

## 2

# Solução de Equações Lineares Associadas ao Problema de Fluxo de Carga Enfatizando Métodos Iterativos

### 2.1

#### Introdução

A solução do problema de fluxo de carga em sistemas elétricos de potência, assim como em diversas áreas da engenharia e da ciência, requer a solução de sistemas de equações lineares esparsos (2.1) e, em muitos casos, mal condicionados. Nesta relação,  $A$  é uma matriz quadrada, conhecida como matriz de coeficientes;  $b$  é um vetor coluna de valores conhecidos e,  $x$  é um vetor de incógnitas. Já em (2.2),  $x^*$  é a solução calculada com uma determinada precisão numérica. Para a solução de (2.1), é possível classificar os métodos em duas categorias: diretos e iterativos. Um método direto, por exemplo, decompõe a matriz de coeficientes em um produto de dois fatores triangulares,  $L$  e  $U$ , sendo posteriormente resolvidos mediante um processo conhecido como substituição direta-inversa, resultando na solução do sistema original. Este é conhecido como decomposição LU.

$$A \cdot x = b \quad (2.1)$$

$$x^* = A^{-1} \cdot b \quad (2.2)$$

No caso dos métodos iterativos, a idéia central é que, a partir de uma solução inicial  $x_0$ , seja gerada uma seqüência de soluções  $\{x_k\}$ , isto é, uma solução aproximada  $x_k$  em cada iteração  $k$ , tal que depois de um determinado número finito de iterações resulte na solução  $x^*$ . Inicialmente, a aplicação dos primeiros métodos iterativos (estacionários) em estudos envolvendo sistemas de energia elétrica, tais como Jacobi, Gauss-Seidel e sobre-relaxação sucessiva (SOR) (Saad, 2003), foi tratada com certa cautela pelos pesquisadores sob o argumento de baixa confiabilidade e lentidão (Borges et al., 1996). Atualmente, tanta cautela não se justifica, devido às características dos métodos iterativos

mais modernos, baseados na teoria de Subespaços de Krylov, como por exemplo, o Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) (Saad & Schultz, 1986).

Portanto, métodos numéricos deste tipo podem ser vistos como eficientes alternativas de solução, já que exploram muito bem a estrutura esparsa da matriz de coeficientes, visando sempre economizar memória e operações de pontos flutuantes, o que se refletirá no tempo de execução (Van der Vorst, 2003). Ainda, uma vez que a robustez do método está associada ao grau de influência no resultado dos erros acumulados nas diversas operações efetuadas ao longo do processo de solução, os métodos iterativos neste aspecto apresentam uma vantagem sobre os métodos diretos, visto que acumulam menos erros de arredondamento (Prada, 1977; Saad, 2003; Facius, 2000).

A escolha de um método iterativo apropriado para a solução do subproblema linear de fluxo de carga é o objetivo principal deste capítulo, sendo uma das tarefas mais importantes no desenvolvimento de um solucionador iterativo, dado que esta definição afeta decisões futuras associadas com a adequação de estratégias numéricas no solucionador, tais como, pré-condicionamento e reordenamento. Não menos importante é determinar o procedimento adequado para a seleção do método iterativo. Considerando-se que o desempenho dos métodos varia em função das características do problema (Benzi, 2002), neste capítulo, elege-se o método cujas propriedades sejam mais vantajosas para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga e que explore de forma eficiente as características da matriz de coeficientes.

Portanto, são estudadas as principais características dos métodos iterativos, destacando-se suas vantagens e desvantagens. Adicionalmente, são estabelecidas típicas matrizes de coeficientes associadas a diferentes sistemas elétricos e níveis de carga, para avaliação e comparação destes métodos. A análise dos resultados, em termos de robustez e eficiência computacional, é apresentada ainda neste capítulo, visando validar a escolha do método. Entre os métodos considerados, é dada maior ênfase ao Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) por apresentar características mais convenientes.

Neste capítulo, faz-se uma abordagem teórica dos conceitos associados a este método, explicando-se de forma ilustrativa os processos envolvidos no algoritmo do GMRES. Adicionalmente, são apresentadas e avaliadas as estratégias de

reordenamento e reinicialização, muito usadas para melhorar o desempenho dos solucionadores iterativos (Benzi et al., 1999a; Benzi et al., 1999b; Benzi & Tuma, 2000; Benzi et al., 2000; Benzi, 2002; Chen, 2005). Nos próximos itens são apresentados conceitos associados ao problema de interesse, as características numéricas, estruturais e as propriedades espectrais de suas matrizes de coeficientes.

## 2.2

### O Subproblema Linear de Fluxo de Carga

O cálculo de fluxo de carga em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de interesse. Neste tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, significando que as variações com o tempo são suficientemente lentas para não incluir os efeitos transitórios (Monticelli, 1983). A solução do problema de fluxo de carga requer a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares, deduzidas pela aplicação das leis de Kirchhoff, resultando em duas equações por cada barra  $k$  da rede elétrica, dadas por:

$$\begin{aligned}\Delta P_k &= P_k^{\text{esp}} - V_k \cdot \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cdot \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \cdot \text{sen}(\theta_k - \theta_m)) \\ \Delta Q_k &= Q_k^{\text{esp}} - V_k \cdot \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cdot \text{sen}(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cdot \cos(\theta_k - \theta_m))\end{aligned}\quad (2.3)$$

Para  $k=1, \dots, n$ ; sendo  $n$  o número de barras totais da rede elétrica;  $k$  e  $m$  são os sub-índices indicativos de que a variável está associada às barra  $k$  e  $m$ , respectivamente. Por exemplo,  $\Delta P_k$  é o erro de potência ativa na barra  $k$  (barra do tipo PQ ou PV),  $\Delta Q_k$  é o erro de potência reativa na barra  $k$  (barra do tipo PQ);  $P_k^{\text{esp}}$  e  $Q_k^{\text{esp}}$  são as potências ativa e reativa especificadas na barra  $k$ ,  $[V_1, \theta_1, \dots, V_k, \theta_k, \dots, V_m, \theta_m, \dots, V_n, \theta_n]$  são as incógnitas do sistema de equações não-lineares associadas com os módulos e ângulos das tensões nas barras da rede, finalmente,  $G_{km}$  e  $B_{km}$  são a condutância e susceptância, respectivamente, associadas com as posições  $k$  e  $m$  da matriz de admitância nodal. A variável  $K$  representa o conjunto de barras conectadas fisicamente à barra  $k$ , incluindo-se ela mesma. Este sistema de equações algébricas não-lineares é solucionado por meio de linearizações sucessivas (através da Série de Taylor), usando-se o

método Newton-Raphson (Monticelli, 1983; Flueck & Chiang, 1996; Flueck & Chiang, 1998; de Leon & Semlyen, 2002; de Leon, 2003).

O algoritmo do método Newton-Raphson pode ser expresso na iteração  $i$ , como a solução de um subproblema linear (sistema linearizado) apresentado em (2.4), no qual a matriz de coeficientes (ou Jacobiana  $J$ ) é recalculada a cada iteração, seguido da atualização dos valores dos módulos e ângulos das tensões das barras, como em (2.5). A matriz Jacobiana é definida como a matriz de derivadas parciais dos erros de potência ativa e reativa, calculada da forma apresentada em (2.6), onde  $H$ ,  $N$ ,  $M$  e  $L$  são as submatrizes de derivadas parciais.

$$J \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta^i \\ \Delta V^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P^i \\ \Delta Q^i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{i+1} \\ V^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^i \\ V^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta^i \\ \Delta V^i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$J = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

O sistema de equações lineares apresentado em (2.4) representa o problema principal que será resolvido em cada iteração de fluxo de carga pelo solucionador proposto neste trabalho. Quando usados métodos iterativos para solução deste tipo de equações, é conveniente caracterizar a matriz de coeficientes do problema que está sendo solucionado a fim de selecionar apropriadamente o método e suas estratégias numéricas, principalmente a de pré-condicionamento. A seguir são apresentadas as principais características estruturais, numéricas e espectrais da matriz Jacobiana de fluxo de carga.

### 2.2.1

#### Características Estruturais da Matriz Jacobiana

Conforme apresentado em (2.6), a matriz Jacobiana é formada por quatro submatrizes  $H$ ,  $N$ ,  $M$  e  $L$  estruturalmente idênticas e simétricas;

conseqüentemente, a matriz Jacobiana também é estruturalmente simétrica, embora seja numericamente assimétrica (Prada, 1977; Monticelli, 1983; Borges et al., 1996). Outra característica relevante da matriz Jacobiana é sua esparsidade. Esta característica é inerente às redes elétricas dado que cada barra tem apenas alguns poucos ramos conectados. Visto que o número médio de ramos conectados às barras é o mesmo, independentemente do tamanho do sistema, então, quanto maior for o sistema, maior será o número de elementos nulos na matriz Jacobiana, tornando-a cada vez mais esparsa. Nas Figuras 2.1 e 2.2 são apresentadas estruturas de típicas matrizes Jacobianas para diferentes sistemas elétricos, observando-se as características estruturais mencionadas acima.

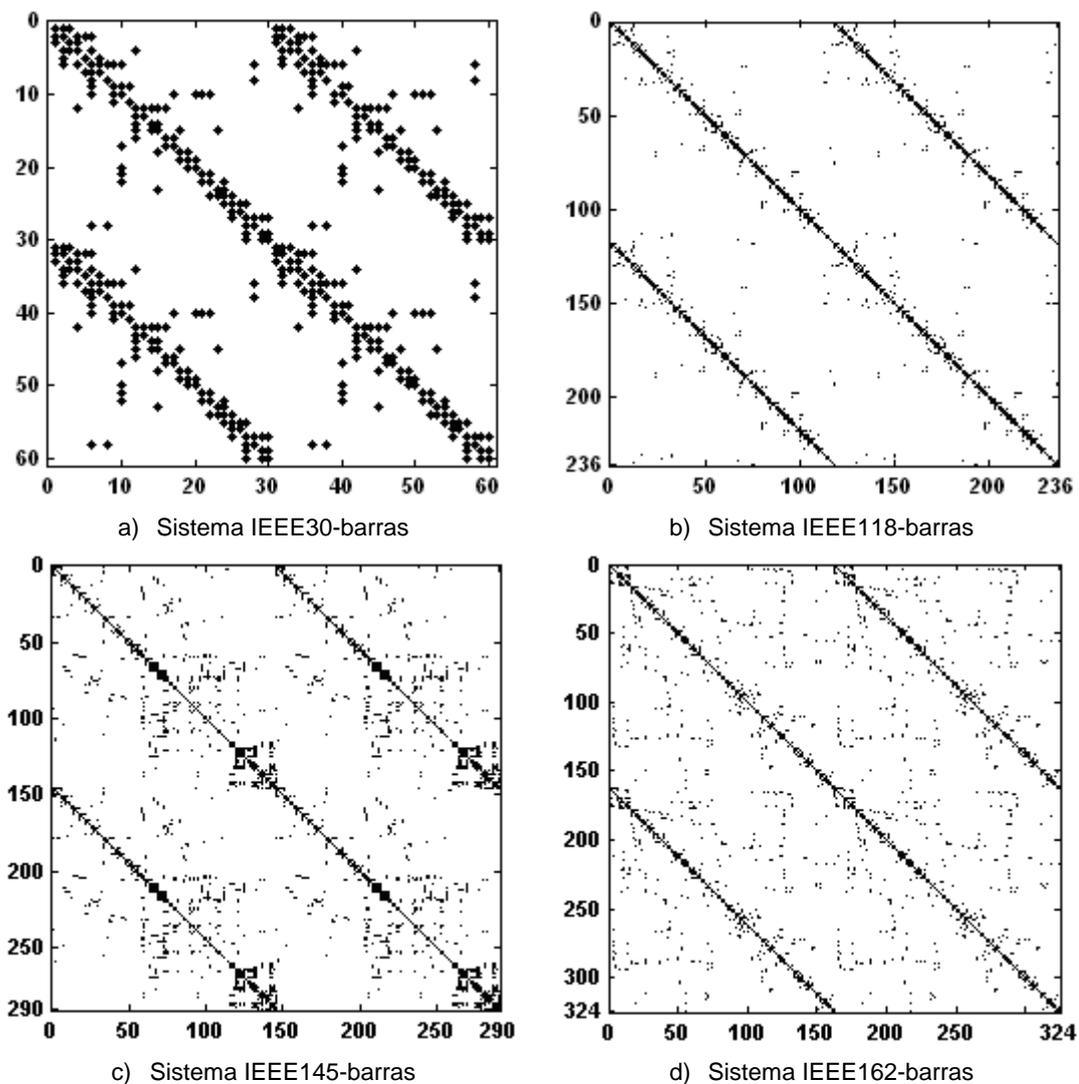


Figura 2.1 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas de sistemas hipotéticos.

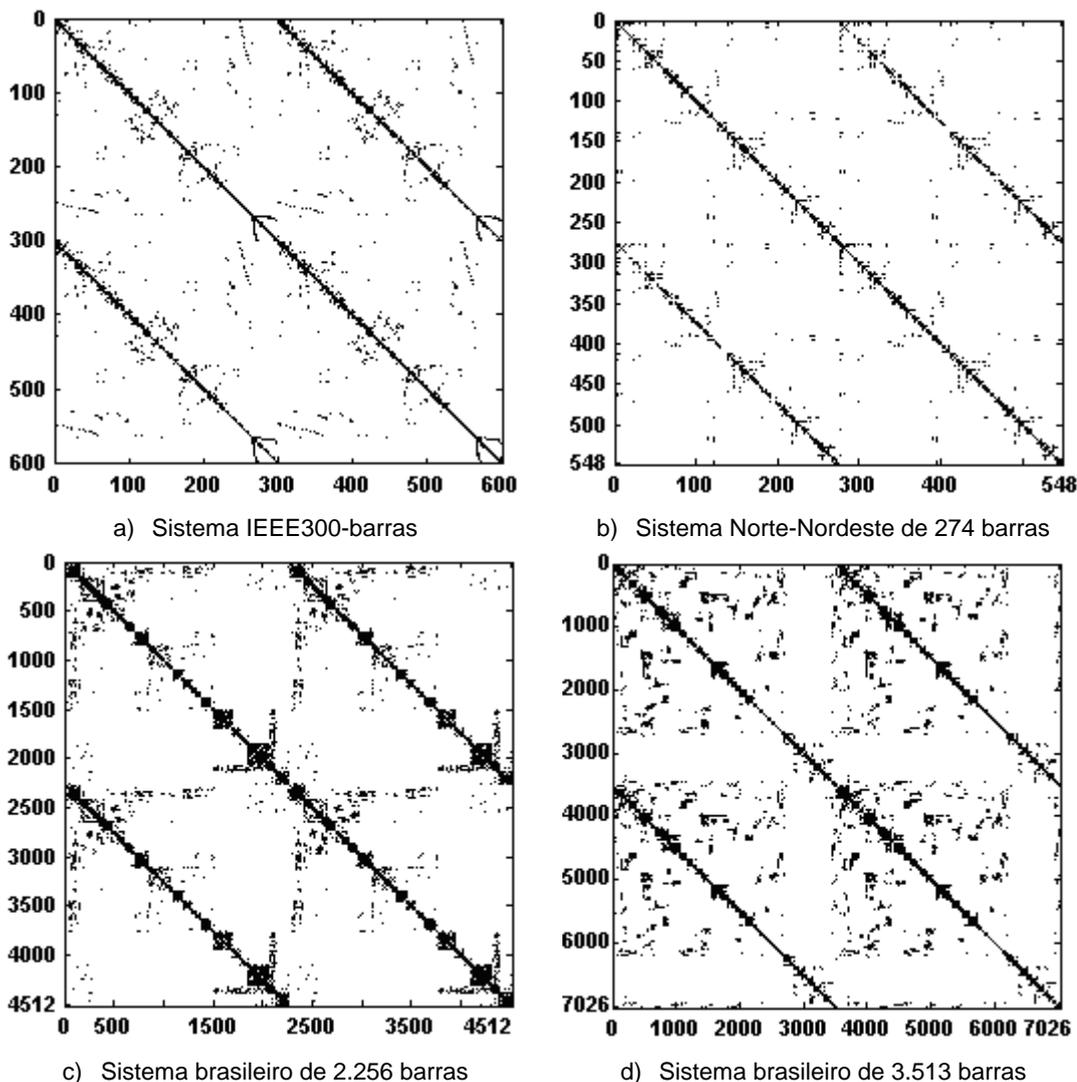


Figura 2.2 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas de sistemas hipotético e reais.

Em todos os gráficos das figuras apresentadas acima, pode-se notar as estruturas similares, esparsas e simétricas das submatrizes  $H$ ,  $N$ ,  $M$  e  $L$ . Dados numéricos destas matrizes, como por exemplo, dimensão, número de elementos não-nulos, número médio e máximo de elementos por linha da matriz Jacobiana e grau de esparsidade são apresentados na Tabela 2.1. Observa-se que, conforme aumenta a dimensão do sistema elétrico, aumentam também as dimensões das matrizes Jacobianas, o número de elementos não-nulos e o grau de esparsidade.

A esparsidade aumenta porque o número de elementos por linha da matriz Jacobiana (médio e máximo) não aumenta significativamente. O número médio de elementos por linha é calculado como o número total de elementos dividido pelo número de linhas da matriz Jacobiana. Já o número máximo de elementos

por linha corresponde à linha com maior número de elementos, estando associada com a barra do sistema elétrico com maior número de ramos conectados. Por exemplo, no caso da configuração do sistema interligado nacional de 3.513 barras (ONS, 2006), a barra com maior número de conexões é a barra 180, identificada como JACAREP—138. Esta barra está conectada a 18 barras do sistema.

Tabela 2.1 – Dados numéricos de matrizes Jacobianas de sistemas elétricos de potência.

Sistema	Dimensão da Matriz Jacobiana	Número de Elementos Não-nulos	Número de Elementos por Linha		Grau de Esparsidade
			Médio	Máximo	
IIEEE30-barras	60	447	7	16	87,58%
IIEEE118-barras	236	1.900	8	20	96,59%
IIEEE145-barras	290	3.947	14	42	95,31%
IIEEE162-barras	324	2.884	9	20	97,25%
IIEEE300-barras	600	4.472	7	24	98,76%
Norte-Nordeste de 274 barras	548	3.316	6	27	98,90%
Brasil de 2.256 barras	4.512	30.918	7	32	99,85%
Brasil de 3.513 barras	7.026	44.300	6	38	99,91%

### 2.2.2

#### Propriedades Espectrais da Matriz Jacobiana de Fluxo de Carga

As propriedades espectrais são usadas para identificar maus condicionamentos e singularidades em sistemas de equações lineares. Estas propriedades são inerentes às matrizes de coeficientes e variam em função do problema que está sendo solucionado (Semlyen, 1996; Semlyen & de Leon, 2001; Dag & Semlyen, 2003; Chen, 2005; Chen & Shen, 2006).

Neste trabalho, estas propriedades são usadas para caracterizar típicas matrizes Jacobianas associadas ao problema de fluxo de carga para sistemas hipotéticos do IIEEE e configurações dos sistemas norte-nordeste e brasileiro. As propriedades espectrais observadas são os autovalores e o número de condicionamento da matriz de coeficientes.

O conjunto de todos os autovalores da matriz quadrada  $A$  é chamado de espectro de  $A$ . Esta propriedade pode ser um indicador de singularidade da matriz de coeficientes, de cenários de difícil convergência para métodos iterativos e de difícil solução para métodos diretos (Chen, 2005). Por exemplo, quando usado o método Newton-Raphson para solucionar sistemas não-lineares, normalmente uma matriz Jacobiana que apresente autovalores tanto com parte real negativa como também positiva (matriz indefinida), representa um dos piores cenários para um método iterativo, isto é, nestes casos, o solucionador requer o uso de pré-condicionadores para que o método iterativo consiga convergir (Benzi, 2002; Chen, 2005).

Uma matriz é singular se admite um autovalor igual a zero (Saad, 2003), portanto, autovalores muito próximos de zero podem ser aparentemente indicadores de singularidade. No entanto, os autovalores, algumas vezes, podem ocultar singularidades em matrizes escalonadas, já que seus valores dependem muito do escalonamento da matriz, portanto, nestes casos, recomenda-se também o uso do número de condicionamento, pois esta propriedade independe do escalonamento da matriz (Saad, 2003).

O número de condicionamento, definido em (2.7), segundo a teoria da perturbação para sistemas lineares (Prada, 1977; Saad, 2003; Chen, 2005) relaciona as variações que acontecem na solução  $x^*$  com o tamanho das possíveis perturbações (por exemplo, erros de arredondamento) que podem ocorrer durante o processo de solução, como visto em (2.8). Portanto, se o número de condicionamento é grande, então o problema  $A \cdot x = b$  é dito mal condicionado, isto é, pequenos erros em  $A$  ou  $b$  causam grandes erros em  $x$ . O número de condicionamento de norma-2, usado aqui, indica se a matriz está próxima da singularidade (Mori, 1996; de Leon & Semlyen, 2002).

$$k_{(A)} = \|A\|_2 \cdot \|A\|_2^{-1} \quad (2.7)$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq k_{(A)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (2.8)$$

Ambas as propriedades são muito usadas em estudos de sistemas elétricos mal condicionados, principalmente para identificar singularidades e também para

avaliar as melhorias obtidas quando utilizadas estratégias numéricas como, por exemplo, o pré-condicionamento e o reordenamento (Semlyen, 1996; Semlyen & de Leon, 2001; Dag & Semlyen, 2003; Chen & Shen, 2006).

Nas Figuras 2.3 e 2.4 apresentam-se os gráficos dos autovalores das matrizes Jacobianas associadas aos sistemas IEEE30-barras, IEEE118-barras, IEEE162-barras, IEEE145-barras, IEEE300-barras, Norte-Nordeste de 274 barras e duas configurações do sistema brasileiro de 2.256 (Unicamp, 1999) e 3.513 barras (ONS, 2006), respectivamente. Cada sistema possui dois cenários, chamados Caso Base e ponto mais Próximo do Máximo Carregamento (PMC), representados pelos autovalores azuis e vermelhos, respectivamente. Os casos base dos sistemas IEEE30-barras, IEEE118-barras, IEEE162-barras, IEEE145-barras e IEEE300-barras correspondem aos pontos padrões de operação aceitos em relatórios e forças-tarefas realizados pela IEEE (Christie, 1999).

O ponto PMC foi obtido aumentando-se gradativamente o consumo de potência ativa e reativa em todas as barras de carga, mantendo-se o fator de potência constante utilizando-se o programa de Fluxo de Potência Continuado do ANAREDE (CEPEL, 2007). Portanto, o último ponto de operação convergido de fluxo de carga Continuado foi considerado como o ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).

Nas Figuras 2.3 e 2.4 observa-se que, à medida que o tamanho dos sistemas elétricos aumenta, os autovalores ocupam uma região maior do plano complexo, aumentando também seus módulos e a magnitude de suas partes reais. Observa-se também que, nos sistemas IEEE300-barras, Norte-Nordeste e brasileiros aparecem autovalores com parte real negativa, isto é, para estes sistemas, as matrizes Jacobianas são indefinidas. Nestes casos, os métodos iterativos podem apresentar convergência deficiente ou até falhar, sendo, portanto, necessário o uso de pré-condicionadores para que o solucionador iterativo consiga convergir (Benzi, 2002; Chen, 2005).

Todas estas afirmações podem também ser conferidas na Tabela 2.2, onde são apresentados os autovalores com menor e maior parte real, tanto para o caso base como também para o ponto PMC.

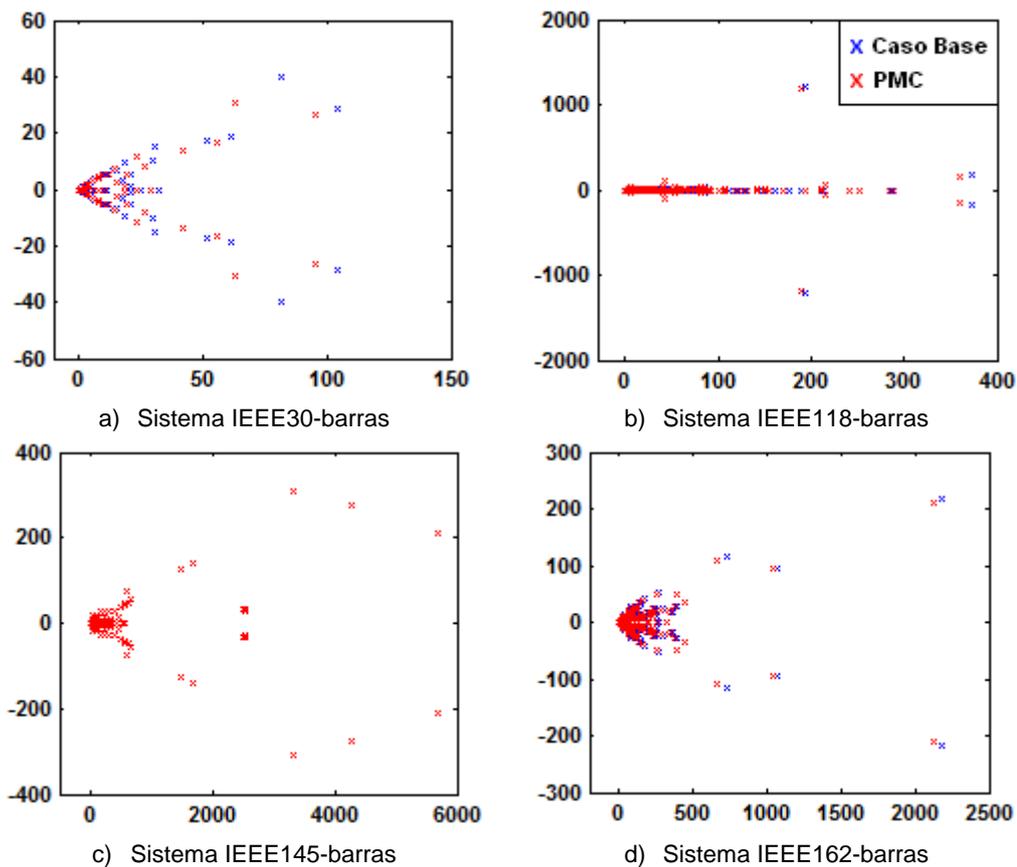


Figura 2.3 – Autovalores da matriz Jacobiana de sistemas de pequeno porte, no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).

Nos gráficos espectrais pode-se observar que, tanto no caso base como no PMC, a maior concentração de autovalores encontra-se próxima ao zero do plano complexo. A aproximação do zero é maior ainda nos sistemas de maiores dimensões indicando que todos os sistemas testados apresentam matrizes Jacobianas próximas da singularidade.

A proximidade do zero é maior para as matrizes Jacobianas obtidas no PMC (autovalores em vermelho). No sistema IEEE145-barras, a diferença espectral entre o caso base e o PMC não é nítida, dado que ambos os pontos de operação encontram-se próximos, ou seja, o caso base deste sistema apresenta um nível de carregamento similar ao ponto PMC.

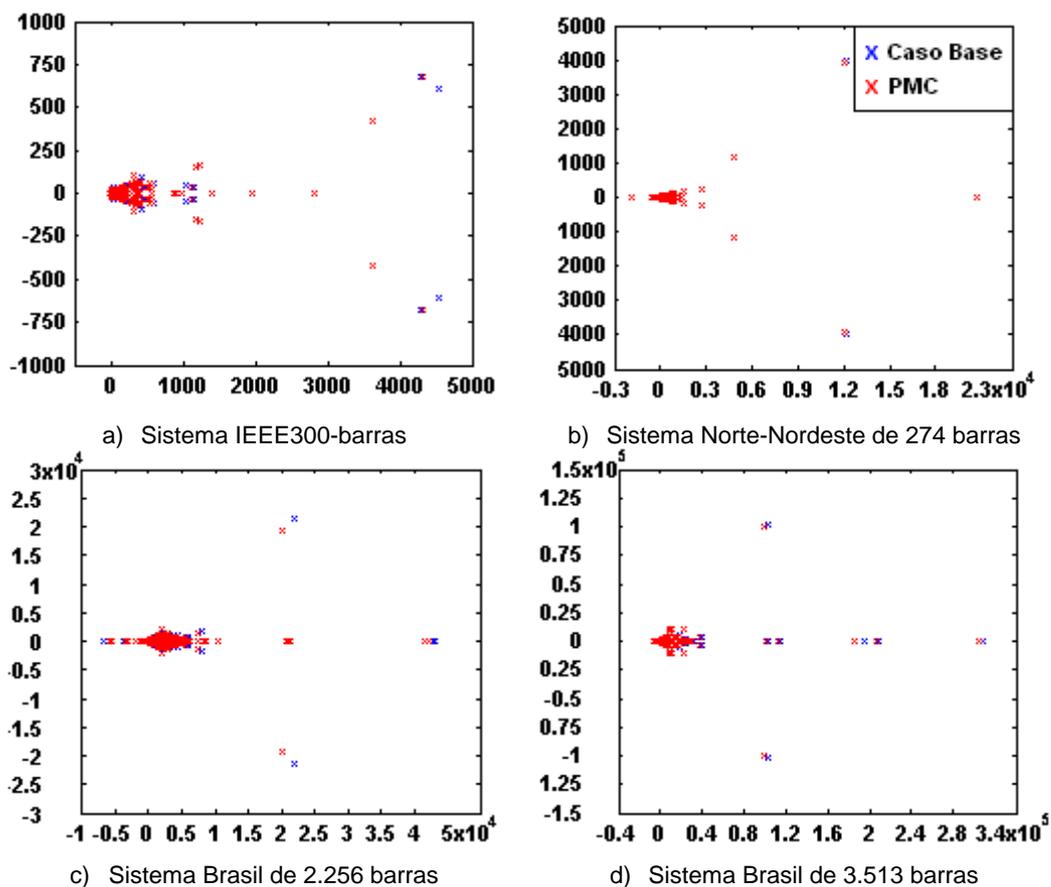


Figura 2.4 – Autovalores da matriz Jacobiana de sistemas de maiores dimensões no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).

Tabela 2.2 – Propriedades espectrais de típicas matrizes Jacobianas de sistemas elétricos de potência.

Sistema	Autovalores no Caso Base		Autovalores no Ponto Mais Próximo do Máximo Carregamento	
	Com a Menor Parte Real	Com a Maior Parte Real	Com a Menor Parte Real	Com a Maior Parte Real
IEEE30-barras	0,23309	104,32±28,87i	0,00798	95,70±26,42i
IEEE118-barras	0,18924	373,78±169,73i	0,00983	360,60±164,28i
IEEE145-barras	0,20514	5.683,93±210,43i	0,00519	5.621,68±202,72i
IEEE162-barras	0,11977	2.187,74±216,50i	0,01871	2.122,98±209,50i
IEEE300-barras	-1,45621	4.456,39±603,11i	-1,45015	4.164,81±673,07i
Norte-Nordeste de 274 barras	-1.873,07495	20.662,45	-1.873,08000	20.703,42
Brasil de 2.256 barras	-6.761,09±14,30i	43.191,30±51,67i	-6.036,07±12,42i	42.284,53±11,23i
Brasil de 3.515 barras	-6.317,46±32,81i	307.962,64±30,09i	-6.286,24±33,34i	304.360,52±30,86i

Com a finalidade de confrontar os resultados anteriores, na Figura 2.5 apresentam-se em escala logarítmica os valores do número de condicionamento das matrizes Jacobiana de todos os sistemas considerados aqui. Observe-se que o número de condicionamento aumenta diretamente com as dimensões dos sistemas, sendo o sistema brasileiro de 3.513 barras o pior em termos de condicionamento, seguido do sistema brasileiro de 2.256 barras. Portanto, estes dois sistemas estão mais susceptíveis à problemas de convergência quando forem utilizados métodos iterativos. Nota-se também que o número de condicionamento é maior no ponto mais próximo do máximo carregamento, já que este ponto de operação está mais próximo da singularidade. Ambas as propriedades comprovam que, o aumento na dimensão dos sistemas elétricos bem como nos seus níveis de carga dificultam, de fato, a solução do subproblema linear de fluxo de carga e conseqüentemente do problema global.

Baseado no exposto, o desenvolvimento de solucionadores e a adaptação de métodos iterativos robustos e eficientes para superar dificuldades associadas à solução do subproblema linear é um desafio interessante e, por esta razão, se tornou o tema principal de investigação neste trabalho. Antes de apresentar a caracterização dos principais métodos iterativos, suas vantagens e desvantagens, é interessante entender o significado do Subespaço de Krylov, como é gerado e como os métodos baseados nesta teoria matemática procuram soluções aproximadas dentro do subespaço. A seguir apresentam-se todos estes conceitos de forma ilustrativa e didática.

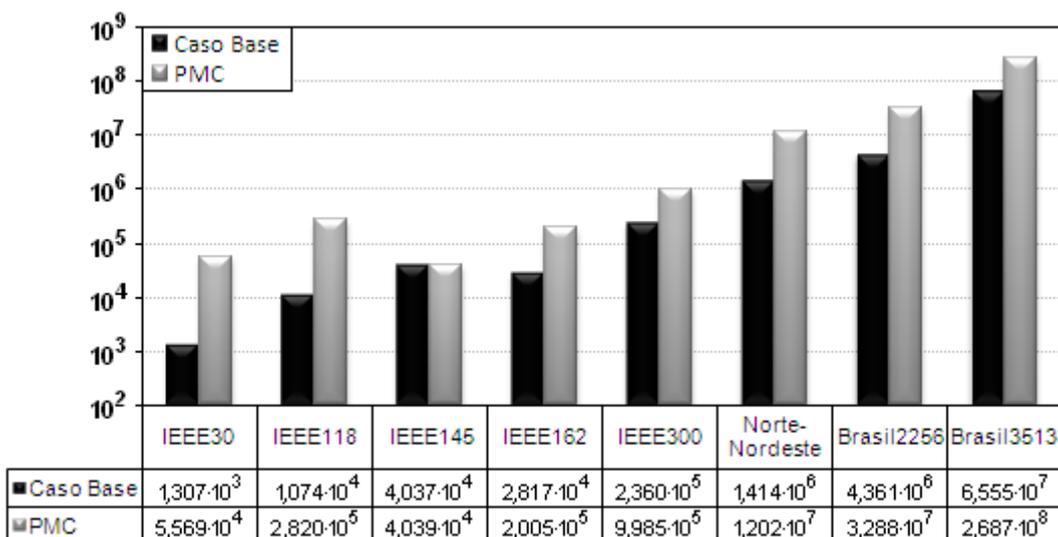


Figura 2.5 – Número de condicionamento para o caso base e para o ponto próximo do máximo carregamento (PMC).

### 2.3 Métodos Iterativos do Subespaço de Krylov

Um subespaço Krylov  $\mathcal{K}_k$  é definido por uma seqüência de vetores base, como apresentado em (2.9), no qual  $A$  é a matriz de coeficientes e  $r_0$  (2.10) o resíduo inicial.

$$\mathcal{K}_{k(A,r_0)} = \text{subespaço}(r_0, A \cdot r_0, A^2 \cdot r_0, \dots, A^{k-1} \cdot r_0) \quad (2.9)$$

$$r_0 = b - A \cdot x_0 \quad (2.10)$$

Um método do subespaço Krylov para resolver sistemas lineares na forma (2.1) procura uma solução aproximada  $x_k$  dentro de um subespaço  $x_0 + \mathcal{K}_k$ , impondo alguma condição que facilite a busca, como por exemplo, a condição da norma mínima do erro, apresentada em (2.11), onde  $x^*$  é a solução exata do sistema linear.

$$\|x^* - x_k\|_2 = \min \{ \|x^* - x\|_2 : x \in x_0 + \mathcal{K}_k \} \quad (2.11)$$

Para ilustrar como um método iterativo em uma iteração  $k$  pode usar a condição da norma mínima do erro na busca de uma aproximação  $x_k$  dentro de um subespaço  $x_0 + \mathcal{K}_k$ , considera-se um sistema linear de três incógnitas. Neste caso, para fins de simplificação, é assumido  $k$  igual a 2, ou seja, o método iterativo está na segunda iteração e a primeira aproximação é zero ( $x_0 = 0$ ). Então, o subespaço onde é procurada a aproximação é dado por:

$$x_0 + \mathcal{K}_2 = x_0 + \text{subespaço}(r_0, A \cdot r_0) = \text{subespaço}(r_0, A \cdot r_0) \quad (2.12)$$

Convenientemente, o subespaço está sendo definido unicamente por dois vetores ( $r_0$  e  $A \cdot r_0$ ) e a sua representação geométrica corresponde ao plano da Figura 2.6. Qualquer vetor  $x$  pertencente ao plano pode ser definido como uma combinação linear dos vetores base  $r_0$  e  $A \cdot r_0$ , da forma:  $x = c_0 \cdot r_0 + c_1 \cdot A \cdot r_0$ .

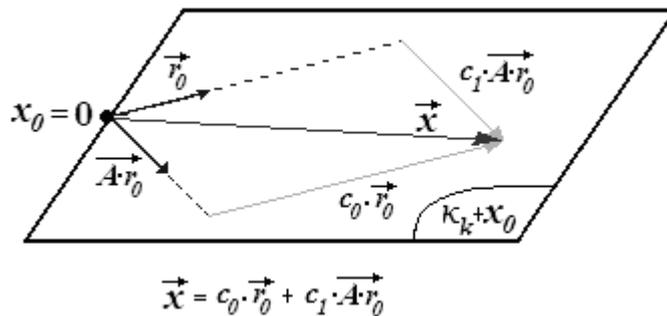


Figura 2.6 – Representação geométrica do subespaço de Krylov pelos seus vetores base

Na Figura 2.7, observa-se que a aproximação  $x_k$  pode ser qualquer vetor  $x$  (em cinza) pertencente ao plano, produzindo um vetor de erro  $x^* - x$  (linha pontilhada) cujo módulo pode aumentar ou diminuir em função da escolha de  $x$ . Entretanto, a condição da norma mínima do erro exige minimizar  $x^* - x$  e por uma simples inspeção na figura pode-se notar que o erro mínimo  $x^* - x$  corresponde ao vetor representado pelas linhas tracejadas, sendo perpendicular (ortogonal) ao plano (subespaço) que une o plano com a solução exata  $x^*$ . Finalmente, a interseção deste vetor com o plano determina a aproximação  $x_k$  (vetor cinza em linha tracejada) que satisfaz a condição da norma mínima do erro e cujo módulo é igual à projeção ortogonal da solução exata  $x^*$  sobre o plano.

As aproximações obtidas a partir dos métodos do subespaço de Krylov são da forma apresentada em (2.13), onde  $q_{k-1}$  é um polinômio de grau  $k-1$ , apresentado em (2.14) (Saad, 2003).

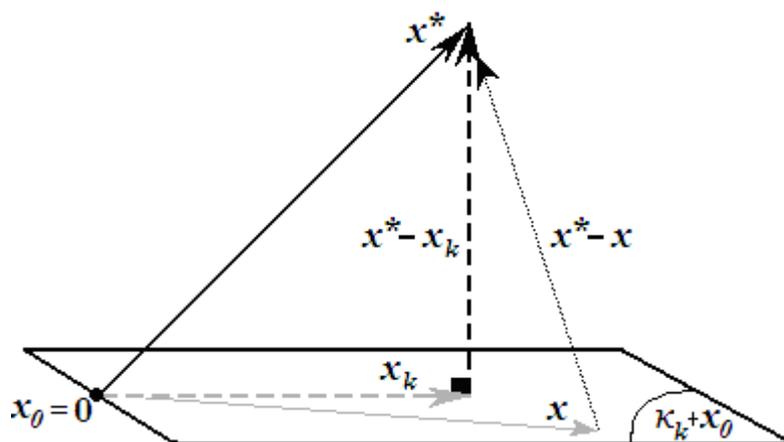


Figura 2.7 – Método do subespaço de Krylov usando a condição da norma mínima do erro.

$$A^{-1} \cdot b \approx x_k = x_0 + q_{k-1}(A) \cdot r_0 \quad (2.13)$$

$$q_{k-1}(A) = c_0 + c_1 \cdot A + c_2 \cdot A^2 + \dots + c_{k-1} \cdot A^{k-1} \quad (2.14)$$

É prática comum definir a primeira aproximação como um vetor de zeros ( $x_0 = 0$ ), conseqüentemente, o resíduo associado ( $r_0$ ) é o vetor  $b$ . Neste caso o subespaço de Krylov é da forma (2.15) e a inversa da matriz  $A$  pode ser representada apenas pelo polinômio  $q_{k-1}$ , como mostrado em (2.16) (Saad, 2003).

$$K_{k(A,b)} = \text{subespaço}(b, A \cdot b, A^2 \cdot b, \dots, A^{k-1} \cdot b) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot b &\approx x_k = q_{k-1}(A) \cdot b \\ A^{-1} &\approx q_{k-1}(A) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Os vetores base  $b, A \cdot b, A^2 \cdot b, \dots, A^{k-1} \cdot b$ , normalmente são quase linearmente dependentes, o que dificulta a busca da aproximação. Portanto, não é recomendável realizar a busca da aproximação no subespaço sem antes ortonormalizar suas bases, para torná-las mais linearmente independentes, facilitando o processo de busca como realizado, por exemplo, no algoritmo do método iterativo GMRES (Saad, 2003). Métodos que fornecem melhores aproximações no subespaço Krylov são conhecidos como métodos de projeção de Krylov devido às classes de projeções (ortogonais ou bi-ortogonais) usadas normalmente para reduzir o resíduo. Esses métodos podem ser classificados de acordo com quatro diferentes condições de busca da solução (Facijs, 2000; Van der Vorst, 2003), sendo estas:

- i. Condição de Ritz-Galerkin. Constrói  $x_k$  e o resíduo é ortogonal com relação ao mais recente subespaço construído:  $(b - A \cdot x_k) \perp K_k(A, r_0)$ .
- ii. Condição da norma mínima residual. Identifica  $x_k$  cuja norma Euclidiana  $\|b - A \cdot x_k\|_2$  é mínima sobre  $K_k(A, r_0)$ .
- iii. Condição de Petrov-Galerkin. Encontra um  $x_k$  de forma que o resíduo  $b - A \cdot x_k$  seja ortogonal a algum subespaço  $k$ -dimensional aceitável.
- iv. Condição da norma mínima do erro. Determina  $x_k$  em  $A^T \cdot K_k(A^T, r_0)$  pelo qual a norma Euclidiana  $\|x^* - x_k\|_2$  é mínima (ilustrada na Figura 2.7).

Como mostrado na Tabela 2.3, a primeira abordagem, Ritz-Galerkin, conduz ao método Gradiente Conjugado (CG) e o Método de Ortogonalização Completa (FOM). A abordagem da norma mínima residual produz métodos como o Mínimo Resíduo (MINRES) e o Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES). A terceira abordagem, Petrov-Galerkin, leva a métodos como o Gradiente Bi-conjugado (BICG) e o Resíduo Quase Mínimo (QMR). Na quarta abordagem leva a métodos como o LQ Simétrico (SYMMLQ). Além dessas quatro abordagens, existem métodos híbridos, resultado da mistura das abordagens anteriores, tais como o Gradiente Conjugado Quadrado (CGS), o Gradiente Bi-conjugado Estabilizado (BICGSTAB) e o Resíduo Quase Mínimo Livre de Transpostas (TFQMR).

Com o intuito de selecionar um método iterativo para ser parte do solucionador proposto, são apresentadas a seguir as principais características dos métodos iterativos mencionados acima, destacando-se suas vantagens e desvantagens. Contudo, enfatizam-se aquelas características mais convenientes para solução dos sistemas lineares cujas matrizes Jacobianas apresentam estruturas e propriedades espectrais típicas de fluxo de carga. Adicionalmente, são avaliados os principais métodos iterativos em termos de robustez e eficiência computacional.

## 2.4 A Escolha do Método Iterativo

Conforme exposto anteriormente, a escolha do método iterativo é fundamental para o desenvolvimento de um solucionador adequado para o problema de interesse. Para tal, foram investigados muitos dos avanços ocorridos no âmbito dos métodos de Subespaço de Krylov durante os últimos anos. A informação apresentada a seguir, geralmente não disponível nos livros, provém de publicações realizadas pelos próprios autores dos métodos iterativos (Hestenes & Stiefel, 1952; Lanczos, 1952; Fletcher, 1976; Paige & Saunders, 1975; Saad, 1981; Saad & Schultz, 1986; Sonneveld, 1989; Freund & Nachtigal, 1991; Van der Vorst, 1992; Freund, 1994) e de estudos sobre recentes desenvolvimentos computacionais realizados em métodos de subespaços de Krylov (Gutknecht, 1997; Freund et al., 1992; Saad & Van der Vorst, 2000; Eiermann & Ernst, 2001; Simoncini & Szyld 2006).

### 2.4.1 Características dos Principais Métodos Iterativos

Na Tabela 2.3 apresentam-se os principais métodos iterativos e suas características mais relevantes. Na segunda coluna é indicado o tipo de matriz de coeficientes que cada método é capaz de solucionar. Esta primeira característica descarta os métodos CG (Hestenes & Stiefel, 1952), SYMMLQ (Paige & Saunders, 1975) e MINRES (Paige & Saunders, 1975), dado que a Jacobiana do problema de fluxo de carga não é numericamente simétrica. Embora os métodos restantes sejam capazes de solucionar sistemas não-simétricos, apenas o método GMRES não apresenta maiores dificuldades quando as matrizes de coeficientes são indefinidas (Saad & Schultz, 1986). Deve-se lembrar que nos sistemas elétricos de maior porte (IEEE300-barras, Norte-Nordeste e brasileiros) aparecem autovalores com parte real negativa e também outros com parte real positiva e para estes sistemas, as matrizes Jacobianas são indefinidas. Portanto, teoricamente o método GMRES deve apresentar melhor comportamento durante a solução dos sistemas lineares de fluxo de carga reais de médio e maior porte.

Tabela 2.3 – Principais características dos métodos iterativos.

Método Iterativo	Tipo de Matriz de Coeficientes	Algoritmo de Construção do Subespaço de Krylov	Condições de Busca da Solução
CG	Simétrica definida positiva	Lanczos	Ritz-Galerkin
BICG	Não-simétrica	Bi-Lanczos	Petrov-Galerkin
SYMMLQ	Simétrica indefinida	Lanczos	Norma mínima do erro
MINRES	Simétrica indefinida	Lanczos	Norma mínima residual
FOM	Não-simétrica	Arnoldi	Ritz-Galerkin
GMRES	Não-simétrica indefinida	Arnoldi	Norma mínima residual
CGS	Não-simétrica	Lanczos Não-simétrico	Híbrido
QMR	Não-simétrica	Lanczos antecipado	Petrov-Galerkin
BICGSTAB	Não-simétrica	Bi-Lanczos Modificado	Híbrido
TFQMR	Não-simétrica	Lanczos Não-simétrico	Híbrido

Outra característica importante, apresentada na terceira coluna da Tabela 2.3, está associada com o algoritmo adotado pelo método iterativo para que, a partir

da matriz de coeficientes  $A$  e do resíduo  $r_0$ , sejam construídas as bases ortogonais do Subespaço de Krylov  $\mathcal{K}_k$ , dado por (2.9). Basicamente, o Subespaço de Krylov pode ser construído usando-se o algoritmo de Arnoldi para matrizes não-simétricas (Arnoldi, 1951), o algoritmo de Lanczos para matrizes simétricas (Lanczos, 1950; Lanczos, 1952) ou usando-se alguma das várias versões do algoritmo de Lanczos não-simétrico, por exemplo, biortogonalização de Lanczos (Bi-Lanczos ou também chamado *Two-side Lanczos*) (Lanczos, 1952) e Lanczos antecipado (*look-ahead Lanczos*) (Freund et al., 1993; Gutknecht, 1992; Gutknecht, 1994). Em cada iteração destes algoritmos é calculada uma base ortogonal do subespaço de Krylov.

O tipo de algoritmo adotado pelos métodos iterativos influencia bastante na sua robustez, podendo algumas vezes interromper o processo iterativo devido a divisões por zero. Tanto o algoritmo de Arnoldi (usado pelos métodos FOM e GMRES) quanto o algoritmo de Lanczos (usado pelos métodos CG, SYMMLQ e MINRES) não apresentam interrupções (*breakdowns*) nem problemas de estabilidade numérica durante sua execução, conseqüentemente, os métodos FOM, GMRES, CG, SYMMLQ e MINRES podem ser considerados os mais robustos (Saad & Schultz, 1986; Drkosová et al., 1995; Paige, et al., 2006). No entanto, no caso dos métodos que usam variações ou adaptações do algoritmo de Lanczos não-simétrico (BICG, CGS, QMR, BICGSTAB e TFQMR), podem-se apresentar dois tipos de interrupções conhecidas como: interrupções de Lanczos (*Lanczos-breakdowns* ou também chamadas *ghost-breakdown*) e interrupções pivô (*pivot-breakdown* ou também chamadas *true-breakdowns*) (Brezinski et al., 1997; Brezinski et al., 1999; Gutknecht, 1997). Em ambos os casos o algoritmo usado para calcular as bases ortogonais do subespaço de Krylov é interrompido devido a uma divisão por zero. Quando acontece uma interrupção do tipo Lanczos, a divisão por zero se produz nas relações de recorrência usadas no algoritmo, porém, a interrupção do tipo pivô ocorre quando a base do Subespaço de Krylov, que está sendo calculada, não existe (Brezinski et al., 1997).

Quando a divisão não é por zero, mas por um número muito pequeno (próximo de zero), ocorrem as chamadas quase-interrupções (*near-breakdown*), as quais introduzem erros de arredondamento no algoritmo de Lanczos e, conseqüentemente, problemas de estabilidade numérica no processo de solução do método iterativo (Brezinski et al., 1997). De acordo com o tipo de interrupção à qual estão associadas, as quase-interrupções são conhecidas na literatura

como quase-interrupção de Lanczos e quase-interrupção pivô (Brezinski et al., 1997). Quando ocorre uma quase-interrupção o algoritmo não é interrompido, mas a cada iteração são introduzidos erros que, quando acumulados produzem instabilidade numérica. O método iterativo normalmente para quando atinge o máximo número de iterações sem ter encontrado a solução do sistema de equações lineares (Brezinski et al., 1997).

Uma vez apresentadas as principais características dos métodos iterativos, é necessário determinar se estas favorecem ou não os respectivos desempenhos quando usados para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga, principalmente em termos de robustez. A seguir, a partir das características expostas na Tabela 2.3, são apresentadas as principais vantagens e desvantagens dos métodos iterativos mencionados anteriormente, na Tabela 2.4.

#### **2.4.2**

##### **Vantagens e Desvantagens dos Principais Métodos Iterativos**

Conforme mencionado anteriormente, os métodos CG, SYMMLQ e MINRES não são adequados para solucionar os sistemas lineares de fluxo de carga, já que são aptos apenas para solucionar sistemas simétricos. A primeira tentativa para solucionar este impasse é apresentada em (Lanczos, 1952), com o método conhecido como Gradiente Bi-conjugado (BICG) sendo posteriormente melhorado por (Fletcher, 1976). Este método, na sua versão final, consegue solucionar sistemas não-simétricos, porém apresenta muitas desvantagens associadas com seu péssimo desempenho, principalmente em termos de robustez (Brezinski et al., 1997). O BICG utiliza uma das formas do algoritmo Lanczos não-simétrico, conhecida como biortogonalização de Lanczos ou simplesmente Bi-Lanczos, para construir as bases ortogonais do Subespaço de Krylov. No entanto, este algoritmo pode apresentar todos os tipos de interrupções e quase-interrupções descritas anteriormente, e adicionalmente pode também apresentar outro tipo de interrupção (divisão por um pivô zero) associado com a fatoração LDU requerida internamente pelo algoritmo Bi-Lanczos (Brezinski et al., 1997). Todos estes problemas podem ocasionar a falha do BICG ou provocar instabilidades numéricas que impedem sua convergência. Além disso, o BICG precisa realizar, em cada iteração, uma multiplicação matriz-vetor com cada matriz  $A$  e  $A^T$ , aumentando o custo

computacional. Contudo, durante o processo iterativo a taxa de convergência varia drasticamente (aumenta e diminui) de uma iteração para outra. Portanto, o BICG apresenta uma convergência irregular e oscilatória (Brezinski et al., 1997; Simoncini & Szyld 2006).

Pode-se considerar o BICG como a primeira tentativa de se solucionar problemas não-simétricos. Porém, devido à sua baixa robustez e ineficiência computacional, este método está descartado para o solucionador proposto.

Os problemas que o BICG produz foram posteriormente motivo de intenso estudo pelos pesquisadores, cujo resultado propõe duas alternativas, sendo estas: o método Gradiente Conjugado Quadrado (CGS) (Sonneveld, 1989) e o método Resíduo Quase Mínimo (QMR) (Freund & Nachtigal, 1991). No caso do CGS, o método requer apenas uma operação matriz-vetor por iteração. Esta mudança torna o método CGS computacionalmente mais eficiente que o BICG. Porém, as interrupções e quase-interrupções ainda podem ocorrer de forma similar ao método BICG. Além disso, as mudanças realizadas no CGS amplificam mais ainda as irregularidades e oscilações da sua convergência (Saad & Van der Vorst, 2000). O CGS apenas melhorou a eficiência computacional do BICG, portanto, os problemas de robustez não solucionados são determinantes para que o método CGS também não seja adotado como o método do solucionador proposto.

No caso do QMR, a atenção dos pesquisadores esteve direcionada a solucionar os problemas de robustez, sendo proposto um novo algoritmo de Lanczos não-simétrico conhecido como Lanczos antecipado (*look-ahead* Lanczos) (Freund et al., 1993). Este algoritmo reduz a ocorrência de interrupções e problemas de estabilidade numérica, mas a robustez do método vai depender das características e propriedades espectrais dos sistemas lineares do problema que está sendo solucionado (Freund & Nachtigal, 1991). Embora as mudanças realizadas no algoritmo de Lanczos tornem este método mais robusto, a ocorrência de interrupções é ainda possível. Estas mudanças eliminam qualquer tipo de irregularidade ou oscilações da sua convergência (convergência suave). Contudo, o QMR apresenta uma taxa de convergência similar ao BICG e é pouco eficiente, já que precisa realizar duas operações de multiplicação matriz-vetor em cada iteração (Saad & Van der Vorst, 2000; Simoncini & Szyld 2006).

Tabela 2.4 – Principais vantagens e desvantagens dos métodos iterativos, quando usados para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga.

Método Iterativo	Vantagens	Desvantagens
CG	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Robusto em problemas simétricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Falha em sistemas simétricos indefinidos ou não-simétricos.</li> </ul>
BICG	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Soluciona sistemas não-simétricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza multiplicações matriz-vetor com ambas as matrizes <math>A</math> e <math>A^T</math>.</li> <li>• Pode parar quando apresentar interrupções do tipo Lanczos e pivô.</li> <li>• O algoritmo Bi-Lanczos também pode parar se apresentar divisões por zero, dado que implicitamente realiza uma fatoração triangular do tipo LDU.</li> <li>• Apresenta instabilidade numérica devido às possíveis quase-interrupções.</li> <li>• Convergência oscilatória e irregular, tornando-o não confiável.</li> </ul>
SYMMLQ	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Robusto em problemas simétricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Falha quando soluciona sistemas não-simétricos.</li> </ul>
MINRES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Robusto em problemas simétricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Falha quando soluciona sistemas não-simétricos.</li> </ul>
FOM	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Robusto inclusive em sistemas não-simétricos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Computacionalmente menos eficiente que o GMRES.</li> </ul>
GMRES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Robusto, garantindo a convergência ainda quando soluciona sistemas mal-condicionados.</li> <li>• Melhor controle do erro que o método FOM.</li> <li>• Muito mais eficiente computacionalmente que os métodos FOM, BICG, CGS, QMR, TFQMR e BICSTAB.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Menos eficiente computacionalmente que os métodos diretos, quando usado sem nenhuma estratégia numérica adicional.</li> </ul>
CGS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Computacionalmente mais eficiente que o BICG.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A convergência irregular e oscilatória do método BICG é amplificada.</li> </ul>
QMR	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A convergência não é oscilatória nem irregular.</li> <li>• O algoritmo Lanczos antecipado reduz a ocorrência de interrupções.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresenta taxa de convergência similar ao BICG.</li> <li>• Computacionalmente pouco eficiente.</li> <li>• Ainda pode apresentar interrupções no algoritmo Lanczos antecipado.</li> <li>• Realiza multiplicações matriz-vetor com ambas as matrizes <math>A</math> e <math>A^T</math>.</li> </ul>
BICGSTAB	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Computacionalmente mais eficiente que os métodos BICG, QMR, CGS e TFQMR.</li> <li>• Reduz as possibilidades de ocorrência de interrupções e quase-interrupções apresentadas no BICG e CGS.</li> <li>• Não possui convergência oscilatória nem irregular.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ainda pode apresentar interrupções e quase-interrupções que podem parar o processo iterativo ou impedir a convergência (instabilidade numérica).</li> <li>• Perde eficiência quando o espectro da matriz de coeficientes apresenta autovalores com grandes quantidades imaginárias, como as encontradas nos espectros dos sistemas elétricos de médio e maior-porte.</li> </ul>
TFQMR	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apenas realiza multiplicações matriz-vetor com a matriz <math>A</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Susceptível a apresentar interrupções no algoritmo Lanczos.</li> <li>• Computacionalmente pouco eficiente e pouco robusto.</li> </ul>

Este método também não é recomendável, dado que não garante robustez. Ambos os métodos CGS e QMR não conseguem satisfazer completamente os requerimentos de eficiência e robustez. Portanto, são propostos dois novos métodos para amenizar as deficiências dos métodos CGS e QMR.

O primeiro método, proposto em (Van der Vorst, 1992) é conhecido como o Gradiente Bi-conjugado Estabilizado (BICGSTAB) e o segundo método, proposto em (Freund, 1994), como o Resíduo Quase Mínimo Livre de Transpostas (TFQMR). O BICGSTAB surge como uma variante do CGS, modificando o algoritmo Bi-Lanczos com a intenção de controlar e minimizar melhor o resíduo. Com isso, consegue-se uma convergência mais suave e rápida que a obtida pelo CGS, evitando-se irregularidades e oscilações (Van der Vorst, 1992). As mudanças realizadas conseguem também reduzir as interrupções e instabilidades numéricas (Kraus, 1992), embora ainda sejam relatados casos onde o processo de convergência deste método é interrompido (Van der Vorst, 2003). Neste método, como acontece no CGS, não é necessário calcular explicitamente a transposta da matriz de coeficientes, o que permite obter um custo computacional aceitável (Van der Vorst, 1992). No entanto, o BICGSTAB ainda requer realizar dois produtos matriz-vetor em cada iteração.

O método BICGSTAB pode ser considerado como a evolução mais atual e bem sucedida dos métodos baseados nos algoritmos de Lanczos. Em relação aos métodos BICG, CGS e QMR, o método BICGSTAB é superior, já que melhora o desempenho em termos de robustez e eficiência computacional (Van der Vorst, 1992). Porém, este método não é confiável devido às possíveis interrupções que não garantem robustez. Este método ainda apresenta outra séria desvantagem, perde eficiência quando o espectro da matriz de coeficientes apresenta autovalores com grandes quantidades imaginárias (Gutknecht, 1993), como as encontradas nos espectros dos sistemas elétricos de maior porte.

O método TFQMR, embora tenha sido melhorado reduzindo-se a ocorrência de interrupções do algoritmo Lanczos e evitando-se a multiplicação matriz-vetor com a transposta da matriz de coeficientes, ainda apresenta interrupções e instabilidades numéricas, portanto, também não será considerado como o método iterativo do solucionador proposto.

Conforme mencionado anteriormente, os métodos baseados no algoritmo de Arnoldi (FOM e GMRES) não apresentam problemas de interrupções nem quase-interrupções, como os apresentados nos métodos baseados nos algoritmos de Lanczos. Embora o método FOM seja robusto, não supera o desempenho do método GMRES. O método GMRES, além de garantir a convergência, ainda quando os sistemas lineares são mal-condicionados, é computacionalmente muito mais eficiente que todos os métodos anteriores (Saad & Schultz, 1986; Drkosová et al., 1995; Paige, et al., 2006). Portanto, é o método mais indicado para ser usado no solucionador iterativo proposto.

### 2.4.3

#### **Avaliação do Desempenho dos Principais Métodos Iterativos Sem Estratégias**

Nos parágrafos anteriores foram apresentadas as principais características numéricas dos métodos iterativos. As informações foram consideradas para determinar os efeitos que estas podem produzir na robustez e eficiência computacional dos métodos iterativos, quando usados para solução de sistemas de equações lineares de fluxo de carga. Depois de realizada esta análise, foi possível apresentar as vantagens e desvantagens de cada método iterativo. A seguir são apresentadas simulações computacionais para avaliar e comparar o desempenho destes métodos iterativos.

Os métodos iterativos considerados nestas simulações estão disponíveis no programa computacional SPARSKIT (Saad, 1990), sob a forma de solucionador de domínio público, sendo estes o BICG, BICGSTAB, TFQMR, FOM e GMRES. Os testes computacionais considerando estes métodos envolvem simulações para resolver os sistemas lineares de fluxo de carga associados com as matrizes Jacobianas da primeira iteração Newton-Raphson, apresentadas em 2.2, para dois cenários de carga: caso base e ponto próximo do máximo carregamento (PMC), ou seja, um sistema linear para cada cenário, resultando em dois sistemas lineares por cada sistema elétrico.

Para todos os métodos iterativos foi usado o mesmo tipo de teste de convergência e as mesmas tolerâncias (absoluta e relativa), ambas iguais a  $10^{-5}$ . As matrizes Jacobianas são armazenadas no formato de armazenamento

esparso conhecido como compressão esparsa por linha (CSR) para serem compatíveis com o solucionador SPARSKIT.

Para estas simulações foram considerados alguns dos sistemas de energia apresentados e os métodos CGS e QMR não foram usados por serem versões anteriores aos métodos BICGSTAB e TFQMR, respectivamente. O objetivo principal é verificar a eficiência dessas técnicas numéricas sob dois aspectos: eficiência computacional e robustez. A análise dos resultados permite confirmar, na prática, que o método GMRES, o qual apresenta as melhores vantagens, é realmente o mais apropriado para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga. Na Tabela 2.5 apresenta-se o número de operações de ponto flutuante em MFLOPS ( $10^6$  FLOPS) resultantes da simulação computacional de ambos os casos (base e PMC) referentes a cada método.

Tabela 2.5 – Número de operações de ponto flutuante para os métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR (MFLOPS).

Sistema	Cenário	BICG	FOM	GMRES	BICGSTAB	TFQMR
IEEE30-barras	C. Base	1,9206	0,8421	0,5846	4,0508	4,6651
	PMC	2,8020	1,2726	1,0801	<b>Interrupção</b>	2,9828
IEEE118-barras	C. Base	253,6703	233,7633	134,4423	523,4859	549,7364
	PMC	366,8282	260,5156	193,1021	548,7201	557,2733
IEEE145-barras	C. Base	<b>Interrupção</b>	56,2609	51,1462	<b>Quase-interrupção</b>	<b>Quase-interrupção</b>
	PMC	<b>Interrupção</b>	58,8182	55,6415	<b>Quase-interrupção</b>	<b>Quase-interrupção</b>
IEEE162-barras	C. Base	39,3701	33,8631	24,3895	40,4352	45,4439
	PMC	<b>Quase-interrupção</b>	48,0227	41,0450	54,4859	69,0345
IEEE300-barras	C. Base	<b>Quase-interrupção</b>	705,9867	624,7670	<b>Quase-interrupção</b>	<b>Quase-interrupção</b>
	PMC	<b>Quase-interrupção</b>	749,3342	635,0290	<b>Quase-interrupção</b>	<b>Quase-interrupção</b>
Norte-Nordeste de 274 barras	C. Base	<b>Quase-interrupção</b>	493,7071	457,1362	<b>Interrupção</b>	<b>Interrupção</b>
	PMC	<b>Quase-interrupção</b>	524,7766	472,7717	<b>Interrupção</b>	<b>Interrupção</b>

A primeira (e a mais importante) observação está associada à robustez dos métodos FOM e GMRES. Ambos os métodos, baseados no algoritmo de Arnoldi,

solucionaram todos os sistemas lineares sem ter nenhum tipo de interrupção ou problema de estabilidade numérica. No entanto, o método GMRES apresenta melhor eficiência computacional (menores tempos de processamento).

Todos os outros métodos baseados nos algoritmos de Lanczos não-simétrico falharam, apresentando as já comentadas interrupções e quase-interrupções responsáveis pela parada imediata do processo de convergência do método iterativo, enquanto que as quase-interrupções realizam iterações indefinidamente. Neste caso, o processo iterativo só para quando é atingido o número máximo de iterações pré-estabelecido, sem ter encontrado a solução. Observa-se que estes problemas são mais freqüentes no ponto PMC, quando as matrizes estão próximas da singularidade; também acontecem quando solucionados sistemas lineares associados com redes elétricas de maior porte.

Estes resultados também mostram que os sistemas lineares do problema de fluxo de carga são de difícil solução (mal condicionados), inclusive para o método BICGSTAB, que provou eficiência e robustez em outras aplicações da engenharia (Carr et al., 2004; Topsakal et al., 2001) e que também é adotado por alguns pesquisadores da área de sistemas elétricos (Borges et al., 1996; Borges et al., 1997; Mori & Iizuka, 2007).

Na Figura 2.8 apresentam-se os valores de taxa de convergência dos cinco métodos iterativos avaliados, agrupados em barras de cores diferentes, para cada sistema elétrico no caso base. Observa-se que, os métodos GMRES (barra verde) e o FOM (barra azul) apresentam maiores taxas de convergência que os outros métodos, por isso a convergência é mais rápida. Portanto, são computacionalmente mais eficientes.

Neste trabalho, a correlação entre o aumento da taxa de convergência e da eficiência computacional será muito utilizada para análise dos resultados. A taxa de convergência é definida no Apêndice I. Observa-se também que as taxas de convergência negativas correspondem aos casos não convergentes, quando os métodos experimentaram interrupções (I) ou quase-interrupções (QI). Nota-se que estes problemas são mais freqüentes quando a dimensão do sistema aumenta. Estes resultados mostram que o GMRES além de ser eficiente, também se mostrou mais robusto.

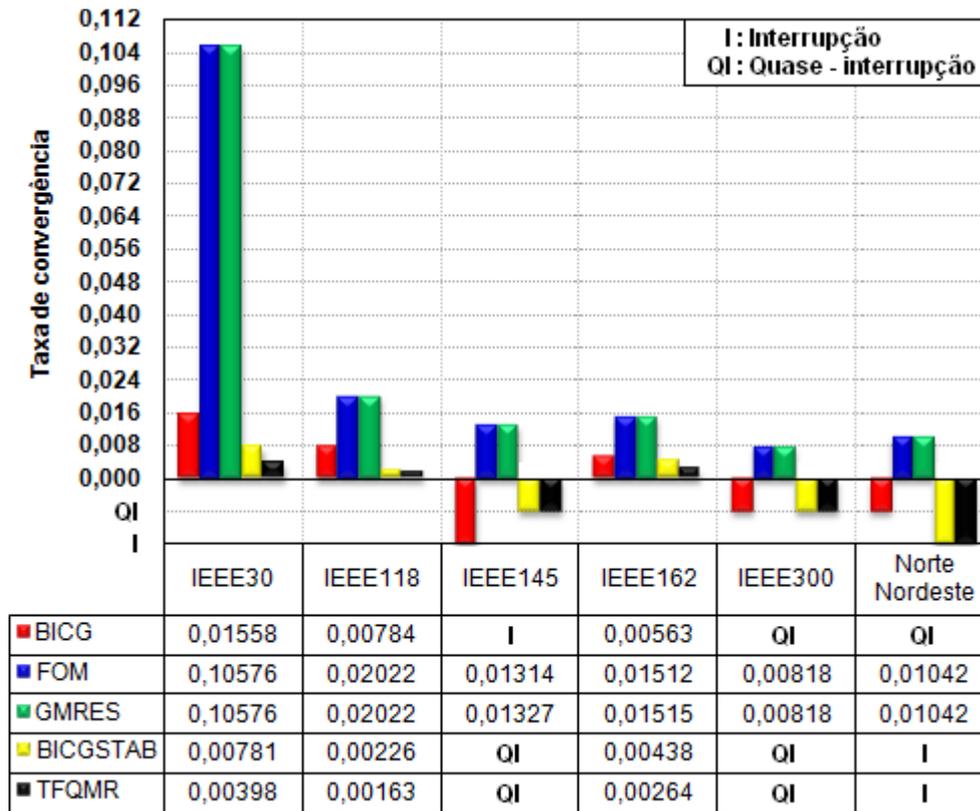


Figura 2.8 – Taxa de convergência dos métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR no CASO BASE.

Na Figura 2.9 apresentam-se os valores de taxa de convergência dos cinco métodos iterativos avaliados, agrupados em barras de cores diferentes para cada sistema elétrico no ponto PMC. De forma similar ao caso base, observa-se que os métodos GMRES e FOM apresentam maiores taxas de convergência que os outros métodos.

Observa-se também que, no PMC, os métodos baseados no algoritmo de Lanczos não-simétrico experimentaram maior número de interrupções e quase-interrupções que no caso base. Nota-se que tanto no caso base como no ponto PMC as taxas de convergência diminuem quando a dimensão do sistema aumenta. Contudo, o método GMRES não mostrou nenhum tipo de dificuldade para solucionar os sistemas próximos ao ponto de máximo carregamento, próximos da singularidade, mal condicionados e de tamanhos diversos.

Finalmente, investigadas as principais características dos métodos iterativos, destacando suas vantagens e desvantagens, realizadas avaliações individuais de desempenho para solução de típicos sistemas lineares de fluxo de carga,

conclui-se que o GMRES deve integrar o solucionador proposto. A opção por este método baseou-se nos seguintes fatos:

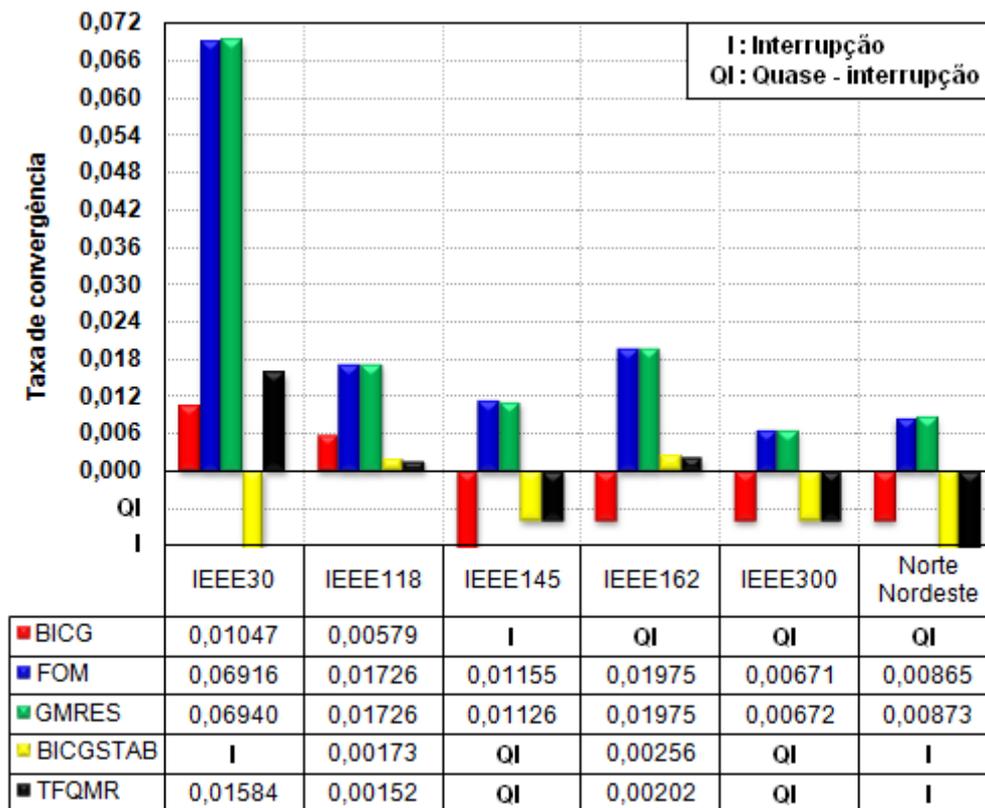


Figura 2.9 – Taxa de convergência dos métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR no PMC.

- Outros métodos (CG, MINRES e o SYMMLQ) tão robustos quanto o GMRES são descartados devido à não-simetria numérica da matriz Jacobiana de fluxo de carga. Outro fator determinante é que alguns dos sistemas elétricos considerados apresentaram matrizes Jacobianas indefinidas. Uma vez que o método GMRES é o único que garante a convergência quando se soluciona sistemas lineares com matrizes indefinidas, então, os métodos restantes foram descartados devido à baixa confiabilidade.
- O algoritmo de Arnoldi usado pelo GMRES para gerar as bases do subespaço de Krylov é robusto e não apresenta nenhum tipo de interrupção, nem quase-interrupções. Esta característica torna o método GMRES muito robusto quando soluciona sistemas mal condicionados. As interrupções e quase-interrupções que aconteceram nos métodos baseados nos algoritmos de Lanczos não-simétrico descartam os métodos BICG, BICGSTAB e TFQMR.

- A análise dos resultados, em termos de robustez e eficiência computacional, demonstrou que o método GMRES apresenta características mais adequadas para a solução do subproblema linear de fluxo de carga. O método GMRES apresentou a melhor (maior) taxa de convergência e o menor número de operações de ponto flutuante quando comparado com os outros métodos, sendo, portanto, o método iterativo mais eficiente. Estudos preliminares encontrados na literatura especializada comparam o GMRES com outros métodos e concluem que o GMRES é muito robusto e de melhor desempenho quando aplicado ao problema de fluxo de carga (Pai & Dag, 1997; Mori & Seki, 2007).

Contudo, os métodos iterativos sem nenhum tipo de estratégia numérica ainda são considerados computacionalmente pouco eficientes quando comparados com os métodos diretos, como comprovado ainda neste capítulo. Um método iterativo começa a ser tão eficiente quanto um método direto quando uma estratégia eficiente de pré-condicionamento for usada. Vale ressaltar que não é objetivo aqui propor um novo método iterativo (sem estratégias), já que provavelmente este seria tão ineficiente quanto os métodos iterativos existentes. Também não é objetivo modificar o algoritmo de um método iterativo existente, pois as melhorias na sua eficiência computacional seriam mínimas comparadas com aquelas que podem ser conseguidas usando-se estratégias numéricas.

Como já mencionado, o objetivo é propor um solucionador iterativo (método iterativo e estratégias numéricas) para solução do subproblema linear de fluxo de carga, sendo que o foco principal do trabalho é reunir e propor adequadamente estratégias numéricas, visando aproveitar melhor os recursos e características do método iterativo a fim de melhorar significativamente sua eficiência computacional e ainda mais sua robustez. A seguir, faz-se uma abordagem teórica dos conceitos associados ao método GMRES, explicando-se de forma ilustrativa os processos envolvidos no seu algoritmo.

## 2.5

### **O Método do Resíduo Mínimo Generalizado – GMRES**

Em (Saad & Schultz, 1986) é introduzido o método iterativo do Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) para resolver sistemas de equações lineares não simétricos. O método GMRES baseia a busca da aproximação na condição da

norma residual mínima, identificando  $x_k$  de tal forma que sua correspondente norma Euclidiana do resíduo seja mínima sobre o subespaço de Krylov, cujas bases são ortonormalizadas.

Neste método estima-se uma solução aproximada  $x_k$  utilizando-se a expressão (2.17), onde  $V$  é uma matriz cujas colunas são os vetores (2.18), base do subespaço de Krylov após sua ortonormalização. O GMRES, em uma primeira etapa, usa o processo de Arnoldi para ortonormalizar os vetores base do subespaço de Krylov  $K_k(A, r_0)$ .

$$x_k = x_0 + V \cdot y_k \quad (2.17)$$

$$[V]_{n \times m} = [v_1^f \quad v_2^f \quad \dots \quad v_k^f] \quad (2.18)$$

A Equação (2.19) é usada pelo algoritmo de Arnoldi para ortonormalizar o vetor  $v_{k+1}^i$  em relação aos outros  $k$  vetores ( $v_1^f, v_2^f, \dots, v_k^f$ ), previamente ortonormalizados.

$$v_{k+1}^f = \frac{v_{k+1}^i - \sum_{g=1}^k \left[ \left[ v_g^f \right]^T \cdot v_{k+1}^i \right] \cdot v_g^f}{\left\| v_{k+1}^i - \sum_{g=1}^k \left[ \left[ v_g^f \right]^T \cdot v_{k+1}^i \right] \cdot v_g^f \right\|_2} \quad (2.19)$$

Na Figura 2.10 ilustra-se o processo de ortonormalização de Arnoldi (também conhecido como método Gram-Schmidt modificado), onde os vetores ( $v_1^i, v_2^i, \dots, v_k^i$ ) pertencem ao subespaço original de Krylov ( $r_0, A \cdot r_0, A^2 \cdot r_0, \dots, A^k \cdot r_0$ ).

Uma vez estimados  $V$  e seus vetores base, o GMRES em uma segunda etapa determina o valor de  $y_k$  baseando-se na condição da norma mínima residual, apresentada na seção 2.3. Deve-se minimizar a norma euclidiana do resíduo para conseguir uma boa aproximação da solução  $x^*$  (ver (2.20)). Utilizando-se (2.17) e (2.19) pode-se demonstrar que a norma euclidiana do resíduo pode também ser representada por (2.21). Maiores detalhes sobre a demonstração são apresentados no Apêndice II.

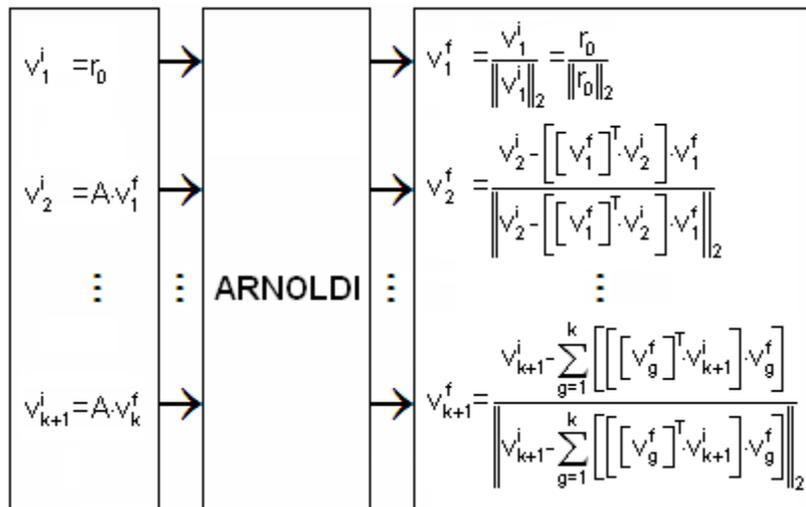


Figura 2.10 – Ortonormalização do Subespaço de Krylov.

Em cada iteração  $k$  do GMRES, o valor mínimo esperado para a norma do resíduo é zero ou muito próximo de zero, sendo suficiente para satisfazer o teste de convergência. Portanto, os valores dos elementos do vetor  $y_k$  devem ser aqueles que tornam a expressão (2.21) igual a zero (ou muito próximo de zero); para conseguir isso, a expressão  $\|r_0\|_2 \cdot \hat{e}_1 - H_k \cdot y_k$  deve ser igual a zero. O sistema linear resultante a ser solucionado é apresentado em (2.22) e representa um típico problema de mínimos quadrados de pequeno porte, solucionado usando-se um processo de fatorações ortogonais baseadas em rotações no plano ou método de Rotações de Givens (Saad & Schultz, 1986).

$$\|r_k\|_2 = \|b - A \cdot x_k\|_2 \quad (2.20)$$

$$\|r_k\|_2 = \left\| V_{k+1} \cdot \left[ \|r_0\|_2 \cdot \hat{e}_1 - H_k \cdot y_k \right] \right\|_2 \quad (2.21)$$

$$H_k \cdot y_k = \|r_0\|_2 \cdot \hat{e}_1 \quad (2.22)$$

Onde  $\hat{e}_1$  é o vetor canônico de dimensão  $k$ ;  $H_k$  é a matriz de Hessenberg superior  $(k+1) \times k$  apresentada em (2.23), cujos elementos são calculados durante a ortonormalização pelo processo de Arnoldi, usando (2.24); e  $\|r_0\|_2 \cdot \hat{e}_1$  é conhecido na literatura como o vetor do lado direito: rhs (*right-hand side*).

$$H_k = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{(1,1)} \\ h_{(2,1)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_{(1,2)} \\ h_{(2,2)} \\ h_{(3,2)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} h_{(1,k-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{(k,k-1)} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_{(1,k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{(k,k)} \\ h_{(k+1,k)} \end{pmatrix} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} & h_k \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$h_{(i,k)} = \left[ v_g^f \right]^T \cdot \left[ A \cdot v_k^f \right]$$

$$h_{(k+1,k)} = \left\| A \cdot v_k^f - \sum_{i=1}^k \left[ \left[ v_g^f \right]^T \cdot \left[ A \cdot v_k^f \right] \right] \cdot v_g^f \right\| \quad (2.24)$$

Uma vez determinado o subespaço  $V$  e o vetor  $y_k$ , em uma terceira e última etapa são calculados a aproximação  $x_k$  e o resíduo  $r_k$ , usando-se as expressões (2.17) e (2.20), respectivamente. As três etapas são repetidas em cada iteração  $k$  dentro de um laço que termina quando o teste de convergência for satisfeito. Na Figura 2.11, apresentam-se em forma de fluxograma e de forma sucinta, todas as etapas do processo iterativo do método GMRES.

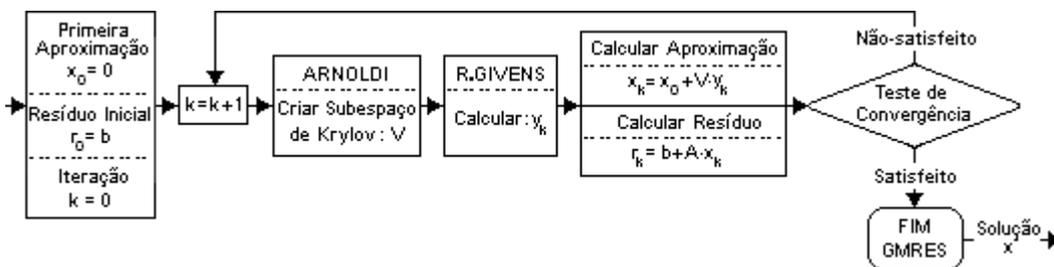


Figura 2.11 – Fluxograma do método iterativo GMRES.

Informações mais detalhadas sobre a implementação computacional para cada uma das etapas são apresentadas no algoritmo da Figura A.1 do Apêndice III. Duas grandezas podem ser usadas no teste de convergência dado por (2.25), sendo a norma-2 do resíduo  $\|r\|_2$  e a norma-2 da variação da solução aproximada  $\|x_k - x_{k-1}\|_2$ . Aqui, o teste de convergência é baseado no cálculo da norma-2 do resíduo, conforme definido em (2.20) e usado no passo 25 do algoritmo. Os parâmetros  $rtol$  e  $atol$  são a tolerância relativa e absoluta do método iterativo, respectivamente.

$$\|r\|_2 \leq \text{rtol} \cdot \|b\|_2 + \text{atol} \quad (2.25)$$

Para ilustrar melhor o significado de  $V$  e  $y_k$ , pode-se expressar (2.17) de outra forma, como apresentado em (2.26). Como se pode observar, o método iterativo procura a aproximação  $x_k$ , partindo da aproximação inicial  $x_0$  (normalmente  $x_0=0$ ), mediante a soma de sucessivos vetores ( $\varepsilon_1 \cdot v_1^f, \varepsilon_2 \cdot v_2^f, \dots, \varepsilon_k \cdot v_k^f$ ) em cada iteração  $k$ , onde ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ ) são os elementos do vetor coluna  $y_k$  apresentado em (2.27). Portanto, pode-se afirmar que a solução  $x_k$  é uma combinação linear dos vetores da base ortonormalizada  $V$ , ou seja, a solução  $x_k$  é a resultante da soma desses vetores, como ilustrado na Figura 2.12. Neste caso, para um sistema linear de duas incógnitas (neste gráfico  $x_0 \neq 0$ ) foram necessárias apenas duas iterações para encontrar a solução exata  $x^*$ .

$$x_k = x_0 + \begin{bmatrix} v_1^f & v_2^f & \dots & v_k^f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} = \varepsilon_1 \cdot \begin{bmatrix} v_1^f \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \cdot \begin{bmatrix} v_2^f \end{bmatrix} + \dots + \varepsilon_k \cdot \begin{bmatrix} v_k^f \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$y_k = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_k]^T \quad (2.27)$$

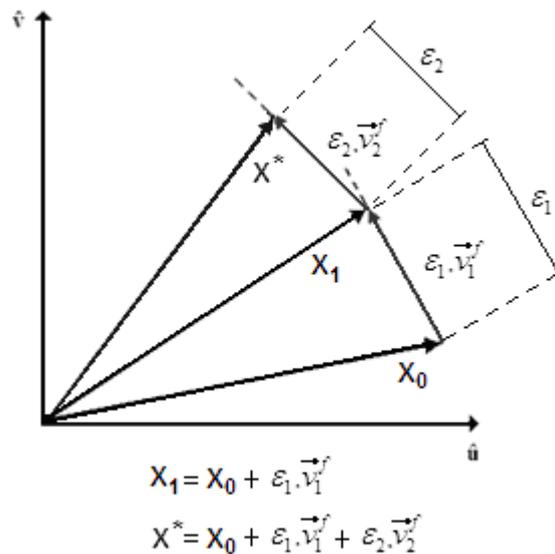


Figura 2.12 – Processo de aproximação à solução  $x^*$ .

A computação de  $y_k$  requer a solução de um problema de mínimos quadrados de dimensão  $(k+1) \times k$ , onde  $k$  é o número da iteração GMRES. Portanto, estimar  $y_k$  pode se tornar uma tarefa difícil ao solucionar sistemas lineares de grande porte

quando o número de iterações aumentar. Dentre algumas das características apresentadas pelo GMRES, destaca-se a convergência em, no máximo,  $n$  iterações (onde  $n$  é o número de incógnitas e a dimensão da matriz de coeficientes).

Obviamente, se são consideradas matrizes em que  $n$  é grande, no pior caso (convergência na  $n$ -ésima iteração), essa garantia de convergência não será vantagem, pois o processo de Arnoldi irá requerer o armazenamento de  $n$  vetores de dimensão- $n$ , além de uma matriz de dimensão  $(n+1) \times n$ , o que exigirá  $n$  produtos matriz-vetor, com uma complexidade espacial (espaço de memória)  $O(n^2)$  e temporal (tempo de execução)  $O(n^3)$ . Isso poderá fazer com que não seja possível obter a solução do sistema num determinado computador, pois a memória disponível não seria suficiente; ou a resposta não seria obtida em tempo hábil, causando dificuldades no desempenho do GMRES. As dificuldades associadas ao baixo desempenho do GMRES (sem estratégias) quando comparado com os métodos diretos são exemplificadas a seguir.

### 2.5.1 Exemplo Ilustrativo do GMRES (Sem Estratégias)

Para ter uma idéia real das dificuldades associadas ao método GMRES quando usado sem nenhuma estratégia numérica, considere o sistema-teste IEEE118-barras. Deve-se solucionar um sistema linear com uma matriz de coeficientes (Jacobiana) de dimensão igual a  $(236 \times 236)$  em cada iteração Newton-Raphson do fluxo de carga. Neste caso, para cada sistema linear é necessário realizar no máximo 236 iterações do GMRES, o que significaria que na última iteração seriam armazenados 236 vetores de dimensão 236, além de uma matriz de Hessenberg (2.23) de dimensão  $237 \times 236$ .

Na Figura 2.13 são apresentados dois gráficos de barras. As primeiras 4 barras (lado esquerdo) correspondem ao número de operações realizadas ao longo da solução do problema (em milhões de operações de ponto flutuante - MFLOPS). As segundas barras (lado direito) correspondem ao número de iterações lineares para cada iteração do método Newton-Raphson (1, 2 e 3). As barras pretas e a última linha da tabela apresentam o número total de MFlops e o número total de iterações da solução do problema. O tempo computacional (CPU) requerido para realizar 534,1593 milhões de operações é aproximadamente 6,02 segundos.

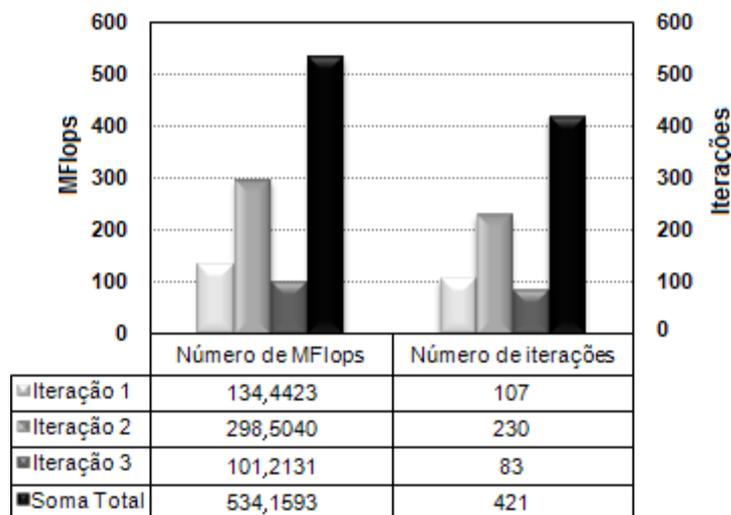


Figura 2.13 – Desempenho computacional do método GMRES.

Na Figura 2.14 apresenta-se em gráfico de barras o número de operações realizadas pelo método direto (MA28), ao longo da solução do problema (em milhões de operações de ponto flutuante - MFLOPS), para cada iteração do método Newton-Raphson (1, 2 e 3). A barra preta e a última linha da tabela apresentam o número total de MFlops realizados. O tempo computacional requerido para realizar 89.432 operações é insignificante, aproximadamente 0,00001 segundos. As características do MA28 serão apresentadas no Capítulo 4.

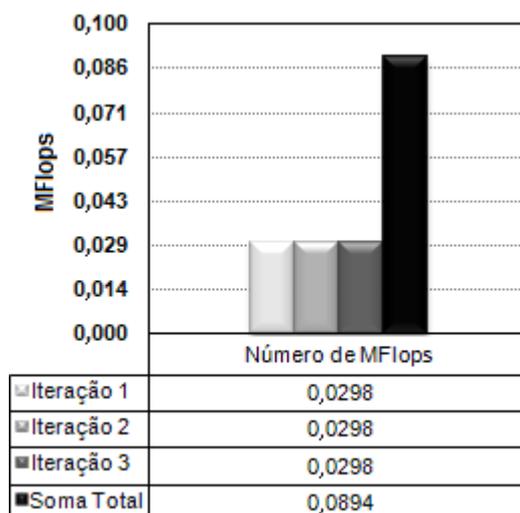


Figura 2.14 – Desempenho computacional do método direto.

Comparando-se os gráficos da Figura 2.13 e Figura 2.14, observa-se que, embora este seja um sistema considerado de pequeno porte, o método GMRES quando usado na sua forma convencional apresenta um desempenho abaixo do esperado, se comparado a um método direto. Sob estas condições, o método

GMRES pode se tornar ainda mais ineficiente se comparado com os métodos diretos, principalmente se usado para sistemas de maior porte. São apresentadas a seguir estratégias para aumentar a eficiência do GMRES, começando pela de reinicialização que, quando usada, reduz a quantidade e a dimensão das bases do subespaço, o número de operações de ponto flutuante nos produtos matriz-vetor, a dimensão do problema de mínimos-quadrados e o número de iterações necessárias para alcançar a convergência.

## 2.6 Estratégia de Reinicialização Para O Método GMRES

Uma desvantagem do GMRES é que o esforço computacional e os requisitos de memória por iteração crescem linearmente com processo iterativo e o custo associado se torna rapidamente excessivo. A forma usual de superar esta condição indesejada é apresentada em (Saad & Schultz, 1986). Nesta referência propõe-se uma versão do GMRES com estratégia de reinicialização, identificada como GMRES(m). Neste caso, o valor de m limitará a dimensão da base do subespaço de Krylov, como apresentado em (2.28). O parâmetro m se torna relevante quando for muito menor que o valor k de cada iteração linear ( $m \ll k$ ), pois limita o tamanho e quantidade dos vetores utilizados no algoritmo de Arnoldi e durante a solução do problema de mínimos quadrados.

$$K_{m(A,r_0)} = \text{subespaço}(r_0, A \cdot r_0, A^2 \cdot r_0, \dots, A^{m-1} \cdot r_0) \quad (2.28)$$

A cada iteração k, calcula-se o resíduo e os m vetores ortonormais através do processo de Arnoldi e, a partir deles, resolve-se o problema de mínimos-quadrados obtendo-se uma aproximação  $x_{k+1}$  para a solução do sistema linear. Caso o resíduo  $r_{k+1}$  não seja suficientemente pequeno, faz-se uma nova iteração. Portanto, quanto menor for o valor de m, menor será a quantidade e a dimensão dos vetores bases do subespaço de Krylov a serem ortonormalizadas. Isto resulta em um menor o número de operações de ponto flutuante realizado nos produtos matriz-vetor e durante a solução do problema de mínimos-quadrados.

A escolha de um valor apropriado para m não é uma tarefa fácil, já que se m for muito pequeno, o processo associado ao GMRES pode ser lento para convergir, ou falhar completamente e não convergir. Por outro lado se o valor de m for

grande, acima do necessário, um considerável espaço de memória será usado. Não existem regras específicas para a escolha desse parâmetro, portanto a escolha apropriada do instante de reinicialização é uma questão de prática. Se estratégias de reinicialização não forem consideradas, o GMRES irá convergir em não mais do que  $n$  (dimensão da matriz) passos, e isto não é prático para grandes valores de  $n$ . Além do mais os requisitos de memória e tempo de CPU na ausência de estratégias de reinicialização são excessivos.

### 2.6.1 Exemplo Ilustrativo – GMRES(m) Reinicializado

A fim de ilustrar as vantagens da estratégia de reinicialização no método GMRES, soluciona-se aqui o mesmo problema do exemplo anterior. O procedimento adotado para estimar o valor ótimo de  $m$  a fim de tornar o GMRES mais eficiente envolveu diversas simulações computacionais (Figura 2.15). Em problemas de maior-porte, este procedimento pode não ser eficiente, mas aqui como o sistema é de pequeno porte, esta procura é viável. Foram realizadas várias simulações para calcular o número de MFlops associado à solução do sistema linear para valores de  $m$  compreendidos entre 2 e 236, encontrando-se o menor número de MFlops (20,83 milhões de operações) para  $m$  igual a 53.

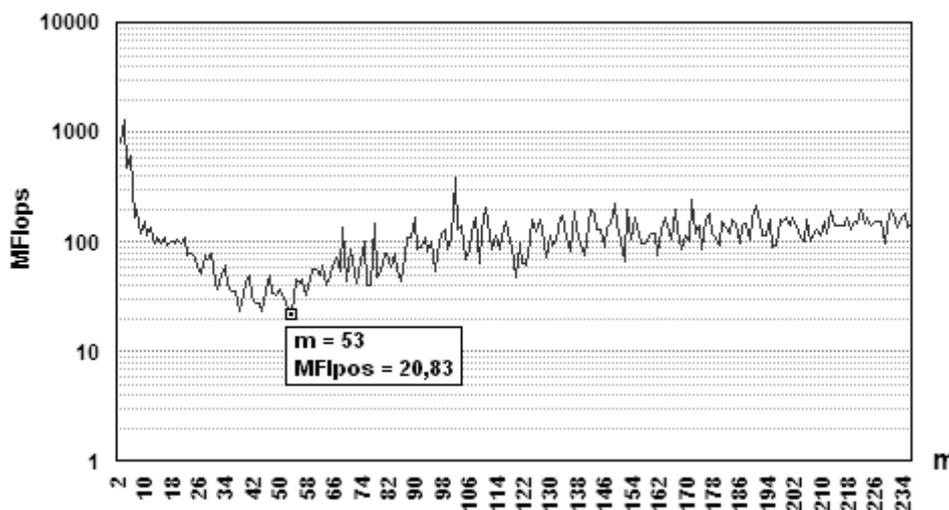


Figura 2.15 – Simulações para busca do tamanho ótimo do subespaço de Krylov.

Para este valor de  $m$  é necessário realizar apenas 16 iterações do GMRES, o que significa que na última iteração seria necessário armazenar 16 vetores de dimensão 236, além de uma matriz de Hessenberg de dimensão  $17 \times 16$ . Isto

resulta numa solução do problema de mínimos quadrados menos complexa se comparada ao exemplo anterior. Deve-se mencionar que o valor de  $m$  é estimado apenas para o sistema linear da primeira iteração Newton-Raphson, sendo este considerado como o valor ótimo para o problema. Na Figura 2.16, ilustra-se o desempenho do GMRES( $m$ ), na qual é possível observar uma redução significativa no número de operações e no número de iterações lineares (comparar com valores da Figura 2.15).

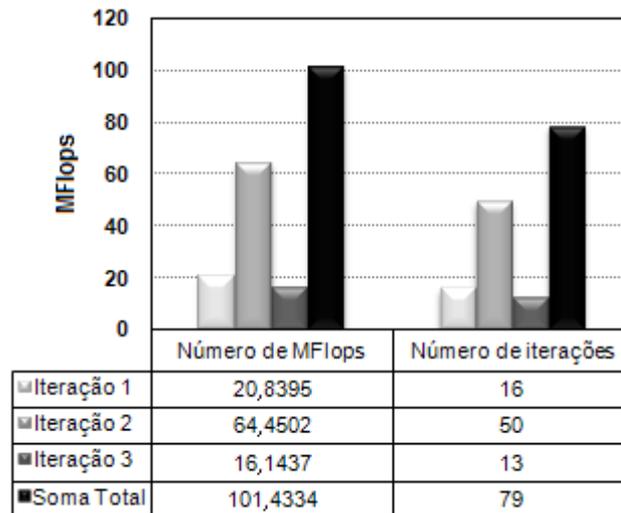


Figura 2.16 – Desempenho computacional do método GMRES( $m$ ).

Embora esta estratégia tenha melhorado o desempenho computacional do método GMRES, os resultados são inferiores aos conseguidos com o método direto. Portanto, o desempenho do solucionador (GMRES e estratégia de reinicialização) continua abaixo do esperado. Como já mencionado, uma desvantagem da estratégia de reinicialização está associada com a dificuldade da busca de um valor apropriado do parâmetro  $m$ , para cada sistema linear em cada iteração Newton-Raphson. Simulações apresentadas nos Capítulos 3 e 5 mostram que a estratégia de reinicialização pode não ser mais necessária quando usados pré-condicionadores de alta qualidade. Esta é uma contribuição importante, pois como mencionado a escolha do valor ótimo de  $m$  é um dos pontos mais críticos para a eficiência do processo iterativo.

Outra forma de mitigar o problema seria reduzir diretamente o número de iterações  $k$  necessárias para atingir a convergência do método GMRES, uma vez que o tamanho do subespaço de Krylov e o aumento das operações estão associados a este parâmetro. Na primeira iteração do primeiro exemplo, se fosse possível reduzir o número de iterações lineares totais, por exemplo, de 107 para

menos de 5 iterações, então seria necessário armazenar apenas 5 vetores de dimensão 236, além de uma matriz de Hessenberg de dimensão  $6 \times 5$ . A dificuldade para resolver o problema de mínimos quadrados seria bastante amenizada, melhorando a eficiência computacional do método GMRES. Embora pareça difícil conseguir tal melhoria, existe uma estratégia para diminuir a complexidade do problema e reduzir significativamente o número de iterações do GMRES, conhecida como pré-condicionamento do método iterativo, sendo introduzida no Capítulo 3.

A seguir, apresenta-se outra estratégia normalmente usada junto às técnicas de pré-condicionamento, conhecida como reordenamento da matriz de coeficientes (Jacobiana). Esta estratégia costuma melhorar significativamente a convergência dos métodos iterativos reduzindo, conseqüentemente, o número de iterações e o tempo gasto de processamento.

## 2.7 Estratégias de Reordenamento da Matriz Jacobiana

Estratégias de reordenamento têm sido muito usadas pelos métodos diretos para reduzir o número de elementos não-nulos e para melhorar a estabilidade numérica durante a fatoração triangular LU (Duff et al., 1986; Elman, 1986; Olschowka & Neumaier, 1996; Tinney, 1967; Cuthill, 1972; Duff & Reid 1996; George & Liu, 1981). O reordenamento de uma matriz esparsa é realizado mediante permutações de linhas, colunas ou ambas. Entende-se como permutação o produto da matriz de coeficientes com outras matrizes  $P$  e  $Q$ , onde estas matrizes são permutações da matriz identidade. Se a matriz de permutação  $P$  é multiplicada pela matriz de coeficientes, as linhas são trocadas, e caso a multiplicação envolva a matriz  $Q$ , as colunas são trocadas. No caso de ambas as multiplicações, tanto as linhas como as colunas são trocadas (Saad, 2003).

Uma vez determinadas as matrizes de permutação  $P$  e  $Q$ , o sistema em (2.1) pode ser substituído pelo sistema equivalente (reordenado) de (2.29). Se  $A$  é estruturalmente simétrica, (isto é,  $a_{ij} \neq 0$  se e somente se  $a_{ji} \neq 0$  para todos  $i, j \in [1, n]$ ), então é desejável que as permutações sejam simétricas, ou seja,  $Q = P^T$  para preservar as propriedades da matriz original (Saad, 2003). Neste caso, o

sistema em (2.1) pode ser substituído pelo sistema equivalente de (2.30) (reordenado simetricamente). Este tipo de reordenamento é adotado neste trabalho para aproveitar a simetria estrutural da matriz Jacobiana de fluxo de carga.

$$P \cdot A \cdot Q \cdot y = P \cdot b, \quad x = Q \cdot y \quad (2.29)$$

$$P \cdot A \cdot P^T \cdot y = P \cdot b, \quad x = P^T \cdot y \quad (2.30)$$

Quando realizado o reordenamento simétrico, o conjunto de elementos da diagonal da matriz é preservado e os mesmos são deslocados somente dentro da diagonal. O reordenamento simétrico não afeta os autovalores de  $A$  e não modifica o número de condicionamento (Saad, 2003; Chen, 2005). Se a matriz  $A$  não for simétrica, as permutações devem ser realizadas com base na estrutura da matriz simétrica  $A+A^T$  (Chen, 2005).

No caso dos métodos iterativos, o reordenamento simétrico é aplicado antes da execução do método, alterando estruturalmente a matriz de coeficientes sem modificar os valores de seus elementos e mantendo sempre o sistema resultante equivalente ao sistema linear original. Os benefícios ou vantagens das estratégias de reordenamento sobre a convergência dos métodos de subespaço Krylov só podem ser observados quando usadas as técnicas de pré-condicionamento. Quando não usadas técnicas de pré-condicionamento, o reordenamento não produz nenhum tipo benefício para o método iterativo, já que não altera as propriedades espectrais da matriz de coeficientes, ou seja, o número de condicionamento e os autovalores da matriz não são modificados pelo reordenamento. A influência das estratégias de reordenamento no desempenho dos métodos iterativos pré-condicionados tem sido estudada por uma série de autores, principalmente de forma experimental, ainda objeto de discussão (Benzi et al., 2000; Axelsson, 1994; Benzi et al., 1999a; Benzi et al., 1999b; Brand, 1992; D'Azevedo et al., 1992; Doi & Washio, 1999; Duff & Koster, 1999; Duff & Koster, 2001; Duff & Meurant, 1989; Dutto, 1993; Le Borne, 2000; Zhang, 2001).

O reordenamento melhora a qualidade do pré-condicionador e reduz o tempo necessário para sua construção, gerando subespaços de Krylov mais próximos

da solução exata que quando não usado, chegando a convergência em poucas iterações (Benzi & Tuma, 2000). Portanto, a influência do reordenamento na convergência do método iterativo se dá de forma indireta, através do pré-condicionador. Ilustra-se melhor a importância do reordenamento no solucionador através de testes numéricos apresentados nos próximos capítulos.

Estratégias clássicas de reordenamento para redução de largura de banda, tais como Reverse Cuthill-McKee (RCM) (Cuthill, 1972), ordenamento de Sloan (Sloan, 1986), o ordenamento de Gibbs-Poole-Stockmeyer (Gibbs et al., 1976), além de outras estratégias usadas para redução do número de elementos não-nulos, tais como as variantes do ordenamento de Mínimo Grau (Minimum Degree MD) (Tinney, 1967; Amestoy et al., 1996; George & Liu, 1989), e o ordenamento Nested Dissection (George, 1973), têm sido muito estudadas, pesquisadas e avaliadas em diferentes áreas da engenharia e da ciência. Porém, tradicionalmente a estratégia de ordenamento do tipo Mínimo Grau, apresentada em (Tinney, 1967), conhecida como esquema II de Tinney, onde o propósito principal é reduzir o número de elementos não-nulos, tem sido preferida pelos métodos diretos para aplicações em sistemas de energia elétrica, apresentando excelentes resultados em termos de eficiência computacional (Alves et al., 1999; Stott, 1974; Tinney, 1967).

Com relação ao método RCM, onde além da redução do número de elementos não-nulos também se reduz a largura de banda, baseado na literatura consultada tem sido a técnica mais popular entre os métodos iterativos e aplicado com sucesso em diferentes áreas da engenharia e aplicações matemáticas (Benzi et al., 2000; Axelsson, 1994; Benzi et al., 1999a; Benzi et al., 1999; Benzi & Tuma, 2000; Brand, 1992; D'Azevedo et al., 1992; Doi & Washio, 1999; Duff & Koster, 1999; Duff & Koster, 2001; Duff & Meurant, 1989; Dutton, 1993; Le Borne, 2000; Zhang, 2001). Embora o reordenamento RCM apresente resultados interessantes, sua influência na convergência dos métodos iterativos na área de sistemas de energia elétrica tem sido pouco explorada e estudada (Pessanha et al., 2009; Flueck & Chiang, 1998).

Considerando-se que a influência das técnicas de reordenamento no solucionador iterativo pode ser favorável em termos de eficiência computacional, então, ambos os métodos (RCM e MD) são considerados a fim de determinar qual o mais apropriado para ser adotado pelo solucionador proposto. A seguir,

uma análise comparativa entre os reordenamentos RCM e MD (Apêndice IV) é realizada para determinar as características, vantagens e desvantagens de cada um.

### 2.7.1

#### Características Principais das Técnicas de Reordenamento MD e RCM

São comparadas as principais características dos reordenamentos RCM e MD quando usados para reordenar típicas matrizes Jacobianas de fluxo de carga. As principais características consideradas neste trabalho são: o número de novos elementos não-nulos e a largura de banda. Na Figura 2.17 compara-se, para ambos os tipos de reordenamento RCM (barra cinza) e MD (barra preta), o número de novos elementos não-nulos gerados depois de realizada a fatoração completa das matrizes Jacobianas de fluxo de carga dos sistemas: IEEE118-barras, Norte-Nordeste de 274 barras, sistemas brasileiros de 2256 e 3515 barras.

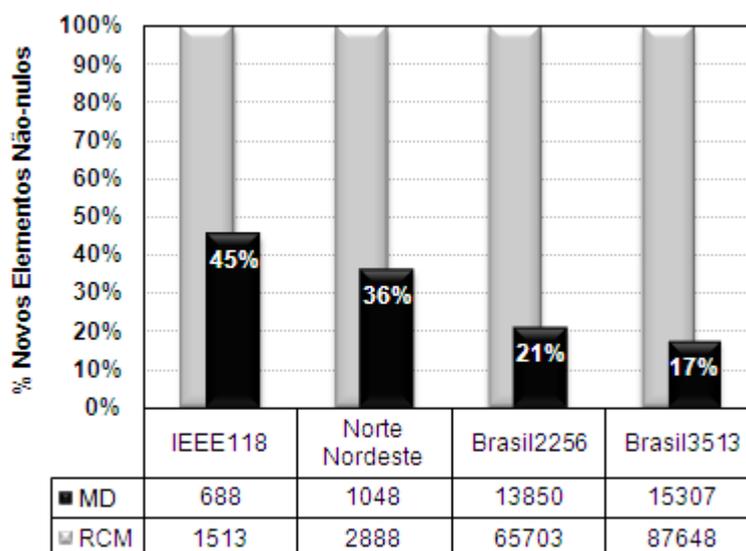


Figura 2.17 – Número e porcentagem de novos elementos não-nulos - RCM e MD.

Para entender os gráficos de barras da Figura 2.17 assume-se que os novos elementos não-nulos encontrados, quando usado o reordenamento RCM representam sempre 100%. Os valores mostrados nas barras pretas representam a porcentagem de novos elementos não-nulos encontrados quando usado o reordenamento MD, em relação aos encontrados quando usado RCM. Na Figura 2.17 apresenta-se também o número de novos elementos não-nulos gerados para cada matriz Jacobiana dos sistemas-teste. Observa-se que cada

vez que aumenta a dimensão dos sistemas elétricos, a eficiência do método MD aumenta, reduzindo significativamente o número de novos elementos não-nulos. Para o sistema brasileiro de 3.513 barras, enquanto que o método RCM gerou 87.648 novos elementos não-nulos, o MD gerou apenas 15.307, representando 17% do valor encontrado pelo RCM, 83% menos elementos que o RCM.

O número de elementos não-nulos pode não ser uma característica importante para os métodos iterativos não pré-condicionados, já que estes métodos não realizam fatorações LU. Porém, é relevante quando consideradas as estratégias de pré-condicionamento baseadas em fatoração triangular incompleta (ILU). Na Figura 2.18, assume-se que as larguras de banda máximas encontradas, quando usado o reordenamento MD representam sempre 100%, portanto, os valores mostrados nas barras cinza representam a percentagem de largura de banda máxima encontrada quando usado o reordenamento RCM, em relação aos encontrados quando usado MD.

Na Figura 2.18 é informada a largura de banda máxima para cada matriz Jacobiana dos sistemas-teste. Observa-se que o método RCM reduz significativamente a largura de banda, por exemplo, 89% menos largura de banda que quando ordenada pelo MD, para o caso do sistema brasileiro de 3.513 barras.

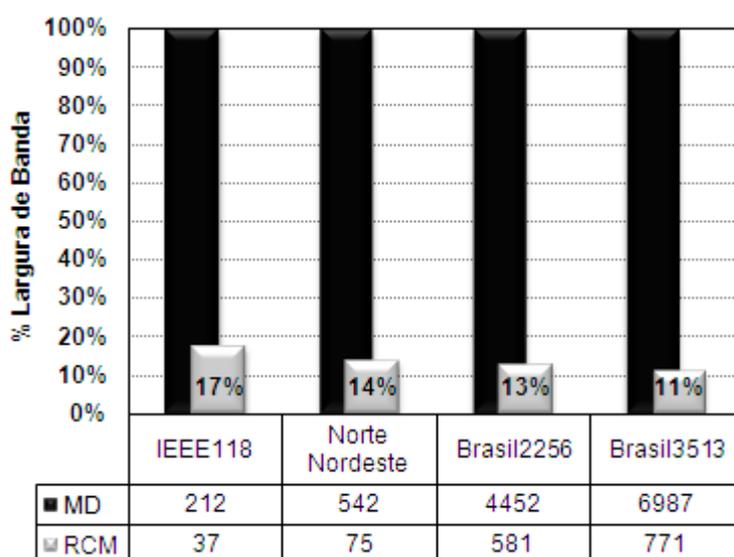


Figura 2.18 – Largura de banda - RCM e MD.

Segundo a literatura, tanto a redução da largura de banda como do número de novos elementos não-nulos podem ser vantajosos ou não, quando usadas em

métodos iterativos pré-condicionados (Benzi et al., 2000; Axelsson, 1994; Benzi et al., 1999a; Benzi et al., 1999b; Benzi & Tuma, 2000; Brand, 1992; D'Azevedo et al., 1992; Doi & Washio, 1999; Duff & Koster, 1999; Duff & Koster, 2001; Duff & Meurant, 1989; Dutto, 1993; Le Borne, 2000; Zhang, 2001). Uma pode ser mais relevante que a outra dependendo das características da matriz de coeficientes associada ao problema que está sendo solucionado. Nas Figuras 2.20 e 2.21 apresentam-se as estruturas de típicas matrizes Jacobiana reordenadas por MD e RCM, tanto para sistemas elétricos de pequeno porte como também para sistemas de maior porte.

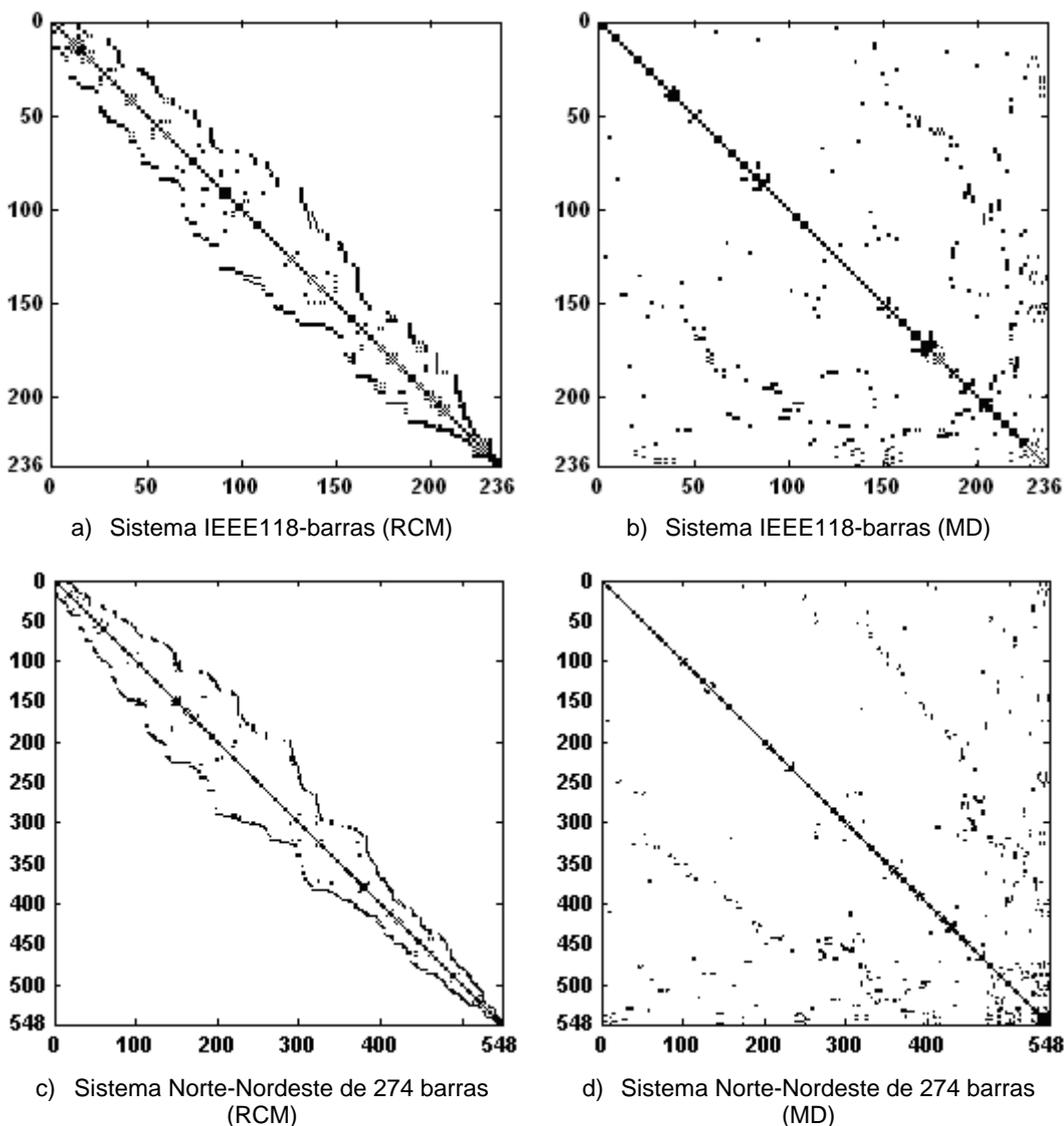


Figura 2.19 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas reordenadas de sistemas elétricos de pequeno porte.

Com o objetivo de mostrar que o reordenamento não produz nenhum benefício no desempenho dos métodos iterativos quando não são usadas as estratégias

de pré-condicionamento (GMRES puro), são apresentadas a seguir simulações considerando-se os reordenamentos MD e RCM. Outras simulações, considerando-se simultaneamente as estratégias de reordenamento e pré-condicionamento, são apresentadas nos próximos capítulos.

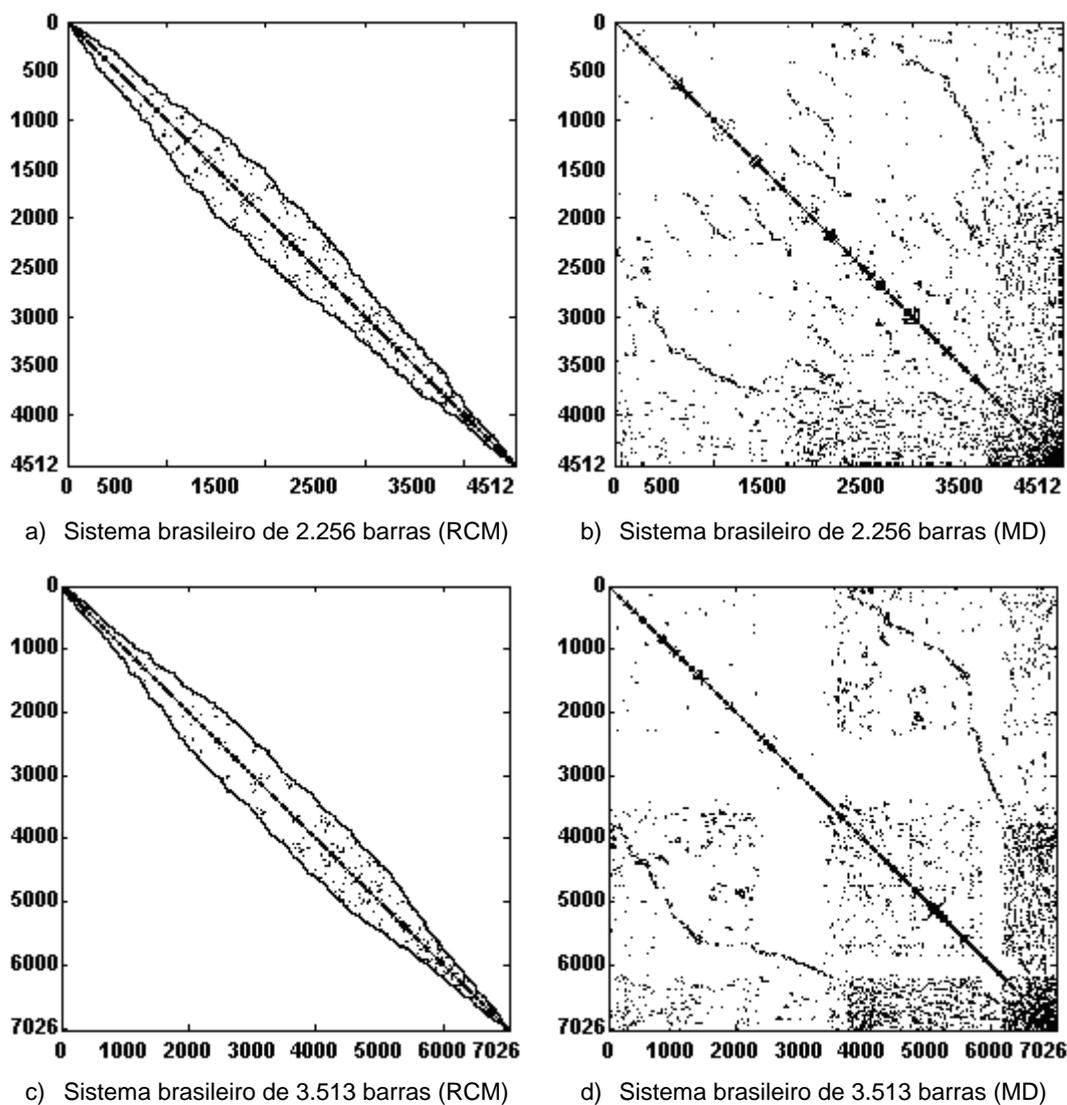


Figura 2.20 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas reordenadas de sistemas elétricos de maior porte.

### 2.7.2

#### Avaliação do Desempenho do Método GMRES Puro Usando Reordenamento da Matriz de Coeficientes

São apresentados experimentos numéricos para avaliar o desempenho do método GMRES quando usadas estratégias de reordenamento sem pré-condicionamento. Os testes envolvem simulações para resolver os sistemas

lineares de fluxo de carga associados com as matrizes Jacobianas da primeira iteração Newton-Raphson, apresentadas na seção 2.2, dos sistemas hipotéticos do IEEE e o sistema Norte-Nordeste Brasileiro. As simulações foram realizadas para dois cenários de carga: caso base e ponto próximo do máximo carregamento (PMC), correspondendo a um sistema linear para cada cenário, resultando em dois sistemas lineares para cada sistema elétrico.

O objetivo principal é verificar qual a influência das estratégias de reordenamento MD e RCM sobre o desempenho do método GMRES puro (sem pré-condicionamento). Para tal, verifica-se a eficiência computacional e a robustez sem reordenamento (S.R.), com o MD e o RCM. Na Tabela 2.6 apresentam-se o número de operações de ponto flutuante em MFLOPS resultantes da simulação computacional de ambos os casos (base e PMC) referentes a cada técnica de reordenamento. No teste de convergência do método GMRES considera-se que tanto a tolerância absoluta como a relativa são iguais a  $10^{-5}$ .

Observa-se que o reordenamento pode aumentar como também reduzir o número de operações de ponto flutuante realizadas pelo método GMRES. No entanto, em todos os casos a eficiência computacional é similar quer utilize-se reordenamento ou não. Portanto, pode-se concluir que a estratégia de reordenamento não produziu nenhum tipo de benefício no solucionador em termos de eficiência computacional com o GMRES não pré-condicionado.

Na Figura 2.21 apresentam-se os valores de taxa de convergência do método GMRES na primeira iteração Newton-Raphson, quando não utilizado reordenamento (barra branca), quando usado reordenamento RCM (barra cinza) e quando usado reordenamento MD (barra preta), para cada sistema elétrico no caso base.

Observa-se que para todos os sistemas a partir do IEEE-118 barras, os valores das taxas de convergência, com ou sem reordenamento, são similares. Portanto, o reordenamento não produziu nenhum tipo de benefício na convergência do GMRES puro.

Tabela 2.6 – Número de operações de ponto flutuante para o método GMRES (MFLOPS).

Sistema	Cenário	GMRES Sem Reordenamento	GMRES Com MD	GMRES Com RCM
IEEE30-barras	C. Base	0,5846	0,3990	0,4872
	PMC	1,0801	1,3105	1,2811
IEEE118-barras	C. Base	134,4423	125,234	108,984
	PMC	193,1021	152,553	184,324
IEEE145-barras	C. Base	51,1462	59,0819	50,0736
	PMC	55,6415	61,7359	53,8167
IEEE162-barras	C. Base	24,3895	23,8688	24,0204
	PMC	41,0450	31,3902	31,6158
IEEE300-barras	C. Base	624,7670	602,8944	687,7626
	PMC	635,0290	781,5147	700,4683
Norte-Nordeste de 274 barras	C. Base	457,1362	451,7398	468,1108
	PMC	472,7717	620,6830	598,8441

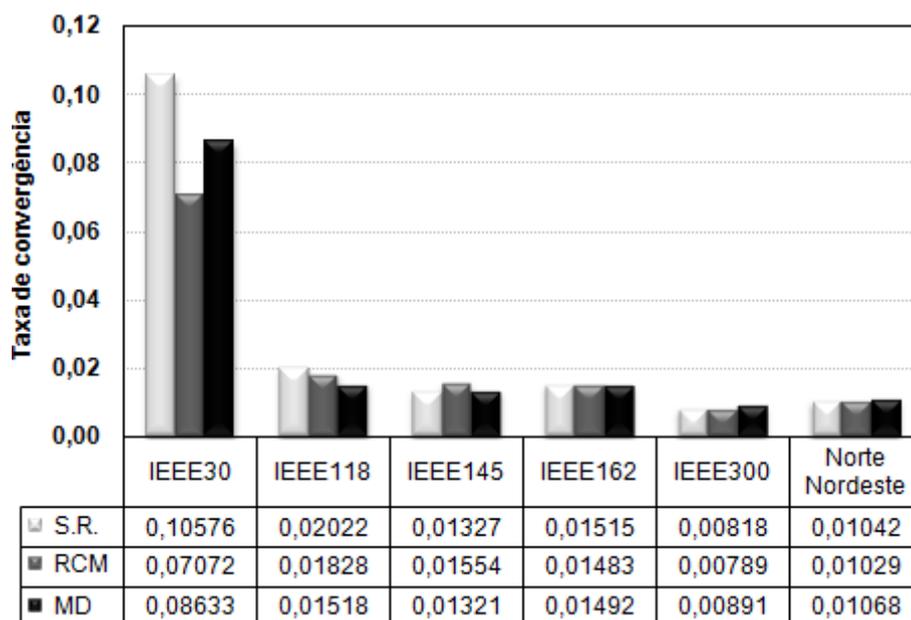


Figura 2.21 – Taxa de convergência do método GMRES no CASO BASE.

Na Figura 2.23 apresentam-se os valores de taxa de convergência do método GMRES, quando não utilizado reordenamento (barra branca), quando usado reordenamento RCM (barra cinza) e quando usado reordenamento MD (barra preta), para cada sistema elétrico no ponto PMC. De forma similar ao caso base,

observa-se que para todos os sistemas os valores das taxas de convergência, com ou sem reordenamento, são similares. Portanto, o reordenamento não produziu nenhum tipo de benefício na convergência do GMRES puro. Ambas as estratégias estudadas e avaliadas neste capítulo mostraram-se ineficazes quando usadas para melhorar o desempenho do método GMRES. No caso da estratégia de reinicialização, o desempenho do método GMRES aumenta, mas os resultados continuam sendo muito inferiores aos conseguidos pelo método direto. A estratégia de reordenamento, quando não usada junto a alguma estratégia de pré-condicionamento, não resulta em nenhum tipo de benefício ao solucionador em termos de eficiência computacional.

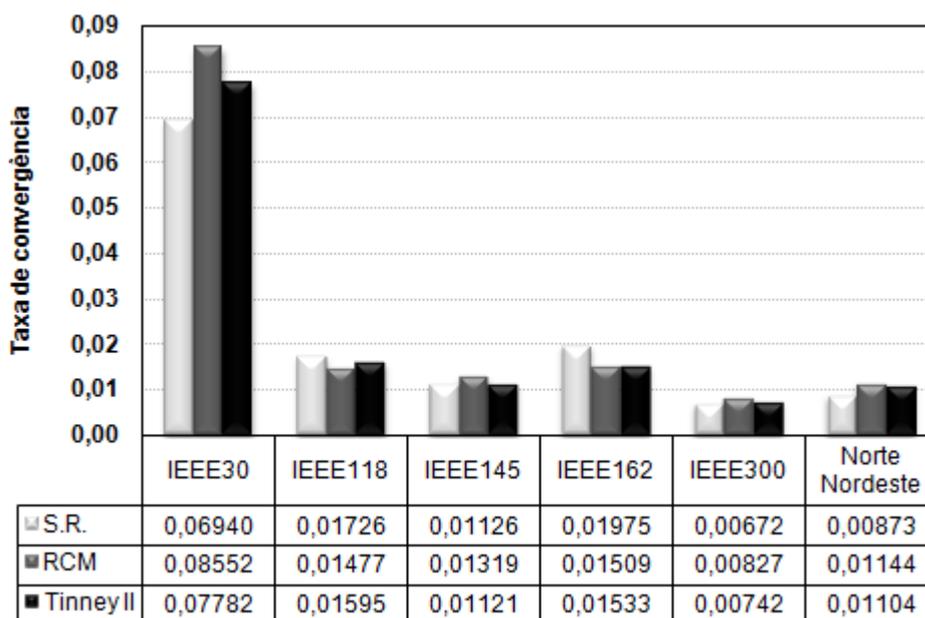


Figura 2.22 – Taxa de convergência do método GMRES no ponto PMC.

As dificuldades associadas com o baixo desempenho do método GMRES, quando comparado com os métodos diretos, ainda estão presentes. No entanto, neste trabalho propõe-se o uso eficiente da estratégia de pré-condicionamento, várias vezes mencionada em alguns pontos importantes deste capítulo. O pré-condicionamento visa melhorar significativamente o desempenho do método GMRES, talvez superando os resultados conseguidos pelos métodos diretos em termos de eficiência computacional e principalmente de robustez, solucionando sistemas lineares associados ao subproblema linear de fluxo de carga, principalmente quando a matriz for mal-condicionada, o que normalmente está associado a um cenário de condição adversa de operação. Portanto, considera-se que a estratégia de pré-condicionamento é importante para o solucionador iterativo que é proposto aqui, devido a:

- A estratégia de pré-condicionamento explora tanto características estruturais como também as propriedades espectrais da matriz Jacobiana de fluxo de carga, melhorando o desempenho do solucionador. O benefício em termos de eficiência computacional é devido ao fato do pré-condicionador aproveitar a esparsidade e simetria estrutural das matrizes do problema. O benefício em termos de robustez ocorre porque o pré-condicionador permite solucionar sistemas lineares com matrizes indefinidas (que apresentam autovalores tanto com parte real negativa como também positiva), típicas nos sistemas de maior porte, como o Sistema Interligado Nacional (SIN). Este tipo de sistema pode representar cenários de difícil convergência para um método iterativo (Benzi, 2002; Chen, 2005).
- A função principal da estratégia de pré-condicionamento é substituir o sistema linear a ser solucionado por outro equivalente, cuja matriz de coeficientes apresente menor número de condicionamento e autovalores mais afastados da origem do plano complexo. Dado que a matriz do problema de interesse, dependendo da sua dimensão e das condições de operação pode estar mal-condicionada e próxima da singularidade, como visto em exemplos anteriores, o pré-condicionamento é uma estratégia para ser considerada no solucionador iterativo.
- O sistema equivalente conseguido pelo pré-condicionador permite construir subespaços de Krylov cuja aproximação da solução está muito próxima da solução exata. Conseqüentemente, o método GMRES precisa realizar poucas iterações (muitas vezes apenas uma) até satisfazer o teste de convergência. Uma convergência rápida (em poucas iterações) ameniza a dificuldade associada com a solução do problema de mínimos quadrados do algoritmo do GMRES, melhorando a sua eficiência computacional e tornando desnecessária a estratégia de reinicialização.
- O pré-condicionamento permite aproveitar a estratégia de reordenamento da matriz Jacobiana. Os benefícios ou vantagens das estratégias de reordenamento sobre a convergência dos métodos de subespaço Krylov só podem ser observados quando usadas as técnicas de pré-condicionamento. O reordenamento permite melhorar a qualidade do pré-condicionador e reduz o tempo gasto necessário para sua construção. O pré-condicionador construído após o reordenamento da matriz de coeficientes gera subespaços

de Krylov mais próximos da solução exata que quando não usado o reordenamento, conseguindo atingir a convergência em um menor número de iterações (Benzi & Tuma, 2000). Portanto, a influência do reordenamento na convergência do método iterativo se dá de forma indireta, através do pré-condicionador.

No próximo capítulo estudam-se os conceitos associados às principais técnicas de pré-condicionamento, apresentando-se suas vantagens, desvantagens e como são utilizados dentro do algoritmo do método GMRES. Simulações de fluxo de carga são realizadas para avaliar os principais pré-condicionadores, comparando-se o desempenho do método GMRES com pré-condicionamento, GMRES puro e o GMRES(m) com reinicialização.