5
Problemas Equivalentes - Parte II

Agora, iremos continuar nossa investigação sobre Problemas Equivalentes ao Problema do Subespaço Invariante. Anteriormente, mencionamos três reformulações: a técnica de Rota para modelos universais [39]; a abordagem geométrica de Nordgren, Rosenthal e Radjavi [28]; e a teoria de Nagy-Foias para contrações [21]. Já abordamos a primeira destas formulações, isto é, a técnica de Rota para modelos universais. Neste capítulo, prosseguiremos enunciando e provando as demais questões.

5.1
Uma Abordagem Geométrica

Suponha que $\mathcal{H}$ possa ser decomposto como as somas diretas

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{L} = \mathcal{M} + \mathcal{N},$$

tal que $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ são subespaços de $\mathcal{H}$.

Daí, surge o seguinte problema: será que existem subespaços invariantes não-triviais $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, respectivamente, com $\mathcal{K}_0 + \mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}_0$?

Em [28], Nordgren, Radjavi e Rosenthal mostram o surpreendente resultado que a questão anterior, envolvendo Geometria de espaços de Hilbert, pode ser relacionada com o Problema do Subespaço Invariante. Equivalentemente, eles demonstram que dadas duas projeções arbitrárias $P : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ e $Q : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, então *existem subespaços $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, tais que $\{0\} \neq \mathcal{K}_0 + \mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}_0 \neq \mathcal{H}$ se, e somente se, existe um subespaço invariante não-trivial comum para P e Q.*

Teorema 5.1 *Seja $\mathcal{H}$ um subespaço de Hilbert separável de dimensão infinita. As afirmações abaixo são equivalentes:*

i) *Todo operador tem subespaço invariante não-trivial;*

ii) *Cada par de operadores idempotentes em $\mathcal{H}$ tem um subespaço invariante não-trivial em comum;*

iii) *Se* $\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{L} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$ *são duas decomposições de soma direta quaisquer para* $\mathcal{H}$ *então existem* $\mathcal{K}_0, \mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0$ *subespaços de* $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$*, respectivamente, tal que* $\{0\} \neq \mathcal{K}_0 + \mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}_0 \neq \mathcal{H}$*;*

Demonstração: (Ver, e.g., [28].) Suponha que todo operador tem subespaço invariante não-trivial (i.e., a afirmação (i) é verdadeira). Considere P e Q dois operadores idempotentes. Como todo operador tem subespaço invariante não-trivial, em particular, P tem subespaço invariante não-trivial, digamos δ. Agora, seja $\tau = \delta + \overline{(I-P)Q\delta}$, donde τ é subespaço em $\mathcal{H}$. Note que

$$P(\delta) = P(\delta) + P(\overline{(I-P)Q(\delta)}) = \delta + (P - P^2)\overline{Q(\delta)} = \delta,$$

pois P é idempotente e δ é P-invariante. Portanto, τ é P-invariante. Por outro lado, como $(I-P)Q(\delta) \subseteq \tau$, então $Q(\delta) \subseteq \tau$ (pois $PQ(\delta) \subseteq \delta$). Daí, basta mostrarmos que $Q(I-P)Q(\delta) \subseteq \tau$. De fato,

$$Q(I-P)Q\delta \subset \; Q^2\delta + QPQ\delta = Q\delta + QPQ\delta \subset Q\delta + Q\delta \subset \tau.$$

Portanto, τ é um subespaço invariante para P e para Q, respectivamente. Em outras palavras, (i) implica em (ii). Reciprocamente, suponha que cada par de operadores idempotentes em $\mathcal{H}$ tem um subespaço invariante não-trivial em comum. Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador arbitrário e considere o par de operadores idempotentes

$$P = \begin{pmatrix} T & T \\ I-T & I-T \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em $\mathcal{H}$, tal que δ é um subespaço invariante não-trivial em comum entre eles (para verificar que P é idempotente, veja, por exemplo, [28]). Se $\sigma_R(T) \neq \emptyset$, então $\mathcal{R}(\lambda I - T)^- \neq \mathcal{H}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ (por definição). Logo, T tem subespaço invariante não-trivial. Daí, suponha que $\sigma_R(T) = \emptyset$ (i.e., $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ é denso em $\mathcal{H}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$). Note que a álgebra gerada por I, P e Q contém todos os operadores das formas,

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I-T & 0 \end{pmatrix},$$

tal que cada T_i é um polinômio em T. Como δ é um subespaço invariante em comum para P e Q, então

$$\delta = Q(\delta) \oplus (I - Q)(\delta).$$

Se $Q(\delta) = \mathcal{H}$, segue que δ contém todos os vetores da forma $x \oplus (I - T)y$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, donde $\delta = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Analogamente, se $(I - Q)\delta = \mathcal{H}$, então δ contém todos os vetores da forma $Tx \oplus y$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, e $\delta = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Por outro lado, como δ é não-trivial, então $Q(\delta)$ e $(I - Q)(\delta)$ são subespaços próprios de $\mathcal{H}$. Portanto, $Q(\delta)$ e $(I - Q)(\delta)$ são subespaços invariantes para T, e como δ é não-trivial tem-se que pelo menos um desses dois subespaços é não-trivial. Em outras palavras, (ii) implica em (i). Por fim, a equivalência entre (ii) e (iii) segue direto das definições. □

Embora não possua o mesmo apelo de outros problemas equivalentes, como a técnica de Rota, essa reformulação pode ser útil. Como dois operadores idempotentes definidos em espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são similares (ver, e.g., [38]), então um possível contra-exemplo poderia vir fixando um deles e procurando outro que não tivesse subespaço invariante não-trivial em comum com o primeiro. Rosenthal [38] sugere investigar uma projeção ortogonal Q que não tenha subespaço invariante em comum com a projeção ortogonal P de um círculo em L^2 sobre $\mathbb{H}^2$.

5.2
A Teoria de Nagy-Foias para Contrações

Tome um operador arbitrário $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Pela definição de operador (limitado), temos que $\|A\| \leq \alpha$, tal que α é um escalar não-negativo em $\mathbb{R}$. Note que podemos definir uma contração T em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$, associado a A, da seguinte maneira,

$$T = \frac{A}{\alpha}.$$

De forma equivalente, $\alpha T = A$. Esta representação é vantajosa, pois a multiplicação por escalar não altera a coleção de subespaços invariantes de A, denotada por $Lat(A)$. Logo, podemos reescrever o Problema do Subespaço Invariante para contrações.

Proposição 5.1 *Todo operador tem subespaço invariante não-trivial se, e só se, toda contração tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: De fato, suponha que todo operador tem subespaço invariante não-trivial. Em particular uma contração é um operador, então tem subespaço invariante não-trivial. Reciprocamente, suponha que toda contração tem subespaço invariante não-trivial. Tome um operador arbitrário $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Daí,

$$T = \frac{A}{\alpha}$$

é uma contração, com $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar não-nulo qualquer. Como αT não altera $Lat(T)$, então $\alpha T = A$ tem subespaço invariante não-trivial (lembre que T tem subespaço invariante não-trivial por hipótese). Portanto, todo operador tem subespaço invariante não-trivial se, e só se, toda contração tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

Sz-Nagy e Foias [40] classificaram as contrações em 4 tipos. Cada uma delas leva em consideração um aspecto da convergência forte da própria contração ou do seu adjunto. Então, se mostrarmos que estas contrações tem subespaço invariante não-trivial, segue que poderíamos ter uma solução do Problema do Subespaço Invariante. Como o Problema do Subespaço Invariante continua em aberto, então tais questões ainda não foram resolvidas. No entanto, este parece ser um caminho promissor, principalmente para o caso hiponormal (ver, e.g., [23]).

Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ dois espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ entrelaça com um operador $L \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$, se existe $J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ não-nulo, tal que $JT = LJ$. Se $J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é tal que $\mathcal{N}(J) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(J)^- = K$, então J é quase-invertível. Dizemos que $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma transformação quase-afim de $L \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$, se existe $J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ quase-invertível tal que $JT = LJ$. Dois operadores $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são quase-similares, denota-se $T \sim L$, se existem $J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Z \in \mathcal{B}[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ quase-invertíveis, com $JT = TJ$ e $ZL = TZ$.

Dada uma contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ arbitrária, Sz-Nagy e Foias mostraram que podemos classificá-la em 4 tipos:

i) $T \in \mathcal{C}_{0,\cdot}$ se T é fortemente estável;

ii) $T \in \mathcal{C}_{\cdot,0}$ se T^* é fortemente estável;

iii) $T \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$ se T não é fortemente estável;

iv) $T \in \mathcal{C}_{\cdot,1}$ se T^* não é fortemente estável;

Até o final desta seção, denotaremos por A e A_* os limites fortes das sequências $\{T^{*n}T^n; n \geq 1\}$ e $\{T^nT^{*n}; n \geq 1\}$, respectivamente. A proposição a seguir é uma coletânea de resultados conhecidos.

Proposição 5.2 *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração, tal que*

$$T^{*n}T^n \xrightarrow{s} A.$$

O operador A tem as seguintes propriedades:

1) $0 \leq A \leq I$*;*

2) $T^*AT = A$*;*

3) $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{H} : T^n x \to 0$*, quando* $n \to \infty\}$*;*

4) $A^{\frac{1}{2}}T = VA^{\frac{1}{2}}$*, tal que* V *é uma isometria sobre* $\mathcal{R}(A)^-$*;*

5) Se $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$*, então* $A_*A^{\frac{1}{2}}V = TA_*A^{\frac{1}{2}}$*;*

Demonstração: (Ver, e.g., [21].) □

É fácil verificar que $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{H} : T^n x \to 0$ quando $n \to \infty\}$. Então $T \in \mathcal{C}_{0,\cdot}$ se, e somente se, $A = 0$, isto é, se, e somente se, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$. Além disso, $T \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$ é equivalente à $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Daí, podemos concluir que:

i) $T \in \mathcal{C}_{0,0} \Leftrightarrow A = A_* = 0$;

ii) $T \in \mathcal{C}_{0,1} \Leftrightarrow A = 0$ e $\mathcal{N}(A_*) = \{0\}$;

iii) $T \in \mathcal{C}_{1,0} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0\}$ e $A_* = 0$;

iv) $T \in \mathcal{C}_{1,1} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$;

O próximo resultado, garante que $\mathcal{C}_{1,1}$ é a classe de todas as contrações quase-similares a um operador unitário. Graças a este fato, chegamos a dois resultados relacionados ao Problema do Subespaço Invariante.

Teorema 5.2 *Toda contração $\mathcal{C}_{1,1}$ é quase-similar a um operador unitário.*

Demonstração: (Ver, e.g., [18] p. 70.) Considere $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração pertencente a classe $\mathcal{C}_{1,1}$. Pode-se mostrar que existe uma isometria $V : \mathcal{R}(A)^- \to \mathcal{R}(A)^-$, tal que

$$A^{\frac{1}{2}}T = VA^{\frac{1}{2}}.$$

(Ver, e.g., [18] p. 55.) Se T é da classe $\mathcal{C}_{1,1}$, então $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$.

Note que V é unitário. Com efeito, se $T \in \mathcal{C}_{1,1}$, então $\mathcal{N}(A_*) = \{0\}$. Como $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{H} : T^n x \to 0$, quando $n \to \infty\}$, segue que $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(A_*)$, e, portanto, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Por outro lado, $A^{\frac{1}{2}}V^* = T^*A^{\frac{1}{2}}$, tal que

$\mathcal{N}(A^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{N}(T^*) = \{0\}$. Daí, $\mathcal{N}(T^* A^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$, e, assim, $\mathcal{N}(V^*) = \{0\}$. Portanto, $\mathcal{N}(V^*)^\perp = \mathcal{R}(V)^- = \mathcal{H}$, isto é, V é uma isometria sobrejetiva. Em outras palavras, V é unitário.

Pela Proposição 5.2 tem-se que

$$A_* A^{\frac{1}{2}} V = T A_* A^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, como A e A_* são auto-adjuntos, então $\mathcal{R}(A)^- = \mathcal{R}(A_*)^- = \mathcal{H}$. Em outras palavras, A e A_* são quase-invertíveis.

Por outro lado, se $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$, então $\mathcal{N}(A_* A^{1/2}) = \mathcal{N}(A^{1/2} A_*) = \{0\}$, tal que $\mathcal{N}(A_* A^{1/2}) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(A_* A^{1/2}) = \mathcal{H}$. Portanto, $A_* A^{1/2}$ é quase-invertível. Conclusão: T é quase-similar ao operador unitário V. $\square$

Corolário 5.1 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração da classe $\mathcal{C}_{1,1}$, então T tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 71.) Com efeito, considere $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração $\mathcal{C}_{1,1}$. Segue que T é quase-similar a um operador unitário $V \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (pelo Teorema 5.2). Sabe-se que se dois operadores são quase-similares e um deles têm subespaço invariante não-trivial, então o outro também tem subespaço invariante não-trivial (ver, e.g., [18] p. 68). Daí, basta mostrar que V tem subespaço invariante não-trivial.

Se V é um operador escalar, isto é, $V = \gamma I$ para algum $\gamma \in \mathbb{C}$, com $|\gamma| = 1$. Então,

$$A^{\frac{1}{2}} T = V A^{\frac{1}{2}} = \gamma A^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = \gamma I,$$

donde, T é um operador escalar unitário. Portanto, neste caso, T tem subespaço invariante não-trivial. Por outro lado, suponha que V não é um operador não-escalar. Como operadores unitários não-escalares são normais não-escalares, então V tem subespaço invariante não-trivial. Logo, T tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

Corolário 5.2 *Se uma contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então $T \in \mathcal{C}_{0,0} \cup \mathcal{C}_{0,1} \cup \mathcal{C}_{1,0}$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 71.) Seja T uma contração sem subespaço invariante não-trivial em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço invariante para T, segue que $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ou $\mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$, pois caso contrário T tem subespaço invariante não-trivial (contradizendo, assim, a hipótese inicial). Analogamente, $\mathcal{N}(A_*)$ é subespaço invariante para T^*, donde $\mathcal{N}(A_*)^\perp$ é subespaço invariante para T. Logo, $\mathcal{N}(A_*) = \{0\}$ ou $\mathcal{N}(A_*) = \mathcal{H}$, caso contrário $\mathcal{N}(A_*)^\perp$ é subespaço invariante não-trivial para T (contradizendo a hipótese inicial). Então, temos 4 possibilidades: $\mathcal{N}(A_*)^\perp = \mathcal{N}(A) = \{0\}$; $\mathcal{N}(A_*)^\perp = \mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$; $\mathcal{N}(A_*)^\perp = \mathcal{H}$ e $\mathcal{N}(A) = \{0\}$; $\mathcal{N}(A_*)^\perp = \mathcal{H}$ e $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Se $\mathcal{N}(A_*)^\perp = \mathcal{N}(A) = 0$, então $T \in \mathcal{C}_{1,1}$, logo T tem subespaço invariante não-trivial (ver Corolário 5.1). Os outros três casos são equivalentes à $T \in \mathcal{C}_{0,0}$, $T \in \mathcal{C}_{0,1}$ e $T \in \mathcal{C}_{1,0}$, respectivamente. Portanto, se T é uma contração que não tem subespaço invariante não-trivial, então $T \in \mathcal{C}_{0,0} \cup \mathcal{C}_{0,1} \cup \mathcal{C}_{1,0}$. $\square$

Em outras palavras, provamos que um operador não ter subespaço invariante não-trivial é equivalente a existir uma contração T sem subespaço invariante não-trivial, tal que $T \in \mathcal{C}_{0,1}$ ou $T \in \mathcal{C}_{0,0}$ ou $T \in \mathcal{C}_{1,0}$. A priori essa conclusão não nos ajuda muito, o ideal seria restringir um pouco mais esse número de classes. Surge então a questão: "se uma contração não pertence a classe $\mathcal{C}_{0,0}$, então ela tem subespaço invariante não trivial?". Note que T tem subespaço invariante não-trivial se, e somente se, T^* tem subespaço invariante não-trivial (ver Proposição 1.6). Daí, a pergunta anterior pode ser reformulada como: toda contração "$\mathcal{C}_{1,\cdot}$ tem subespaço invariante não-trivial?". Dito de outra forma, uma contração não tem subespaço invariante não-trivial se ela pertence a classe $\mathcal{C}_{0,\cdot}$. Equivalentemente, "toda contração fortemente estável, isto é, com $A \neq 0$, tem subespaço invariante não-trivial?". Como pouco se sabe sobre estabilidade forte, foi levantada a possibilidade de que uma possível resposta poderia vir de uma terceira reformulação envolvendo o conceito de transformações quase-afins. No entanto, todas as questões (equivalentes) acima formuladas permanecem em aberto.

Lema 5.1 *Se uma contração T em $\mathcal{H}$ não tem subespaço invariante não-trivial e $A \neq 0$, então $\mathcal{R}(A)^- = \mathcal{H}$ e a isometria $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é unitária.*

Demonstração: (Ver, e.g., [21].) Seja T uma contração em $\mathcal{H}$. Suponha que T não tem subespaço invariante não-trivial e que $A \neq 0$. Daí, existe uma isometria $V : \mathcal{R}(A)^- \to \mathcal{R}(A)^-$, tal que

$$VA^{1/2} = A^{1/2}T.$$

Como $T^*AT = A$ (ver Proposição 5.2), segue que

$$T^*AT = A \Leftrightarrow T^*A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}T = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, V é uma isometria (isto é, $V^*V = I$), donde

$$A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}V^*VV^*VA^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, aplicando que $VA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}T$ na igualdade acima, temos que

$$T^*A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}T = A^{\frac{1}{2}}V^*VV^*VA^{\frac{1}{2}} = T^*A^{\frac{1}{2}}VV^*A^{\frac{1}{2}}T.$$

Equivalentemente, $T^*A^{\frac{1}{2}}(I - VV^*)A^{\frac{1}{2}}T = 0$. Então,

$$\left\|(I - VV^*)A^{\frac{1}{2}}Tx\right\|^2 = \left\langle T^*A^{\frac{1}{2}}(I - VV^*)A^{\frac{1}{2}}Tx; x\right\rangle = 0,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Logo,

$$(I - V^*V)A^{\frac{1}{2}}T = 0.$$

Ora, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então $(I - VV^*)A^{\frac{1}{2}} = 0$ (ver, e.g., [18] p. 18).

Por outro lado, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então $T \in \mathcal{C}_{0,0}$ ou $T \in \mathcal{C}_{0,1}$ ou $T \in \mathcal{C}_{1,0}$. Como $A \neq 0$, segue que $T \in \mathcal{C}_{1,0}$, e, assim, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Além disso, $0 \leq A \leq I$ (isto é, A é auto-adjunto), então $\mathcal{N}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{R}(A)^- = \mathcal{H}$ (ver, e.g., [20] p. 400). Daí, como $\mathcal{R}(A^{1/2})^- = \mathcal{R}(A)^- = \mathcal{H}$ (ver, e.g., [18] p. 55), segue que

$$(I - VV^*)A^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (I - V^*V) = 0,$$

isto é, $VV^* = I$. Portanto, V é uma isometria e uma coisometria de H em H (pois $\mathcal{R}(\mathcal{H})^- = \mathcal{H}$), equivalentemente, V é um operador unitário. $\square$

Teorema 5.3 *As afirmações abaixo são equivalentes:*

i) *Toda contração com $A \neq 0$ tem subespaço invariante não-trivial;*

ii) *Toda contração que é entrelaçada por uma contração $\mathcal{C}_{1,\cdot}$ tem subespaço invariante não-trivial;*

iii) *Toda contração, que é uma transformação quase-afim de um operador unitário, tem subespaço invariante não-trivial;*

Demonstração: (Ver, e.g., [21].) Vamos dividir essa demonstração em etapas: (i)$\Rightarrow$(ii); (ii)$\Rightarrow$(iii); e (iii)$\Rightarrow$(i).

Afirmo que (i)$\Rightarrow$(ii). Suponha que existe uma contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ sem subespaço invariante não-trivial, tal que T é entrelaçada por uma contração $\mathcal{C}_{1,\cdot}$, digamos $U \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Então, existe $0 \neq J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $JT = UJ$. Note que

$$JT^n = U^n J.$$

De fato, para $n = 1$ acabamos de provar que isso é verdade. Suponha que $JT^{n-1} = U^{n-1}J$ para um inteiro positivo arbitrário $n-1$. Segue que,

$$JT^n = JT^{n-1}T = U^{n-1}JT = U^{n-1}UJ = U^n J.$$

Logo, como $n-1$ é um inteiro positivo qualquer por indução temos que $JT^n = U^n J$. Por outro lado, como $\mathcal{R}(J) \neq \{0\}$, então existe x não-nulo em $\mathcal{H}$, tal que $Jx \neq 0$. Daí, se U pertence a classe $\mathcal{C}_{1,\cdot}$, segue que $U^n x \not\to 0$ quando $n \to \infty$ e $x \in H$ é não-nulo. Logo, $T^n x \not\to 0$ para $n \to \infty$. Em outras palavras, T não é fortemente estável, isto é, $A \neq 0$. Portanto, não (ii)$\rightarrow$ não (i), equivalentemente, (i)$\rightarrow$(ii).

Agora, vamos mostrar que (ii)$\Rightarrow$(iii). Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração arbitrária, tal que T é uma transformação quase-afim de um operador unitário $U \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Segue que existe $J \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ não-nulo tal que $JT = UJ$, com $\mathcal{N}(J) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(J)^- = \mathcal{K}$. Pode-se verificar facilmente que todo operador unitário é equivalente a uma contração da classe $\mathcal{C}_{1,1}$ (basta notar que $A = A_* = I$ para este caso). Logo, em particular, T é entrelaçado por uma contração de classe $\mathcal{C}_{1,\cdot}$, e, portanto, T tem subespaço invariante não-trivial. Em outras palavras, (ii)$\Rightarrow$(iii).

Por último, afirmo que (iii)$\Rightarrow$(i). Com efeito, suponha que existe uma contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ sem subespaço invariante não-trivial, tal que T não é fortemente estável (isto é, $A \neq 0$). Então, pelo lema anterior existe um operador unitário $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, com $\mathcal{R}(A)^- = \mathcal{H}$. Além disso, como A é auto-adjunto, segue que $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Portanto, T é uma transformação quase-afim de um operador unitário, tal que T não tem subespaço invariante não-trivial. Portanto, não (i)$\Rightarrow$ não (ii). Em outras palavras, (ii)$\Rightarrow$(i). $\square$

Ao final do primeiro capítulo concluímos que o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita, e que também ele segue sem uma solução definitiva para o caso hiponormal (i.e., não se sabe se todo operador hiponormal em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial). Dito de maneira equivalente, será que existe um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial? Se a resposta for afirmativa, o que poderíamos estabelecer acerca de suas propriedades, ou melhor, como seria o espectro de tal operador? Essa é a pergunta é que justifica o próximo capítulo, onde construimos um exemplo de como seria o espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial, caso exista tal operador.