6
O Espectro de um Operador Hiponormal

Começamos esta dissertação abordando os principais resultados relacionados ao Problema do Subespaço Invariante. Após uma vasta exposição sobre os teoremas que marcaram este assunto, concluimos que nosso problema continua aberto apenas para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Daí, consideramos classes de operadores contidas neste espaço e procuramos investigar o que poderíamos afirmar sobre as mesmas. Verificamos que todos operadores normais, quasinormais e subnormais (todos definidos em espaços de Hilbert complexo separáveis de dimensão infinita) têm subespaços invariantes não-triviais. Entretanto, ainda não existe uma solução para o caso hiponormal (e, portanto, para o caso normalóide). Isto é, o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para a classe dos hiponormais (não se sabe se todo operador hiponormal definido em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial).

Depois, discutimos problemas equivalentes. Chamamos a atenção de que são inúmeras as questões deste tipo, de maneira que algumas delas, inclusive, geraram seus próprios ramos de pesquisa, como o caso da Álgebra Transitiva. Selecionamos três reformulações que nos pareceram interessantes sob determinado aspecto.

Apesar de tudo isso, a pergunta "todo operador tem subespaço invariante não-trivial?"continua em aberto. O que mais podemos acrescentar? Podemos dirigir a nossa atenção para uma classe de operadores. Por exemplo, para a classe dos hiponormais (que contém as classes dos normais, quasinormais e subnormais, onde o problema já foi resolvido). A Desigualdade de Putnam e o Teorema de S. Brown [6] sobre o espectro de operadores hiponormais determinaram que um operador desta classe sem subespaço invariante não-trivial tem espectro mais do que patológico. Motivados por estas descobertas, diversas pesquisas foram direcionadas nesse sentido, onde procurou-se listar as propriedades desses espectros, e construir um conjunto que satisfizesse todas elas, para assim verificar se existe algum operador cujo espectro satisfizesse a esse conjunto de propriedades.

O parágrafo anterior é um resumo do que vamos fazer agora. Primeiro vamos estabelecer quais as características do espectro de um operador hiponormal, depois vamos construir um conjunto que se enquadra na patologia acima (i.e., que pudesse ser o espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial), expondo como seria sua representação geométrica no plano complexo.

6.1 Propriedades do Espectro de um Operador Hiponormal

Ao final do primeiro capítulo, deixamos claro que a teoria se encontra no seguinte patamar:

Todo operador hiponormal em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial?

(lembre que $\mathcal{H}$ denota um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita).

Mesmo sem uma solução definitiva, o teorema de S. Brown [6] e um corolário da Desigualdade de Putnam estabelecem que a pergunta anterior tem resposta afirmativa para "quase todo"operador hiponormal. Portanto, uma investigação mais profunda sobre o espectro desta classe pode trazer avanços acerca dessa questão.

Antes de analisarmos as propriedades do espectro dos hiponormais, vale ressaltar dois resultados mais gerais que relacionam este conjunto com o Problema do Subespaço Invariante. O Teorema da Decomposição de Riesz estabelece que *se existem σ_1, σ_2 subconjuntos fechados não-vazios de $\sigma(T)$, tal que $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(T)$ para $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, então T admite subespaço invariante não-trivial.* Apesar de importante, nosso interesse não reside própriamente no Teorema da Decomposição de Riesz, e sim em uma consequência direta do mesmo. Por ser muito técnica e longa, optamos por omitir sua demonstração.

Teorema 6.1 *(Teorema da Decomposição de Riesz) Sejam T é um operador em um espaço de Banach complexo $\mathcal{H}$, e $\sigma(T)$ seu espectro. Se σ_1 e σ_2 são conjuntos fechados não-vazios disjuntos em $\mathbb{C}$, tal que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, então T tem um par de subespaços invariantes não-trivias complementares, digamos $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, com $\sigma(T|_{\mathcal{M}_1}) = \sigma_1$ e $\sigma(T|_{\mathcal{M}_2}) = \sigma_2$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 507.) □

Note que os conjuntos σ_1 e σ_2, anteriormente definidos, formam uma partição não-trivial do espectro. Logo, neste caso $\sigma(T)$ é desconexo e, assim,

$\sigma(T)$ ser conexo é uma condição necessária para T não ter subespaço invariante não-trivial. Portanto, o Teorema da Decomposição de Riesz nos permite determinar um propriedade topológica do espectro.

Corolário 6.1 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então $\sigma(T)$ é conexo.*

Demonstração: De fato, seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador arbitrário e considere $\sigma(T)$ seu espectro. Suponha que $\sigma(T)$ é desconexo, segue que existem subconjuntos fechados de $\sigma(T)$, digamos σ_1 e σ_2, tal que

i) $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma$;

ii) $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$;

iii) $\sigma_1 \neq \emptyset$ e $\sigma_2 \neq \emptyset$;

Daí, pelo Teorema da Decomposição de Riesz, T tem subespaço invariante não-trivial. Portanto, se $\sigma(T)$ é desconexo, então T tem subespaço invariante não-trivial. Equivalentemente, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então $\sigma(T)$ é conexo. $\square$

Considere $\mathcal{X}$ um espaço topológico e x_0, x_1 dois elementos arbitrários de $\mathcal{X}$. Um caminho de x_0 para x_1 em $\mathcal{X}$ é uma função contínua,

$$\delta : [0, 1] \to \mathcal{X},$$

tal que $\delta(0) = x_0$ e $\delta(1) = x_1$. Um espaço $\mathcal{X}$ é localmente conexo, se existe um caminho δ de x_0 para x_1, para todo par (x_0, x_1) em $\mathcal{X}$. Pode-se facilmente verificar que todo conexo por caminhos é conexo (ver, e.g., [14] p. 90). Portanto, o corolário anterior nos permite ter uma interpretação geométrica sobre o espectro de um operador sem subespaço invariante não-trivial. Isto é, se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então para quaisquer pares de pontos em $\sigma(T)$, existe um caminho que "não sai da figura"de $\sigma(T)$.

Ainda sem precisarmos de hipóteses adicionais, no que se refere a classe de operadores, podemos mostrar que o espectro de um operador é apenas espectro contínuo, se ele não admite subespaço invariante não-trivial. Caso contrário, o operador ou seu adjunto teriam autovalor, pois autoespaços são sempre subespaços invariantes não-triviais para operadores não escalares.

Proposição 6.1 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então $\sigma(T) = \sigma_C(T)$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 78.) Considere um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ sem subespaço invariante não-trivial. Suponha que T seja um operador escalar, isto é, $T = \alpha I$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Daí, se $\mathcal{M}$ é um subespaço não-trivial em $\mathcal{H}$, segue que $\mathcal{M}$ é invariante para T, contradição (lembre que T não tem subespaço invariante não-trivial por hipótese). Logo, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então T é um operador não-escalar.

Note que $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ (o auto-espaço de T) é um subespaço invariante para T. Como T não admite subespaço invariante não-trivial, então $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$ ou $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{H}$. Se T é não escalar, então $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \mathcal{H}$. Assim, $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$, e, portanto, T não possui autovalor. Equivalentemente, se T é não-escalar, então $\sigma_P(T) = \emptyset$.

Por outro lado, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então T^* não tem subespaço invariante não-trivial (lembre que o complemento ortogonal de um subespaço invariante para T é um subespaço invariante para T^*). Como T^* é não-escalar (pois T é não-escalar), segue que $\mathcal{N}(\lambda I - T^*) = \{0\}$ ou $\mathcal{N}(\lambda I - T^*) = \mathcal{H}$. Pelo mesmos argumentos utilizados para o caso onde T é não-escalar, podemos concluir que T^* não possui autovalor. Equivalentemente, se T^* é não-escalar, então $\sigma_P(T^*) = \emptyset$.

Portanto, como $\sigma_C(T) = \sigma(T) \backslash (\sigma_P(T) \cup \sigma_P(T^*)^*)$ (ver, e.g., [18] p. 77), segue que $\sigma(T) = \sigma_C(T)$. $\square$

Por outro lado, o que "ganhamos"se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ for hiponormal? Dito de maneira semelhante, quais são as propriedades algébricas, geométricas, topológicas ou analíticas de um espectro de um operador hiponormal que não tem subespaço invariante não-trivial?

O teorema de Berger-Shaw relaciona um operador hiponormal com a área de seu espectro. Um caso particular deste teorema (i.e., a Desigualdade de Putnam) aliada ao resultado de S. Brown [6] (sobre o interior do espectro de um operador hiponormal) estabelecem que a classe de operadores que não satisfazem estas duas hipóteses têm um espectro bastante patológico, justificando assim seu destaque.

Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ arbitrário e considere $\mathrm{Rat}(\sigma(T))$ a álgebra de funções racionais definidas em $\sigma(T)$. Dizemos que T é multicíclico finito, se existe um número finito de vetores $y_1, y_2, ..., y_m \in \mathcal{H}$, chamados vetores geradores, tal que

$$\mathcal{H} = \{f(T)y_j : 1 \leq j \leq m \text{ e } f \in \mathrm{Rat}(\sigma(T)), \text{ com pólos fora de } \sigma(T)\}^{-}.$$

Se m é finito e é o menor número de vetores geradores, então dizemos que T é m-multicíclico. Note que o conceito de vetor $x \in \mathcal{H}$ cíclico para T apresentado no Capítulo 1, é um caso particular da definição acima, onde f é um polinômio, logo racional.

Um conjunto é ortonormal, se para todo par de elementos $\{x, y\}$ neste conjunto temos que $x \perp y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Se $B \subseteq \mathcal{H}$ é ortonormal e $\bigvee B = \mathcal{H}$, dizemos que B é uma base ortonormal em $\mathcal{H}$. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é classe traço, se

$$\sum_{y \in \Gamma} \langle |T|\, e_y ; e_y \rangle < \infty,$$

para alguma base ortonormal $\{e_y\}_{y\in\gamma}$, onde $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Nesse caso, dizemos que $\sum_{y\in\gamma} \langle |T|\, e_y ; e_y \rangle$ é o traço de T (que não depende da base ortogonal em questão), denota-se $\mathrm{tr}(T)$.

Os mesmos motivos que nos levaram a omitir a demonstração do Teorema da Decomposição de Riesz se repetem para a prova do Teorema de Berger-Shaw.

Teorema 6.2 *(Teorema de Berger-Shaw) Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador m-multicíclico hiponormal, então $[T^*, T]$ (isto é, $[T^*, T] = T^*T - TT^*$ é o auto-comutador de T) é um operador classe traço e, além disso, tr$[T^*, T] \leq m\pi^{-1}$ área$(\sigma(T))$.*

Demonstração: (Ver, e.g., [9] p. 152.) □

Corolário 6.2 *(Desigualdade de Putnam) Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador hiponormal, então $\|[T^*, T]\| \leq \pi^{-1}$área $\sigma(T)$.*

Demonstração: (Ver, e.g., [9] p. 156.) Sejam $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador hiponormal e y é um vetor fixo em $\mathcal{H}$ arbitrário, tal que $\|y\| \leq 1$. Considere $\mathcal{K} \equiv \bigvee\{r(T)y; r \in \mathrm{Rat}(\sigma(T))\}^{-}$, donde $S = T|_{\mathcal{H}}$ é hiponormal (ver, e.g., [20] pg. 502). Daí,

$$\langle [T^*, T]y, y \rangle = \|Ty\|^2 - \|T^*y\|^2 \leq \|Sy\|^2 - \|S^*y\|^2 = \langle [S^*, S]y, y \rangle \,.$$

Além disso, tem-se que

$$\langle [S^*, S]y, y \rangle \leq \left\| [S^*, S]^{1/2} \right\|^2 \|y\|^2 \leq \|[S^*, S]\| \leq \mathrm{tr}[S^*, S].$$

Por outro lado, note que S é 1-multiciclico e hipornormal, donde pelo Teorema de Berger-Shaw, $\mathrm{tr}[T^*, T] \leq \pi^{-1}$ área$(\sigma(T))$, e, assim,

$$\|[T^*, T]\| \leq \|[S^*, S]\| \leq \pi^{-1} \text{ área}(\sigma(S)) \leq \pi^{-1} \text{ área } (\sigma(T)).$$

Portanto, se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é hiponormal, então $\|[T^*, T]\| \leq \pi^{-1}$área $\sigma(T)$. □

Corolário 6.3 *Todo operador hiponormal cujo espectro tem área nula tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador hiponormal arbitrário, então $\|T^*T - TT^*\| \leq \pi^{-1}$área $\sigma(T)$ (pela Desigualdade de Putnam). Se o espectro de T tem área nula, segue que

$$0 \leq \|T^*T - TT^*\| \leq 0 \Rightarrow T^*T - TT^* = 0 \Rightarrow T^*T = TT^*,$$

isto é, T é normal. Logo, T tem subespaço invariante não-trivial. Como $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é qualquer, vale para todo operador T em $\mathcal{H}$ cujo espectro tem área nula. Portanto, todo operador hiponormal cujo espectro tem área nula tem subespaço invariante não-trivial. □

S. Brown [6] mostrou que *um operador hiponormal $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial se a álgebra de todas as funções contínuas com valores complexos $C(\sigma(T))$ é diferente de $(Rat(\sigma(T)))^-$.* Como todo operador hiponormal cujo espectro tem interior vazio satisfaz essa condição, então *todo operador hiponormal cujo espectro tem interior não-vazio tem subespaço invariante não-trivial.* A seguir enunciamos o resultado de S. Brown, no entanto, não demonstramos o mesmo, pois sua prova requer uma bagagem teórica maior do que a necessária para esta dissertação.

Teorema 6.3 *Todo operador hipornormal cujo espectro tem interior não-vazio tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: (Ver, e.g., [6].) □

Daí, podemos reescrever nossa pergunta inicial da seguinte maneira: "existe algum operador hiponormal cujo espectro seja apenas espectro contínuo, conexo, com área não-nula e interior vazio?"

Dedicamos o restante dessa dissertação para exibir um espectro com as propriedades acima.

6.2 A Figura de um Espectro

Suponha que existe um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial. Neste caso, o espectro deste operador seria apenas espectro contínuo, com área não-nula (medida planar de Lebesgue), interior vazio e conexo. Assim, procura-se estabelecer, a partir das características do espectro de um hiponormal, uma solução para a seguinte pergunta: será que todo operador hiponormal tem subespaço invariante não-trivial? Com o objetivo de tentar responder essa questão, diversas outras propriedades foram determinadas. Dentre elas, duas propriedades envolvendo a geometria do espectro no plano complexo merecem destaque.

Proposição 6.2 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador hiponormal e $\sigma(T) \subseteq \Gamma$, onde Γ é um círculo unitário no plano complexo, então T tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 506.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador hiponormal e considere $\sigma(T) \subseteq \Gamma$, onde Γ é um círculo unitário no plano complexo. Se T é hiponormal, em particular, T é normalóide, donde

$$\|T\| = r(T) = 1,$$

isto é, T é uma contração. Por outro lado, se $\sigma(T) \subseteq \Gamma$, segue que $0 \in \rho(T)$, e, assim, $T \in \mathcal{G}[\mathcal{H}]$. Ora, se $T \in \mathcal{G}[\mathcal{H}]$ é hiponormal, então T^{-1} é hiponormal (ver, e.g, [20] p. 498). Além disso, se $T \in \mathcal{G}[\mathcal{H}]$, então $\sigma(T)^{-1} = \sigma(T^{-1}) = \Gamma$ (ver, e.g., [20] p. 459). Portanto, $\|T^{-1}\| = 1$, isto é, T^{-1} é uma contração. Ora, sabe-se que se $T \in \mathcal{G}[\mathcal{H}]$ é hiponormal, tal que T e T^{-1} são contrações, então T é normal (ver, e.g., [20] p. 499). Em outras palavras, T tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

Lema 6.1 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador hiponormal, então αT e $(I - T)$ são hiponormais, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador hiponormal. Segue que,

$$(\alpha T)^*(\alpha T) = (\bar{\alpha}T^*)(\alpha T) = |\alpha|^2 (T^*T) \leq |\alpha|^2 (TT^*) = (\alpha T)(\alpha T)^*,$$

para $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrário. Logo αT é um operador hiponormal para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Por outro lado,

$$(I-T)^*(I-T) = I^2-T^*I-IT-T^*T \leq I^2-IT^*-IT+TT^* = (I-T)(I-T)^*.$$

Portanto, $(I-T)$ é hiponormal. $\square$

Proposição 6.3 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador hiponormal e $\sigma(T) \subseteq \mathcal{R}$, então T tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 507.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador hiponormal, tal que $\sigma(T) \subseteq \mathcal{R}$. Note que todo operador auto-adjunto (i.e., $T^* = T$) é normal. De fato, se T é auto-adjunto, então $D = T^*T - TT^* = TT - TT = 0$ (lembre que T é normal se, e somente se, $D = 0$). Daí, se T é auto-adjunto, então T tem subespaço invariante não-trivial. Portanto, para mostrarmos que um operador hiponormal com $\sigma(T) \subseteq \mathcal{R}$ tem subespaço invariante não-trivial, basta provarmos que ele é auto-adjunto.

Tome $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário, segue que $\alpha i \in \rho(T)$. Além disso, como a translação pela identidade e a multiplicação por um escalar de um operador hiponormal é um operador hiponormal (Lema 6.1), então $(\alpha i I - T)$ é um operador hiponormal em $\mathcal{H}$. Por outro lado, sabe-se que se T é um operador hiponormal e $\lambda \in \rho(T)$, então $\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \sup_{\mu \in \sigma(T)} |\lambda - \mu|^{-1}$ (ver, e.g., [20] p. 502). Daí,

$$\alpha \left\|(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x\right\|^2 \leq \alpha^2 \left\|x\right\|^2 + \left\|Tx\right\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle \alpha i x; Tx\rangle.$$

Assim $2\alpha \mathrm{Im}\langle Tx; x\rangle \leq \left\|Tx\right\|^2$ e, portanto, $\mathrm{Im}\langle Tx; x\rangle = 0$. Equivalentemente, T é auto-adjunto, logo T tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

A próxima proposição resume as propriedades necessárias de um possível espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial (caso este operador exista).

Proposição 6.4 *Se existe T hiponormal em $\mathcal{H}$, tal que T não tem subespaço invariante não-trivial, então o espectro de T tem as seguintes propriedades:*

a) $\sigma(T)$ é conexo;

b) $\sigma(T)$ tem área (isto é, medida planar de Lebesgue) não-nula;

c) $\sigma(T)$ tem interior vazio;

d) $\sigma(T)$ não esta contido no disco unitário Γ do plano complexo;

e) $\sigma(T)$ não esta contido na reta $\mathbb{R}$;

Vamos então construir um exemplo de um possível espectro para o caso de existir um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial.

Exemplo 6.1 Suponha que exista um operador hiponormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) sem subespaço invariante não-trivial. Seja C um conjunto de Cantor na reta real, tal que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$. Note que para cada $n \geq 1$, C_n é obtido de C_{n-1} removendo 2^{n-1} subintervalos abertos centrais de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Apesar de possuir interior vazio (ver, e.g., [20] p. 191), é fácil verificar que o conjunto de Cantor "tradicional" tem medida planar de Lebesgue nula (logo, C não satisfaz as condições que procuramos). De fato,

$$\mu(C_n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{3^{i+1}}.$$

Como $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$, então

$$\mu(C) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 0.$$

Portanto vamos substituir o conjunto C por outro conjunto com características semelhantes.

a) Remova os subintervalos abertos centrais de comprimento $\frac{1}{4^n}$ de cada iteração 2^{n-1}, ao invés de remover subintervalos abertos centrais de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Considere então a coleção $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ resultante dos subconjuntos fechados do intervalo $S_0 = [0, 1]$. Segue que

$$\mu(S_n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{4^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}},$$

é o comprimento de S_n, para cada $n \geq 1$. Se $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$, então

$$\mu(S) = \frac{1}{2},$$

isto é, S tem área não-nula. Além disso, S tem interior vazio. A idéia da demonstração é a mesma daquela usada para provar que C não tem interior vazio. Isto é, tome um ponto $\gamma \in S$ e um $\epsilon > 0$ qualquer. Daí, pode-se verificar que existe um inteiro positivo n_ϵ, tal que a bola aberta $B_\epsilon(\gamma)$ não está incluida em S_{n_ϵ}. Portanto, a bola aberta $B_\epsilon(\gamma)$ não está incluida em S (lembre que cada S_n consite de 2^n intervalos com comprimento $\frac{1}{4^n}$). Em outras palavras, γ não é ponto interior de S. Apesar disso, S está contido na reta $\mathbb{R}$, e, portanto, não é um possível candidato ao espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial (supondo que tal operador exista).

b) Por outro lado, seja $f : [0, 2\pi] \to \Gamma$ (onde Γ denota o círculo unitário no plano complexo $\mathbb{C}$) um mapa dado por $f(\theta) = e^{2\pi i\theta} = cos(2\pi\theta) + isen(2\pi\theta)$, tal que $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que f é um homeomorfismo (isto é, uma função contínua com inversa, também, contínua) que leva um segmento de reta no círculo unitário. Em particular, a imagem de S sob f, denotada por $f(S)$, é um conjunto de pontos pertencentes ao círculo unitário no plano complexo $\mathbb{C}$. Além disso, $f(S)$ tem todas as propriedades topológicas de S (lembre que uma propriedade topológica entre dois espaços métricos, digamos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, é uma propriedade de $\mathcal{X}$ que é preservada sob um homeomorfismo em $\mathcal{Y}$) que nos interessam. Por exemplo, pode-se verificar facilmente que $f(S)$ não é conexo (basta notar que $f(S)$ não é localmente conexo).

c) Vamos então "construir"um conjunto conexo a partir de $f(S)$. Fixe $\theta \in S$ qualquer, e considere $\mathcal{D}_\theta = \{f(\theta) : tf(\theta), 0 \leq t \leq 1, \theta \in S\}$ o segmento de reta entre a origem e $f(\theta)$ inclusive (i.e., $\mathcal{D}_\theta$ é a reta que une a origem à $f(\theta)$). Note que para θ_1, $\theta_2 \in S$ arbitrários, tem-se que $\mathcal{D}_{\theta_1} \cup \mathcal{D}_{\theta_2}$ é conexo (pois existe uma função contínua entre $f(\theta_1)$ e $f(\theta_2)$). Ora, pode-se generalizar essa noção para todo $\theta \in S$. Seja então $\mathcal{D} = \bigcup_{\theta \in S} \mathcal{D}_\theta$ o conjunto de todas as combinações lineares convexas entre a origem e os pontos de $f(S)$ inclusive. Segue que $\mathcal{D}$ é localmente conexo (logo conexo) e não está contido no círculo unitário Γ. Portanto,$\mathcal{D}$ é um possível candidato a espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial (supondo que tal operador exista), e, assim, encerramos nosso exemplo.

Como S é não-contável(ver, e.g., [20] p. 190), então $f(S)$ também é não-contável (pois cardinalidade é uma propriedade topológica, veja, por exemplo [20] p. 109). Portanto, o único meio de representar geometricamente $\mathcal{D}$ é através de uma aproximação. Daí, considere

$$\mathbb{D}_n = \{f(\theta) : tf(\theta), 0 \leq t \leq 1, \text{ para cada } \theta \in S_n, \, S_n \in S\}$$

para cada $n \geq 0$. Isto é, $\mathbb{D}_n$ é o segmento de reta que une a origem à cada ponto de $f(S_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, tal que S_n é a n-ésima iteração de S. Donde,

$$\mathcal{D} = \bigcap_n \mathbb{D}_n.$$

Portanto, as figuras abaixo são as representações geométricas das iterações que aproximam $\mathcal{D}$, para $n = 0$, 1 e 2.

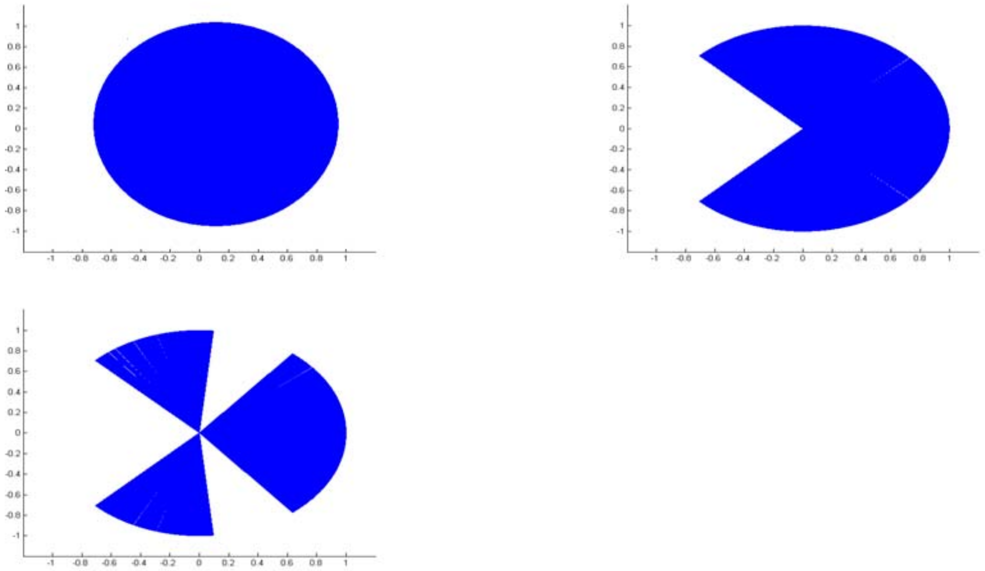

Figura 6.1: cantor iterações $n = 0$,1 e 2

A medida que aumentamos o número de iterações (i.e., aumentamos n) o desenho da aproximação do conjunto $\mathcal{D}$ passa a ficar semelhante. Em outras palavras, a partir da quinta iteração é dificil notar alguma diferença nas figuras. Para ilustrar isto, seguem abaixo as representações geométricas da aproximação de $\mathcal{D}$ para $n = 5$ e 15, respectivamente. Por outro lado, as duas figuras abaixo deixam claro como seria o desenho de $\mathcal{D}$ no plano complexo (i.e., uma série de "raios"ligando a origem aos pontos do círculo unitário).

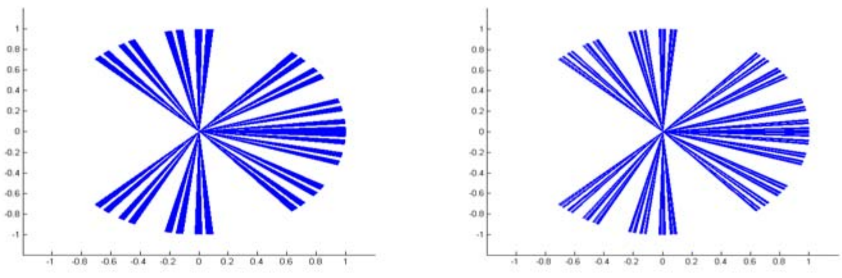

Figura 6.2: cantor iterações $n = 5$ e 15

Resumindo, o exemplo acima representa um possível espectro para um operador hiponormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) sem subespaço invariante não-trivial, supondo que tal operador exista. Em particular, esse espectro tem de satisfazer as seguintes propriedades: ser conexo; ter medida planar de Lebesgue não-nula; possuir interior vazio; não pode estar contido no disco unitário Γ do plano complexo; e não pode estar contido na reta $\mathbb{R}$. A idéia básica do exemplo anterior gira em torno do conjunto de Cantor. Uma das variações deste conjunto (que definimos por S) satisfaz diversas propriedades importantes, dentre elas ele possui interior vazio e possui área não-nula. Porém, S está contido na reta $\mathbb{R}$. Por outro lado, considere f um homeomorfismo que leva um segmento de reta no círculo unitário. A imagem de S sob f não está na reta (por construção) e tem interior vazio (lembre que interior vazio é preservado sob homeomorfismo). Além disso, o mapa f "enrola" S em torno do círculo unitário, então $f(S)$ (i.e., a imagem de f sob S) tem possivelmente medida planar de Lebesgue não-nula. No entanto, $f(S)$ não é conexo. Ora, uma maneira de "tornar" $f(S)$ conexo seria "traçar um raio"da origem a cada um dos pontos pertencentes a imagem de S sob f. Em outras palavras, o conjunto de todos os segmentos de reta entre a origem e cada $f(\theta) \in f(S)$ é conexo. Considere então $\mathcal{D}$ tal conjunto, donde $\mathcal{D}$ "parece"satisfazer quase todas propriedades listadas acima. Portanto, $\mathbb{D}$ é um possível candidato a espectro para um operador hipornormal sem subespaço invariante não-trivial (caso tal operador exista).

Finalmente, demonstramos que $\mathcal{D}$ é, de fato, um possível conjunto para nossos propósitos.

Proposição 6.5 *Considere a notação apresentada no exemplo anterior. O conjunto $\mathcal{D}$ é conexo, tem interior vazio, medida planar de Lebesgue não-nula, não está contido na reta e nem no círculo unitário* Γ.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, por construção temos que $\mathcal{D}$ é conexo por caminhos, logo conexo, $\mathcal{D}$ não está contido na reta e $\mathcal{D} \not\subset \Gamma$. Vamos mostrar que $\mathcal{D}$ tem interior vazio. Suponha por contradição que $\mathcal{D}$ não tem interior vazio, então existe um aberto $U \subset \mathcal{D}$. Daí, existe um intervalo aberto $\mathcal{I}$ em $\delta\mathcal{D}$, tal que $\mathcal{I}$ é a projeção de U sobre $\delta\mathcal{D}$, onde $\delta\mathcal{D}$ é o bordo de $\mathcal{D}$. Por outro lado, f é um homeomorfismo, logo f é um homeomorfismo. Donde, S tem interior vazio, então $\delta\mathcal{D}$ tem interior vazio, pois é propriedade topológica. Assim, não existe intervalo aberto em $\delta\mathcal{D}$, contradição. Portanto, não existe intervalo aberto $\mathcal{I}$ em $\delta\mathcal{D}$, e, assim, não existe aberto U em $\mathcal{D}$. Equivalentemente, $\mathcal{D}$ tem interior vazio. Agora, basta provar que $\mathcal{D}$ tem medida planar de Lebesgue não-nula. De fato, $\int_{r=0}^{1}\int_{\theta\in S} rf(\theta)d\theta dr = \int_{r=0}^{1}\pi r dr = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $\mathcal{D}$ é conexo, tem interior vazio, medida planar de Lebesgue não-nula, não está contido na reta e nem no círculo unitário. □

Note que a proposição acima não garante que $\mathcal{D}$ é apenas espectro contínuo, apesar da Proposição 6.1 estabelecer esta é uma propriedade necessária para qualquer operador não ter subespaço invariante não-trivial. De fato, estabelecer que $\mathcal{D}$ é apenas espectro contínuo para algum operador hiponormal $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ exige que se construa tal operador, o que está além do objetivo desta dissertação.