



Carlos Enrique Portugal Poma

**Um Solucionador Iterativo Para Sistemas-Lineares:
Aplicação no Problema do Fluxo de Carga**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador : Prof. Ricardo B. Prada

Co-orientador : Prof. José Eduardo Onoda Pessanha

Rio de Janeiro, Agosto de 2010



Carlos Enrique Portugal Poma

Um Solucionador Iterativo Para Sistemas-Lineares: Aplicação no Problema do Fluxo de Carga

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Bernardo Prada

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

Prof. José Eduardo Onoda Pessanha

Co-orientador

UFMA

Prof. Delberis Araujo Lima

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

Prof. Flávio Rodrigo de Miranda Alves

CEPEL

Prof. Alexandre Pinto Alves da Silva

UFRJ

Prof. Alvaro Gayoso de Azeredo Coutinho

UFRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico

Rio de Janeiro, 05 de agosto de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Enrique Portugal Poma

Graduou-se em Engenharia Elétrica na Universidade Nacional de Engenharia de Lima (UNI, Peru) em 2003. Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Maranhão (UFMA, Brasil) em 2005.

Ficha Catalográfica

Poma, Carlos Enrique Portugal

Um solucionador iterativo para sistemas-lineares: aplicação no problema do fluxo de carga / Carlos Enrique Portugal Poma ; orientador: Ricardo B. Prada ; co-orientador: José Eduardo Onoda Pessanha. – 2010. 265 f. : il. (color.) ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2010.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Fluxo de carga. 3. Pré-condicionador. 4. Métodos de subespaço Krylov. 5. Reordenamento. 6. Regra de preenchimento. I. Prada, Ricardo B. II. Pessanha, José Eduardo Onoda. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

Dedico este trabalho:
aos meus amados pais, Bertha e Enrique
à minhas maravilhosas irmãs Anita e Lourdes
à minha tia Aurorita e minha sobrinha Kiara.

Agradecimentos

A Deus e à virgem Maria pela proteção e companhia ao longo da minha vida.

Ao professor Dr. Ricardo Bernardo Prada pela confiança, orientação e apoio, especialmente nos momentos mais cruciais do doutorado.

Ao professor Dr. José Eduardo Onoda Pessanha pelo incentivo e confiança ao longo destes anos, especialmente pela sua importante e atuante orientação como especialista e conhecedor do tema de pesquisa.

Sou profundamente grato aos meus pais Bertha Poma Rodriguez e Enrique Portugal Gonzáles pelo amor, apoio, motivação e confiança constante.

A minhas irmãs Lourdes e Anita e à minha tia Aurorita pelo carinho e motivação.

À CAPES, FAPEMA e à PUC-Rio, pelos auxílios financeiros concedidos.

Ao CEPEL e ao Dr. Jorge Luiz de Araújo Jardim pelas licenças dos programas computacionais ANAREDE e ORGANON, respectivamente, usados exclusivamente para fins de pesquisa.

Aos professores da comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do departamento pelos ensinamentos e ajuda.

Agradeço especialmente ao professor Vicente Leonardo Paucar Casas pela oportunidade proporcionada para iniciar meus estudos no Brasil. Aos professores Osvaldo Ronald Saavedra Méndez e Maria da Guia da Silva pelo incentivo e apoio.

A meus amigos Carlos Cesar e Eduardo pelas valiosas contribuições na escrita correta do português.

A todos os meus amigos pelo apoio e companhia ao longo destes anos.

Resumo

Portugal, Carlos; Prada, Ricardo B.; Pessanha, J.; **Um Solucionador Iterativo Para Sistemas-Lineares: Aplicação no Problema do Fluxo de Carga**. Rio de Janeiro, 2010. 265p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho desenvolve um solucionador iterativo baseado no método Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) para solucionar o subproblema linear do problema de fluxo de carga, com destaque para cenários de difícil convergência. O solucionador agrega uma estratégia de reordenamento para minimização do número total de novos elementos não-nulos e um pré-condicionador baseado no algoritmo de Doolittle, com regra de preenchimento de elementos não-nulos baseada no erro resultante. O solucionador foi implementado em um programa computacional de fluxo de carga, a fim de se verificar sua robustez e eficiência em diversos sistemas-teste e diferentes condições de operação. Também é proposto um método para o ajuste dos parâmetros dos solucionadores iterativos, que permite identificar intervalos de valores permissíveis para cada um dos parâmetros, identificando os mais adequados, visando garantir a robustez e melhorar o desempenho do solucionador.

Palavras-chave

Fluxo de Carga; pré-condicionador; métodos de subespaço Krylov; reordenamento; regra de preenchimento.

Abstract

Portugal, Carlos; Prada, Ricardo B. (Advisor); Pessanha, J. (Co-advisor); **An Iterative Solver for Linear-Systems: Application in Load Flow Problem.** Rio de Janeiro, 2010. 265p. D.Sc. Thesis — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work develops an iterative solver based on Generalized Minimal Residual method (GMRES) to solve the load flow linear subproblem, especially in scenarios of difficult convergence. The solver combines a reordering strategy to minimise the total number of fill-in terms and a preconditioning strategy based on the Doolittle algorithm with a fill-in dropping strategy based on the resulting error. The solver was implemented into a computational load flow program in order to verify its robustness and efficiency in several test-systems and different operating conditions. It is also proposed a method for adjusting the iterative solver parameters, the method is able to identify intervals of permissible values for each parameter, identifying the most appropriate in order to ensure the robustness and improve the solver performance.

Keywords

Load flow; preconditioner; Krylov subspace methods; reordering; dropping rule.

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Motivação da Pesquisa	21
1.2	Métodos Iterativos em Problemas de Sistemas Elétricos: Breve Histórico	22
1.3	Relevância e Estrutura do Trabalho	25
2	Solução de Equações Lineares Associadas ao Problema de Fluxo de Carga Enfatizando Métodos Iterativos	28
2.1	Introdução	28
2.2	O Subproblema Linear de Fluxo de Carga	30
2.2.1	Características Estruturais da Matriz Jacobiana	31
2.2.2	Propriedades Espectrais da Matriz Jacobiana de Fluxo de Carga	34
2.3	Métodos Iterativos do Subespaço de Krylov	40
2.4	A Escolha do Método Iterativo	43
2.4.1	Características dos Principais Métodos Iterativos	44
2.4.2	Vantagens e Desvantagens dos Principais Métodos Iterativos	46
2.4.3	Avaliação do Desempenho dos Principais Métodos Iterativos Sem Estratégias	50
2.5	O Método do Resíduo Mínimo Generalizado – GMRES	55
2.5.1	Exemplo Ilustrativo do GMRES (Sem Estratégias)	60
2.6	Estratégia de Reinicialização Para O Método GMRES	62
2.6.1	Exemplo Ilustrativo – GMRES(m) Reinicializado	63
2.7	Estratégias de Reordenamento da Matriz Jacobiana	65
2.7.1	Características Principais das Técnicas de Reordenamento MD e RCM	68
2.7.2	Avaliação do Desempenho do Método GMRES Puro Usando Reordenamento da Matriz de Coeficientes	71

3	Estratégias de Pré-condicionamento	77
3.1	Introdução	77
3.2	O Pré-condicionador	77
3.2.1	Formas de Pré-condicionamento	79
3.2.2	Efeitos do Pré-condicionamento no Subespaço de Krylov do Método GMRES	80
3.2.3	Efeitos da Estratégia de Pré-condicionamento nas Propriedades Espectrais da Matriz Jacobiana	82
3.3	Pré-condicionadores de Fatoração Incompleta	85
3.3.1	Regras de Preenchimento em Pré-condicionadores de Fatoração Incompleta	87
3.3.2	Pré-condicionador ILU(0)	89
3.3.3	Pré-condicionador ILU(k)	92
3.3.4	Pré-condicionador ILUT(τ, ρ)	95
3.3.5	Avaliação da Regra com Parâmetro Limitante - ILUT(τ, ρ)	96
3.3.6	O Erro Gerado	99
3.4	Pré-condicionadores Aplicados a Problemas de Sistemas Elétricos de Potência	103
3.4.1	Características dos Principais Pré-condicionadores	104
3.4.2	Vantagens e Desvantagens dos Principais Pré-condicionadores	109
3.5	Avaliação do Desempenho do Método GMRES	114
3.6	Reordenamento da Matriz Jacobiana	117
3.7	Ocorrência de Interrupções ou Problemas de Estabilidade Numérica nos Pré-condicionadores	121
3.7.1	Elementos Nulos ou Muito Pequenos na Diagonal da Jacobiana	122
3.8	Evolução do Desempenho do GMRES	128
4	Solucionador Iterativo Proposto	132
4.1	Introdução	132
4.2	O Estado da Arte dos Solucionadores de Sistemas Lineares	132
4.2.1	Solucionadores Diretos	133

4.2.2	Solucionadores Iterativos Aplicados em Problemas de Sistemas de Energia Elétrica	136
4.3	Solucionador Iterativo Para Fluxo de Carga	138
4.4	Regra de Preenchimento Baseada no Cálculo do Erro Associado ao Elemento Descartado	140
4.5	Adequação da Regra Baseada no Erro	145
4.6	Pré-condicionador ILU(ξ), Baseado no Cálculo do Erro	147
4.7	Método Convencional Para Ajuste dos Parâmetros dos Solucionadores	151
4.8	Método Proposto Para Ajuste dos Parâmetros dos Solucionadores	152
4.8.1	Passos Fundamentais	153
4.8.2	Estabelecimento do Espaço de Busca	154
4.8.3	Experimentos Numéricos	155
4.8.4	Delimitação das Tolerâncias do GMRES	157
4.8.5	Delimitação dos Parâmetros do Pré-condicionador	158
5	Avaliação do Solucionador Proposto	160
5.1	Introdução	160
5.2	Avaliação do Desempenho do Solucionador no Problema de Fluxo de Carga	161
5.2.1	Ajuste dos Parâmetros do Solucionador Proposto	161
5.2.2	Ajuste dos parâmetros do solucionador GMRES+ ILUT(τ, ρ)+MD	167
5.2.3	Desempenho em Termos de Eficiência Computacional	175
5.2.4	Desempenho dos Pré-condicionadores	176
5.2.5	Desempenho em Termos de Robustez	179
5.3	Avaliação do Desempenho do Solucionador em Análise de Contingências: Múltiplos Cenários Diferentes	183
5.4	Comentários Finais	185
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	187
6.1	Conclusões	187
6.2	Trabalhos futuros	192

7	Referências Bibliográficas	194
	Apêndice I Taxa de Convergência do Método Iterativo	205
	Apêndice II Minimizando a Norma Euclidiana do Resíduo no GMRES (Demonstração)	207
	Apêndice III Algoritmos Numéricos	212
	Apêndice IV Estratégias de Reordenamento	216
	Apêndice V Parâmetros Usados nos Experimentos Numéricos	219
	Apêndice VI Pré-condicionadores de Aproximação Esparsa da Matriz Inversa	220
	Anexo VII Dados dos Sistemas Elétricos	227

Lista de Figuras

Figura 2.1 –Estruturas típicas de matrizes Jacobianas de sistemas hipotéticos.	32
Figura 2.2 –Estruturas típicas de matrizes Jacobianas de sistemas hipotético e reais.	33
Figura 2.3 –Autovalores da matriz Jacobiana de sistemas de pequeno porte, no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).	37
Figura 2.4 –Autovalores da matriz Jacobiana de sistemas de maiores dimensões no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).	38
Figura 2.5 –Número de condicionamento para o caso base e para o ponto próximo do máximo carregamento (PMC).	39
Figura 2.6 –Representação geométrica do subespaço de Krylov pelos seus vetores base	41
Figura 2.7 –Método do subespaço de Krylov usando a condição da norma mínima do erro.	41
Figura 2.8 –Taxa de convergência dos métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR no CASO BASE.	53
Figura 2.9 –Taxa de convergência dos métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR no PMC.	54
Figura 2.10 –Ortonormalização do Subespaço de Krylov.	57
Figura 2.11 –Fluxograma do método iterativo GMRES.	58
Figura 2.12 –Processo de aproximação à solução x^* .	59
Figura 2.13 –Desempenho computacional do método GMRES.	61
Figura 2.14 –Desempenho computacional do método direto.	61

Figura 2.15 – Simulações para busca do tamanho ótimo do subespaço de Krylov.	63
Figura 2.16 – Desempenho computacional do método GMRES(m).	64
Figura 2.17 – Número e percentagem de novos elementos não-nulos RCM e MD.	68
Figura 2.18 – Largura de banda - RCM e MD.	69
Figura 2.19 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas reordenadas de sistemas elétricos de pequeno porte.	70
Figura 2.20 – Estruturas típicas de matrizes Jacobianas reordenadas de sistemas elétricos de maior porte.	71
Figura 2.21 – Taxa de convergência do método GMRES no CASO BASE.	73
Figura 2.22 – Taxa de convergência do método GMRES no ponto PMC.	74
Figura 3.1 – Subespaços de Krylov, suas soluções aproximadas e erros para cada iteração do GMRES, com e sem estratégia de pré-condicionamento.	82
Figura 3.2 – Autovalores da matriz Jacobiana pré-condicionada (azul) e não pré-condicionada (vermelho) de sistemas lineares de pequeno porte, no caso base e no ponto mais próximo do máximo carregamento (PMC).	84
Figura 3.3 – Número de condicionamento para o caso próximo do máximo carregamento (PMC)	85
Figura 3.4 – Passo i da fatoração do tipo IKJ.	87
Figura 3.5 – Fatoração incompleta ILU(0) para uma matriz banda de pequeno porte.	90
Figura 3.6 – Fatoração incompleta ILU(0) para a matriz Jacobiana do sistema brasileiro de 3.513 barras.	91
Figura 3.7 – Sistema teste de 5 barras.	97

Figura 3.8 – Padrão de cor dos fatores triangulares e de sua correspondente matriz de erros	101
Figura 3.9 – Desempenho computacional do método GMRES com pré-condicionamentos de fatoração incompleta e de aproximação da inversa.	116
Figura 3.10 – Taxa de convergência do método GMRES para as quatro configurações dos solucionadores iterativos no CASO BASE, na primeira iteração Newton-Raphson.	120
Figura 3.11 – Taxa de convergência do método GMRES para as quatro configurações dos solucionadores iterativos no PMC, na primeira iteração Newton-Raphson.	121
Figura 3.12 – Potências reativas nas barras do sistema elétrico associadas às posições na diagonal de L.	124
Figura 3.13 – Potência reativa necessária para conseguir zeros na diagonal da matriz L, para os sistemas IEEE30-barras, IEEE118-barras, IEEE145-barras e IEEE162-barras.	126
Figura 3.14 – Potência reativa necessária para conseguir zeros na diagonal da matriz L, para os sistemas IEEE300-barras, Norte-Nordeste e configurações do sistema brasileiro de 2.256 e 3.513 barras.	127
Figura 3.15 – Evolução das melhorias conseguidas no desempenho do GMRES, comparação com o solucionado Direto	128
Figura 4.1 – Fluxograma do Solucionador Iterativo para o problema de fluxo de carga	139
Figura 4.2 – Erros produzidos pela regra de preenchimento com o pré-condicionador ILU(0), para a matriz Jacobiana do sistema brasileiro de 3513 barras.	141
Figura 4.3 – Elementos necessários para calcular o erro associado ao elemento L_{ik} .	145
Figura 4.4 – Elementos necessários para calcular o erro associado ao elemento U_{ki} .	145

Figura 4.5 – Algoritmo do pré-condicionador ILU(ξ).	149
Figura 4.6 – Elementos necessários para calcular os elementos L_{ik} e U_{ki} durante a fatoração triangular.	149
Figura 4.7 – Procedimento de tentativa e erro para busca de valores de um parâmetro do pré-condicionador.	152
Figura 4.8 – Passos fundamentais para delimitação dos parâmetros do solucionador.	154
Figura 4.9 – Espaço de busca dos parâmetros do solucionador.	155
Figura 4.10 – Gráficos de eficiência em função dos parâmetros do pré-condicionador	156
Figura 4.11 – Gráficos de alta eficiência em função das tolerâncias do GMRES	157
Figura 4.12 – Regiões de alta eficiência em função das tolerâncias do GMRES	158
Figura 4.13 – Escolha dos valores ($atol_{\acute{o}ti}$, $rtol_{\acute{o}ti}$) para as tolerâncias absoluta e relativa do GMRES	158
Figura 4.14 – Regiões de eficiência em função dos parâmetros do pré-condicionador	159
Figura 5.1 – Gráficos de alta eficiência em função das tolerâncias do GMRES para o solucionador proposto.	163
Figura 5.2 – Gráficos de eficiência em função do parâmetro ξ do pré-condicionador ILU(ξ).	166
Figura 5.3 – Gráficos de alta eficiência em função das tolerâncias do GMRES para o solucionador GMRES+ILUT(τ , ρ)+MD.	169
Figura 5.4 – Gráficos de eficiência em função dos parâmetros ρ e τ do pré-condicionador ILUT(τ , ρ)	172
Figura 5.5 – Gráficos de eficiência em função dos parâmetros ξ e τ do pré-condicionador ILUT(ξ , τ)	174

Figura 5.6 – Número de operações e tempo de CPU dos solucionadores iterativos e direto	176
Figura 5.7 – Número de operações do GMRES e do Pré-condicionador	177
Figura 5.8 – Percentagem de elementos descartados e preenchidos nos pré-condicionadores	179
Figura 5.9 – Comparação do condicionamento das matrizes Jacobianas em cada iteração Newton-Raphson, para três cenários de carga	181
Figura 5.10 – Espectro da matriz Jacobiana sem pré-condicionamento	183
Figura 5.11 – Espectro da matriz Jacobiana pré-condicionada	183
Figura 5.12 – Número de operações de ponto flutuante realizados pelos solucionador proposto e o solucionador direto em cada contingência	184
Figura 5.13 – Número de operações de ponto flutuante realizados pelos Solucionador d e pelo GMRES+ILUT(τ, ρ)+MD em cada contingência	185

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Dados numéricos de matrizes Jacobianas de sistemas elétricos de potência.	34
Tabela 2.2 – Propriedades espectrais de típicas matrizes Jacobianas de sistemas elétricos de potência.	38
Tabela 2.3 – Principais características dos métodos iterativos.	44
Tabela 2.4 – Principais vantagens e desvantagens dos métodos iterativos, quando usados para solucionar o subproblema linear de fluxo de carga.	48
Tabela 2.5 – Número de operações de ponto flutuante para os métodos BICG, FOM, GMRES, BICGSTAB e TFQMR (MFLOPS).	51
Tabela 2.6 – Número de operações de ponto flutuante para o método GMRES (MFLOPS).	73
Tabela 3.1 – Propriedades espectrais das matrizes Jacobianas Pré-condicionadas e Não Pré-condicionadas.	85
Tabela 3.2 – reenchimento de elementos usando a regra com parâmetro limitante τ	98
Tabela 3.3 – Número de operações realizadas na simulação de fluxo de carga no sistema-teste de 5 barras	99
Tabela 3.4 – Erro produzido depois de que o elemento L_{ik} é descartado e número de operações de ponto flutuante realizadas por etapas	102
Tabela 3.5 – Principais características dos pré-condicionadores propostos na área de sistemas de potência	105

Tabela 3.6 – Principais vantagens e desvantagens dos pré-condicionadores aplicados a problemas de sistemas de sistemas de potência.	111
Tabela 3.7 – Comparação de desempenhos entre o GMRES com pré-condicionador $ILUT(\tau, \rho)$ e com $ILUT(\tau)$	117
Tabela 3.8 – Número de operações de ponto flutuante para as 4 configurações em (MFLOPS), comparação de desempenho com o solucionador direto MA28.	119
Tabela 3.9 – Dados estatísticos dos elementos da diagonal principal das matrizes Jacobianas de típicos sistemas lineares de fluxo de carga.	122
Tabela 4.1 – Características básicas dos solucionadores diretos mais usados	134
Tabela 4.2 – Características dos solucionadores iterativos usados em aplicações de fluxo de carga	137
Tabela 4.3 – Parâmetros usados nos solucionadores	153
Tabela 4.4 – Domínios dos parâmetros usados nos solucionadores	155
Tabela 5.1 – Domínios dos parâmetros usados nos solucionadores	162
Tabela 5.2 – Menor número de operações possíveis realizadas pelo solucionador proposto	164
Tabela 5.3 – Faixas de valores recomendáveis para as tolerâncias do método GMRES	165
Tabela 5.4 – Valores recomendáveis para o parâmetro ξ	167
Tabela 5.5 – Domínios dos parâmetros usados nos solucionadores	168
Tabela 5.6 – Menor número de operações possíveis realizadas pelo solucionador $GMRES+ILUT(\tau, \rho)+MD$	170
Tabela 5.7 – Faixas de valores recomendáveis para as tolerâncias do método GMRES	171

Tabela 5.8 – Valores recomendáveis para os parâmetros do pré-condicionador ILUT(τ, ρ)	173
Tabela 5.9 – Informações sobre o número de preenchidos ou descartados nos fatores triangulares L e U	178
Tabela 5.10– Tempo CPU da simulação de fluxo de carga para o sistema IEEE118-barras	181
Tabela 5.11– Número de condicionamento do sistema pré-condicionado e não pré-condicionado	182
Tabela 5.12– Tempo de CPU total gasto na solução de todas as contingências	185
Tabela A.1 – Parâmetros para os pré-condicionadores sem reordenamento, usados nas simulações de fluxo de carga	219
Tabela A.1 – Parâmetros para os pré-condicionadores com reordenamento, usados nas simulações de fluxo de Carga	219

Lista de Abreviaturas e Siglas

AINV	Pré-condicionador de aproximação da matriz inversa
BiCG	Gradiente bi-conjugado
BiCGSTAB	Gradiente bi-conjugado estabilizado
BLAS	Sub programas básicos de algebra linear
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CG	Gradiente conjugado
CGS	Gradiente conjugado quadrado
CPU	Unidade central de processamento
CSR	Compressão esparsa por linha
EDAs	Equações diferenciais e algébricas
EDOs	Equações diferenciais ordinárias
FastD	Pré-condicionador de aproximação da matriz Jacobiana pela matriz desacoplado rápido
FOM	Método de Ortogonalização Completa
FPDS	Fluxo de Potência de Dinâmica Sintética
GMRES	Método do resíduo mínimo generalizado
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
ILU(k)	Pré-condicionador de fatoração incompleta baseado no nível de preenchimento
ILU(ξ)	Pré-condicionador de fatoração incompleta com regra de preenchimento baseada no erro.
ILUT(τ)	Pré-condicionador de fatoração incompleta com parâmetro limitante
ILUT(τ, ρ)	Pré-condicionador de fatoração incompleta com duplo parâmetro limitante
JFNG	Pré-condicionador Newton-GMRES livre de Jacobiana
MD	Reordenamento mínimo grau
MFLOPs	Número de operações de ponto flutuante
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PAEI	Pré-condicionadores de aproximação esparsa da matriz inversa
PMD	Pré-condicionadores de matriz descomposta
QMR	Método iterativo do resíduo quase-mínimo
RCM	Reordenamento Cuthill-McKee invertido
SPAI	Pré-condicionador de aproximação esparsa da matriz inversa
TFQMR	Método iterativo do resíduo quase-mínimo com livre de transpostas