7
Conclusão

O Problema do Subespaço Invariante se resume a seguinte pergunta:

Todo operador tem subespaço invariante não-trivial?

Nesta dissertação procuramos fazer um levantamento sobre esta questão e apresentar um exemplo do espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial (caso tal operador exista).

O primeiro capítulo é introdutório, onde explicamos a motivação deste trabalho e estabelecemos as noções essenciais a serem utilizadas no restante do material.

No Capítulo 2 destacamos diversos teoremas tidos como clássicos na literatura referente ao problema em questão. Primeiramente, voltamos nossa atenção para a classe dos operadores compactos, depois enunciamos os contra-exemplos de Enflo [13] e Read [34] para espaços de Banach. Além disso, verificamos que o operador

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em $\mathbb{R}^2$ não tem subespaço invariante não-trivial e, através da técnica de span da órbita, o problema também tem solução positiva para espaços não-separáveis. Em outras palavras, o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Por fim, utilizando o Teorema Espectral, verificamos que todos operadores normais e quasinormais têm subespaço invariante não-trivial, e exibimos o importante resultado de S. Brown [7] para operadores subnormais (subnormais também tem subespaço invariante não-trivial).

Continuamos nossa investigação com o Teorema de Lomonosov, tema do Capítulo 3, onde analisamos suas duas versões, isto é, as provas de Hilden e de Lomonosov, respectivamente, e enfatizamos o porquê de sua importância. Nos dois capítulos seguintes (isto é, Capítulos 4 e 5), consideramos a formulação de problemas equivalentes ao nosso. Destacamos três reformulações, incluindo a técnica de Rota [39] (Capítulo 4). Rota mostra que a parte do adjunto de um shift unilateral reverso canônico é um modelo universal.

Ao final do Capítulo 2, vimos que o Problema do Subespaço Invariante ainda não tem uma solução para o caso particular de operadores hiponormais. No entanto, da desigualdade de Putnam, e do resultado sobre o espectro de operadores hiponormais de S. Brown [6] verificamos que, se existe um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial, então seu espectro é bastante 'patológico', conforme visto na Seção 6.2. Assim encerramos essa dissertação construindo um espectro de um operador hiponormal que se enquadre no caso em questão. Em outras palavras, determinamos um conjunto que não satisfaz a desigualdade de Putnam e nem as hipóteses do resultado de S. Brown.

A contribuição desta dissertação encontra-se, além do levantamento sobre o Problema do Subespaço Invariante, em construir um espectro de um operador hiponormal que satisfaça às propriedades discutidas acima.