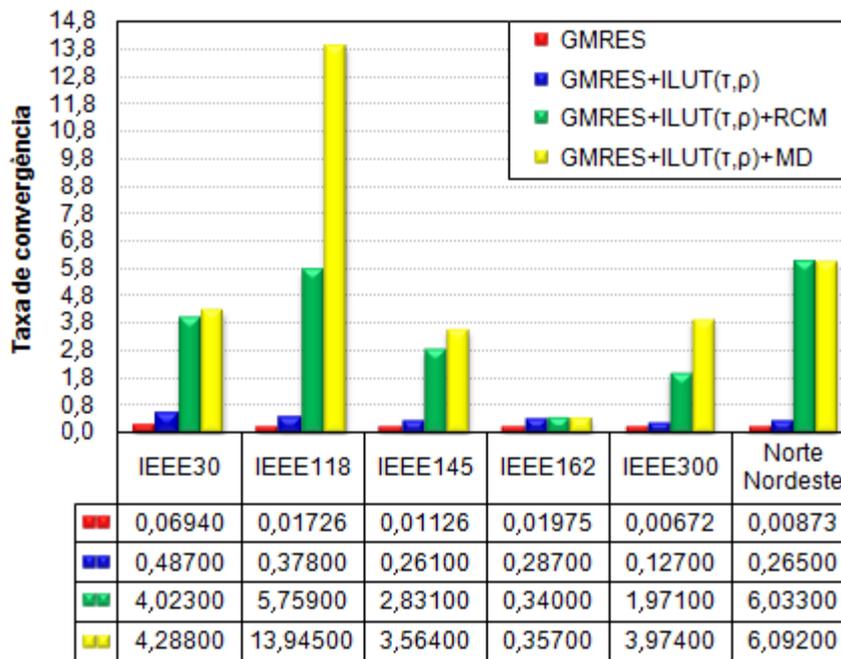


Figura 3.11 – Taxa de convergência do método GMRES para as quatro configurações dos solucionadores iterativos no PMC, na primeira iteração Newton-Raphson.

3.7

Ocorrência de Interrupções ou Problemas de Estabilidade Numérica nos Pré-condicionadores

A ocorrência de zeros ou número próximos de zero na diagonal principal da matriz Jacobiana pode dificultar a construção do pré-condicionador nos seguintes aspectos: (a) incrementa o uso de pivotamento durante a fatoração para evitar interrupções, atrasando o processo; (b) diminui a precisão do cálculo dos elementos dos fatores incompletos; (c) torna os vetores coluna da matriz de coeficientes mais linearmente dependentes; (d) origina problemas de estabilidade numérica (aumenta o erro de arredondamento) durante a fatoração.

O objetivo desta seção é analisar as equações usadas para calcular os elementos da diagonal da matriz Jacobiana a fim de determinar se existe a possibilidade de acontecerem simultâneas interrupções ou quase-interrupções da fatoração triangular devido a divisões por números zero ou próximos de zero. Antes disso, na Tabela 3.9 são apresentados dados estatísticos dos elementos da diagonal principal da matriz Jacobiana dos sistemas hipotéticos do IEEE, sistema Norte-Nordeste e configurações do sistema brasileiro, divididos em dois grupos: elementos pertencentes à submatriz H e elementos pertencentes à

submatriz L (3.2). Os dados dos sistemas-teste são apresentados no Apêndice VII.

Tabela 3.9 – Dados estatísticos dos elementos da diagonal principal das matrizes Jacobianas de típicos sistemas lineares de fluxo de carga.

Sistema Elétrico	Informações na Diagonal Principal de J		
	Número de Zeros	Menor elemento em:	
		H	L
IEEE30-barras	0	1,7971	5,6438
IEEE118-barras	0	1,2926	14,9978
IEEE145-barras	0	1,5395	2,4066
IEEE162-barras	0	3,5996	8,8783
IEEE300-barras	0	0,1630	8,4786
Norte-Nordeste de 274 barras	0	0,2428	8,9685
Brasil de 2.256 barras	0	0,3300	3,1835
Brasil de 3.513 barras	0	0,1651	2,0241

Observa-se que em nenhum dos experimentos apareceu um valor zero para provocar interrupções durante a fatoração triangular, nem os menores elementos da diagonal principal. Portanto, a construção do pré-condicionador para todos os casos está livre de interrupções, não precisando de permutações não-simétricas. Portanto, nenhuma estratégia que evite problemas de estabilidade numérica causada por números próximos de zero é necessária para a solução do problema de fluxo de carga dos sistemas apresentados aqui. A seguir explica-se porque não se encontrou elementos zero ou próximos de zero na diagonal principal da matriz Jacobiana.

3.7.1 Elementos Nulos ou Muito Pequenos na Diagonal da Jacobiana

Os elementos da diagonal principal da matriz Jacobiana correspondentes às submatrizes H e L são calculados através de (3.24) e (3.25), respectivamente.

$$H_{kk} = -V_k \cdot \sum_{\substack{m \in K \\ m \neq k}} V_m (G_{km} \cdot \text{sen}(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cdot \text{cos}(\theta_k - \theta_m)) \quad (3.24)$$

$$L_{kk} = -B_{kk} \cdot V_k + \frac{QG_k}{V_k} - \frac{QL_k}{V_k} \quad (3.25)$$

Para $k=1, \dots, n$; sendo n o número de barras totais da rede elétrica; k e m são os sub-índices indicativos de que a variável está associada às barra k e m , respectivamente. Por exemplo, QL_k é a potência reativa da carga na barra k , QG_k é a geração de potência reativa associada à barra k , $[V_1, \theta_1, \dots, V_k, \theta_k, \dots, V_m, \theta_m, \dots, V_n, \theta_n]$ são as incógnitas do sistema de equações não-lineares associadas aos módulos e ângulos das tensões nas barras da rede. Já G_{km} e B_{km} são a condutância e susceptância, respectivamente, associadas às posições k e m da matriz de admitância nodal, B_{kk} é a susceptância na posição diagonal k da matriz de admitância. A variável K representa o conjunto de barras conectadas fisicamente à barra k , incluindo a própria. Para que H_{kk} seja zero, ou próximo, deve-se satisfazer (3.26), ou seja, o somatório da expressão entre parênteses de (3.24) associada aos ramos conectados à barra k deve ser igual a zero. Na Tabela 3.9 mostrou-se que é pouco provável encontrar elementos com valores próximos de zero ou zeros na diagonal de H .

$$\sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cdot \text{sen}(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cdot \text{cos}(\theta_k - \theta_m)) \cong 0 \quad (3.26)$$

A partir da equação (3.25) e fazendo L_{kk} igual a zero pode-se encontrar a equação (3.27) que permite saber qual é o valor da potência reativa da carga na barra k que produz um valor zero ou próximo de zero na posição diagonal k da submatriz L . Portanto, para que isto ocorra a potência da carga da barra k deve ser igual à potência gerada na barra k (caso a barra tenha geração de potência reativa) menos o quadrado da tensão multiplicado pela susceptância da diagonal k da matriz de admitância. Teoricamente, depois de convergido o fluxo de carga, é possível estimar um novo valor da potência reativa nas barras de carga usando (3.27) para obter um novo ponto de operação cuja matriz Jacobiana tenha zeros na diagonal de sua submatriz L .

$$QL_k \cong -B_{kk} \cdot V_k^2 + QG_k \quad (3.27)$$

A partir de um determinado ponto de operação, na barra k , com potência reativa da carga igual a QL_k^{Atual} , pode-se estimar a variação de potência reativa ΔQ_k que seria necessário adicionar ou diminuir à carga para conseguir um zero na posição diagonal k da submatriz L . O valor de ΔQ_k é calculado em (3.28) como a potência reativa da carga que produz um zero na diagonal de L menos a potência reativa da carga no ponto de operação atual. Substituindo (3.27) em (3.28) obtém-se (3.29), que será usada nos próximos experimentos para entender porque nos sistemas elétricos usados aqui não se encontrou elementos zeros ou próximos de zeros.

$$\Delta Q_k = QL_k - QL_k^{\text{Atual}} \quad (3.28)$$

$$\Delta Q_k = -B_{kk} \cdot V_k^2 + QG_k - QL_k^{\text{Atual}} \quad (3.29)$$

Na Figura 3.12 apresentam-se as potências reativas (QL_k^{Atual}) nas barras de carga para dois cenários de um sistema elétrico hipotético, sendo estes: o caso base (em vermelho) e o ponto mais próximo do máximo carregamento PMC (em azul). Adicionalmente são mostrados em negrito os valores de potência reativa da carga (QL_k) que produzem zeros nas posições diagonais da submatriz L . Usando-se (3.29) para ambos os cenários é possível calcular os valores de ΔQ_k que devem ser aumentados ou diminuídos em cada barra para produzir zeros nas posições diagonais de L .

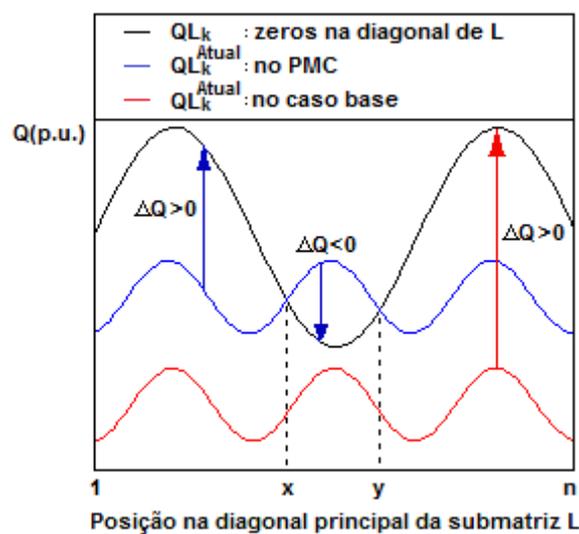
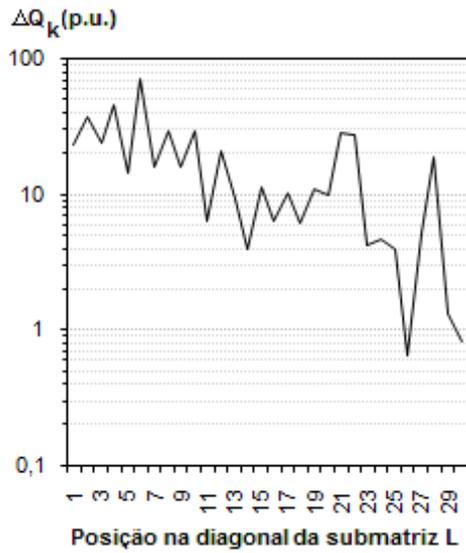


Figura 3.12 – Potências reativas nas barras do sistema elétrico associadas às posições na diagonal de L .

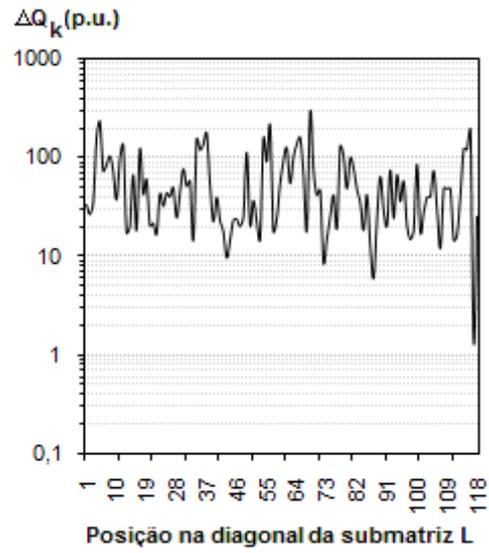
Na Figura 3.12, observe-se que no caso base, todos os valores de ΔQ_k são positivos, isso significa que teoricamente é possível aumentar potência reativa em todas as barras para produzir zeros na diagonal de L. Porém, não é possível saber se esses valores, na prática, proporcionariam pontos de operação de fluxo de carga convergentes. O cenário PMC está associado ao último fluxo de carga convergido após a realização do aumento progressivo da potência ativa e reativa (fator de potência constante) em todas as barras de carga. Portanto, não é mais possível aumentar o consumo nas barras de carga, já que qualquer aumento faria o fluxo de carga não convergir. Só seria possível diminuir o consumo de potência reativa nas barras de carga, e somente valores negativos de ΔQ_k serviriam para introduzir zeros entre as posições x e y da diagonal da matriz L. Portanto, nos próximos experimentos é usado somente o PMC.

Em cada sistema elétrico e usando (3.29) foram estimados para todas as barras os valores da variação de potência reativa ΔQ_k que devem ser adicionados (positivos) ou subtraídos (negativos) à carga, para conseguir um zero na posição diagonal k da submatriz L. Os resultados são apresentados nos gráficos das Figuras 3.13 e 3.14. Observa-se que os valores são sempre positivos significando que, para se obter zeros na diagonal de L, deve-se aumentar em cada barra k o valor ΔQ_k especificado no gráfico. Deve-se destacar que qualquer aumento de potência reativa nas barras de carga resulta em um fluxo de carga não convergente, devido ao fato de que o cenário atual é o PMC. Conseqüentemente, não é possível produzir um novo ponto de operação de fluxo de carga convergente que apresente zeros na diagonal de L.

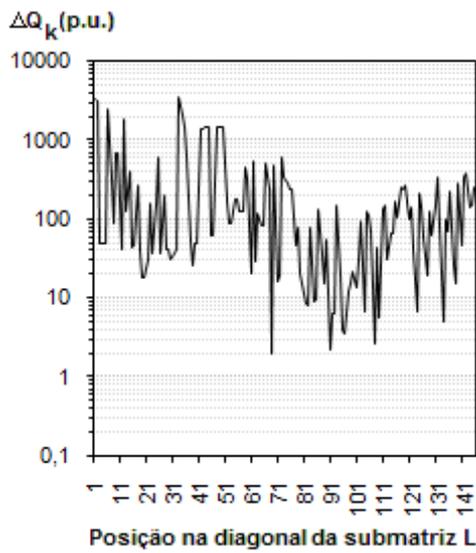
Devido ao fato de ser baixa a probabilidade da ocorrência de zeros simultâneos na diagonal da matriz Jacobiana que causem interrupções no pré-condicionador ou de divisões por números próximos de zero que causem sérios problemas de estabilidade numérica, optou-se por não considerar as estratégias de Máximo Produto Transversal (Duff & Koster, 2001) e Escalonamento no solucionador proposto (Benzi, 2002). No entanto, é considerada uma estratégia de pivotação convencional, usada para realizar permutações não-simétricas de colunas quando aparecer algum zero na diagonal da Jacobiana.



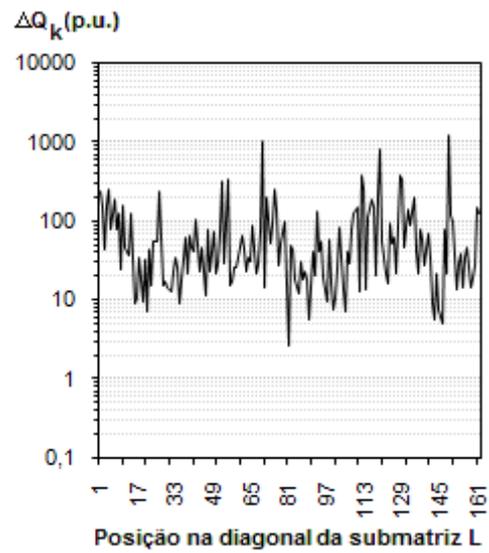
a) Sistema IEEE30-barras



b) Sistema IEEE118-barras

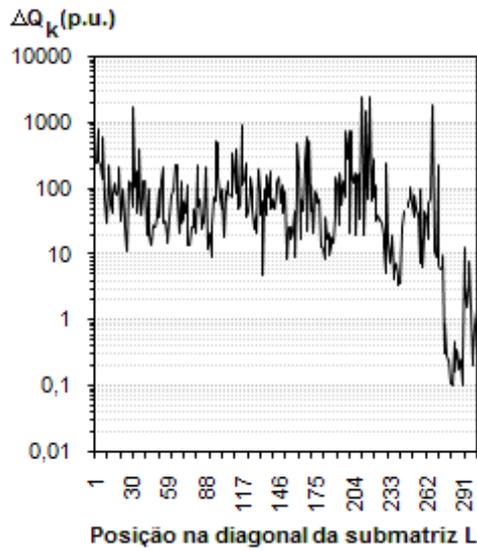


c) Sistema IEEE145-barras

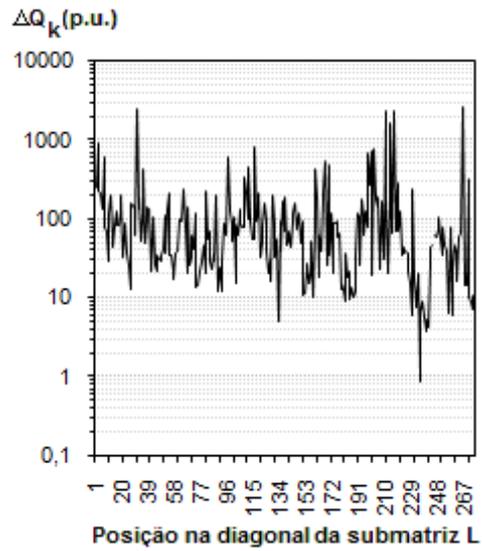


d) Sistema IEEE162-barras

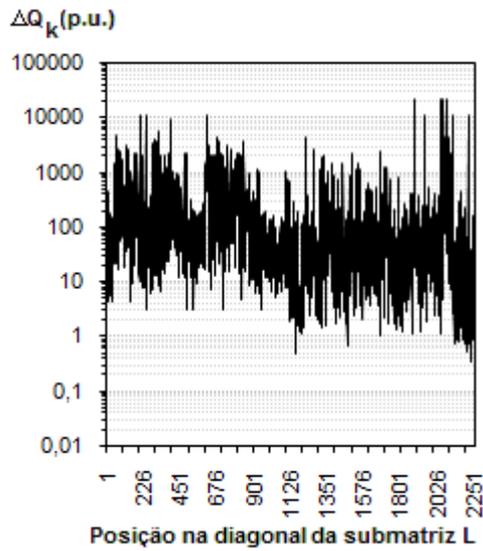
Figura 3.13 – Potência reativa necessária para conseguir zeros na diagonal da matriz L, para os sistemas IEEE30-barras, IEEE118-barras, IEEE145-barras e IEEE162-barras.



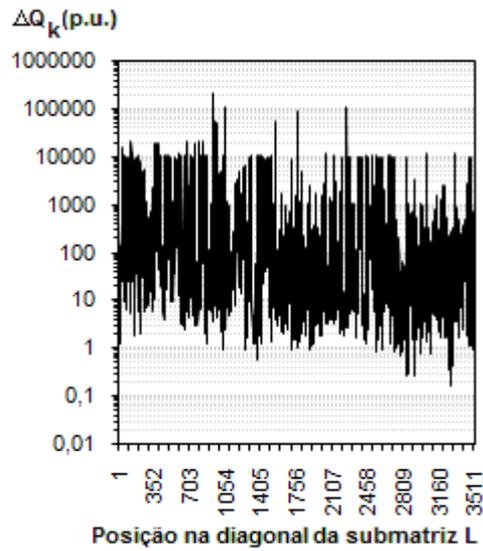
a) Sistema IEEE300 barras



b) Sistema Norte-Nordeste de 274 barras



c) Sistema brasileiro de 2.256 barras



d) Sistema brasileiro de 3.513 barras

Figura 3.14 – Potência reativa necessária para conseguir zeros na diagonal da matriz L, para os sistemas IEEE300-barras, Norte-Nordeste e configurações do sistema brasileiro de 2.256 e 3.513 barras.

3.8 Evolução do Desempenho do GMRES

Para ilustrar resumidamente a evolução das melhorias em termos computacionais conseguidas no desempenho do GMRES, na Figura 3.15 mostra-se o gráfico com o número total de operações em MFlops associadas aos experimentos usando o sistema IEEE118 para os casos: GMRES puro (sem estratégias), GMRES(m), GMRES+ILUT(τ,ρ), GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD. Estes últimos estudos justificam a importância do uso das técnicas de pré-condicionamento e reordenamento em métodos iterativos do subespaço Krylov. A condição de operação considerada é para carga normal (base). Adicionalmente, para fins comparativos, na última barra apresenta-se o número de operações realizadas pelo solucionador direto MA28, cujas características serão apresentadas no Capítulo 4.

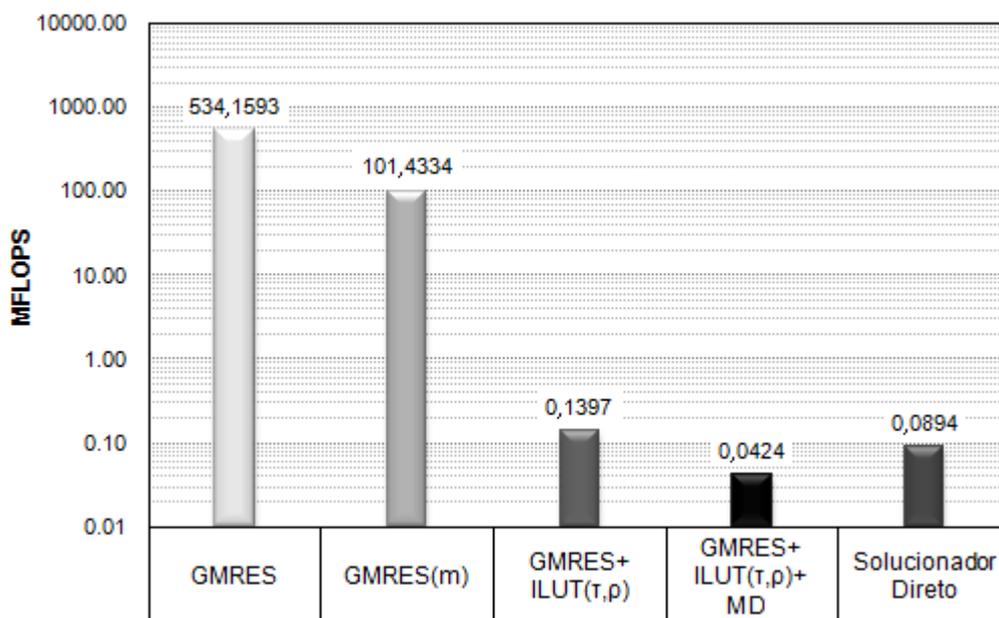


Figura 3.15 – Evolução das melhorias conseguidas no desempenho do GMRES, comparação com o solucionado Direto

A melhor alternativa conseguida até aqui é composta por GMRES+ILUT(τ,ρ) com reordenamento MD. Deve-se destacar que o pré-condicionador ILUT(τ,ρ) com duplo parâmetro limitante ainda não tinha sido aplicado ou avaliado no problema de fluxo de carga por outros pesquisadores, o quê leva a concluir que:

- O reordenamento aplicado em conjunto com a estratégia de pré-condicionamento é determinante para que o método GMRES seja tão, ou mais eficiente que um direto.

- A estratégia de pré-condicionamento substitui o sistema linear original mal-condicionado e muitas vezes indefinido por outro mais fácil de resolver e com autovalores de módulos pequenos, com parte real positiva, agrupados próximos de um e com um número de condicionamento menor que o do sistema original sem pré-condicionamento.
- Uma vez que o pré-condicionamento reduz o número de condicionamento e agrupa os autovalores próximos de um, as propriedades espectrais do sistema linear original são melhoradas. Assim, o escalonamento é necessário apenas se o pré-condicionamento falhar. Neste capítulo foi mostrado que para o problema de fluxo de carga são pequenas as possibilidades de ocorrerem interrupções resultantes de divisões por zero durante a fatoração triangular, uma vez que os elementos da diagonal da matriz Jacobiana normalmente apresentam valores distantes de zero. Portanto, não é necessária a estratégia de Máximo Produto Transversal com Escalonamento (Duff & Koster, 2001). Apenas uma estratégia de pivotação (permutações não-simétricas) é usada de forma preventiva.
- Além de reduzir o número de operações realizadas por novos elementos não-nulos, o reordenamento usa a estratégia de pré-condicionamento para melhorar a qualidade dos subespaços de Krylov gerados em cada iteração do GMRES. Entenda-se que os subespaços de boa qualidade contêm sempre uma solução muito próxima da exata e o teste de convergência pode ser satisfeito em apenas uma (ou poucas) iteração (iterações).
- Foram analisados e estudados grande parte dos trabalhos realizados na área de pré-condicionadores aplicados a problemas de sistemas elétricos de potência, enfatizando os pré-condicionadores ILUT(τ, ρ) e ILU(k). Ambos foram avaliados e comprovou-se que o ILUT(τ, ρ) é o mais eficiente. Este pré-condicionador na sua versão mais completa, como a apresentada neste capítulo, ainda não tinha sido avaliado no problema de fluxo de carga. Observou-se também que o parâmetro ρ ajuda a melhorar o desempenho e diminui o número de operações de ponto flutuante.
- Foram avaliadas e estudadas as regras de preenchimento dos pré-condicionadores mais citados, e concluiu-se que:

- I. A regra de preenchimento no pré-condicionador $ILU(k)$ não permite descartar elementos das posições ocupadas da matriz Jacobiana. Além disso, sua heurística não considera nem o tamanho dos elementos nem o erro associado a cada um. O uso da regra de preenchimento dentro do algoritmo de fatoração precisa de operações adicionais para calcular os níveis de preenchimento. Portanto, essa regra torna o pré-condicionador menos eficiente que o $ILUT(\tau, \rho)$. Os resultados nas simulações realizadas neste capítulo confirmam que o $ILUT(\tau, \rho)$ é superior.
- II. A heurística da regra com duplo parâmetro limitante, em alguns casos, não distingue os menores dos maiores elementos (em valor absoluto). Nesses casos a regra falha ao descartar alguns dos maiores elementos ao invés dos menores. Comprovou-se também que, nem sempre a eliminação dos menores elementos produz um erro menor que o produzido quando eliminados alguns dos maiores elementos. Neste capítulo demonstrou-se que uma regra não pode ser baseada em simples heurísticas sem considerar fundamento matemático.

Portanto, a regra com duplo parâmetro limitante deve ser substituída por outra baseada no cálculo do erro associado a cada elemento descartado ou preenchido. A maior dificuldade para propor uma regra baseada no erro associado a cada elemento dos fatores triangulares é saber como estimar o erro antes da posição ser preenchida. Outra dificuldade é saber se o algoritmo de fatoração vai facilitar ou não o cálculo deste erro. Uma terceira dificuldade está em propor uma forma de calcular o erro sem que isso resulte em operações de ponto flutuante adicionais, como nas regras dos pré-condicionadores $ILU(k)$ e $ILUT(\tau, \rho)$. No capítulo 4, esta nova regra de preenchimento é apresentada, solucionando eficientemente essas dificuldades. No capítulo 5 a regra proposta é avaliada e comparada com a regra com duplo parâmetro limitante.

- III. A escolha de valores apropriados para os parâmetros do pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ é uma tarefa difícil. Normalmente, a escolha desses parâmetros é realizada após de um processo de tentativa e erro, cujo resultado nem sempre garante eficiência e robustez do método iterativo. No próximo Capítulo é apresentado um método para a determinação de faixas de valores recomendáveis para os pré-condicionadores de fatoração incompleta. O método é testado em experimentos considerando também análises de contingências.

- Experimentos numéricos confirmaram que os pré-condicionadores de aproximação esparsa da inversa realizam muitas operações de ponto flutuante, não sendo indicado para o problema de interesse. Os resultados confirmaram que os pré-condicionadores de fatoração incompleta podem ser mais eficazes.
- A configuração mais eficiente e robusta conseguida após os estudos realizados foi o GMRES+ILUT(τ, ρ) com reordenamento MD. Este solucionador iterativo e outros diretos (MA28, ANAREDE e ORGANON) são usados para comparações no próximo capítulo, incluindo-se um sistema-teste com ponto de operação não convergente com os solucionadores diretos considerados.