

4

Problemas Equivalentes - Parte I

Até agora, expomos duas abordagens para o Problema do Subespaço Invariante. Uma delas procura investigar respostas para classes específicas de operadores. Ao passo que o outro método, estabelece resultados com relação aos espaços onde os operadores estão definidos. Algumas respostas, ainda que parciais, foram resolvidas, com destaque para o Teorema de Lomonosov e o resultado de S. Brown [7] para operadores subnormais. Apesar disso, o Problema do Subespaço Invariante continua em aberto. Na busca de uma solução, pesquisadores trilharam caminhos diferentes.

Muitos tentaram construir operadores que, independente do espaço onde estejam definidos, não tem subespaço invariante não-trivial. Em torno da década de 50, Bishop introduziu uma classe de potenciais exemplos, conhecidos na literatura como Operadores de Bishop.

Considere $\alpha \in [0, 1]$ um número irracional arbitrário. Seja L^p o espaço das funções p -integráveis, tal que $p \geq 1$ é um número real, isto é,

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

Dizemos que um operador T_α é de Bishop, se $T_\alpha : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ é dado por,

$$(T_\alpha h)(x) = xh(\{x + \alpha\}),$$

para $h \in L^2(0, 1)$ e $x \in [0, 1]$, tal que $x + \alpha$ tem módulo 1.

A priori, não se conhecia muito acerca destes operadores. Através de técnicas relacionadas à Teoria dos Números, Davie [11] prova que para quase todo α , T_α admite subespaço hiperinvariante não-trivial.

Teorema 4.1 *Se $\alpha \in [0, 1]$ e não existe uma sequência de números racionais $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ com*

$$q_n \geq 2 \text{ e } \left| \alpha - \left(\frac{p_n}{q_n} \right) \right| < q_n^{-n},$$

então o operador de Bishop T_α tem subespaço hiperinvariante não-trivial.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [11].) $\square$

O conjunto dos α 's que satisfazem essa hipótese tem medida de probabilidade 1 e contém todos os números algébricos (ver, e.g., [38]).

Por outro lado, muito se pesquisou sobre a relação entre álgebra de operadores $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e o Problema do Subespaço Invariante. Um exemplo disso é o Problema da Álgebra Transitiva:

Existem outras Álgebras Transitivas que não sejam $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$?

Uma álgebra transitiva Θ , é uma subálgebra da álgebra de operadores $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ que é fracamente fechada (i.e., toda sequência $\{T^n; 1 \leq n\}$ em $\mathcal{H}$ que converge fracamente em Θ , tem seu limite T em Θ) e não tem subespaços invariantes não-triviais, à exceção de $\{0\}$ e $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. O Teorema de Lomonosov permitiu respostas parciais para essa questão.

O número de Problemas Equivalentes ao Problema do Subespaço Invariante é vasto o suficiente para ser objeto de estudo de uma outra dissertação de mestrado. Então, selecionamos 3 reformulações que achamos interessantes. Com a finalidade de evitar que este capítulo ficasse desproporcional, em tamanho, aos demais, resolvemos dividi-lo em duas partes: no texto que segue, exibimos a técnica de Rota; ao passo que depois, no capítulo posterior, mostramos a formulação geométrica de Nordgren, Radjavi e Rosenthal, e a teoria de Nagy-Foias para contrações.

Na primeira seção deste capítulo, exibimos e demonstramos a técnica de Rota. Depois, em um segundo momento, estabelecemos um refinamento do resultado anterior, e encerramos o capítulo com um outro exemplo proposto por Nordgren, Rosenthal e Wintrobe [29].

Por último, cabe uma ressalva com relação as demonstrações. Assim como no capítulo anterior, estes dois capítulos sobre Problemas Equivalentes, têm como intuito apresentar resultados específicos. Portanto, procuramos demonstrar a maioria dos teoremas aqui enunciados. Porventura, existem alguns poucos resultados, em particular, o exemplo de E.A. Nordgren, P. Rosenthal e F.S. Wintrobe para modelos universais, cuja prova envolve diversos outros conceitos aqui não explorados e não acrescenta muito para a discussão. Portanto, para estes casos específicos, escolhemos omitir a demonstração.

4.1

A técnica de Rota

A técnica de Rota baseia-se numa reformulação do Problema do Subespaço Invariante para modelos universais. Na verdade, Rota [39] não de-

monstra uma técnica, mas um exemplo no qual relaciona os shift unilaterais com a reformulação anterior, e, portanto, com o Problema do Subespaço Invariante. Devido a estrutura analítica "simples" destes operadores (isto é, dos shift unilaterais), seu resultado teve grande impacto na teoria, sendo a base de vários trabalhos durante as décadas de 60 e 80. Por "simples" queremos dizer que várias propriedades sobre os shift unilaterais são conhecidas.

Considere $\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}$ dois espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Sejam T, L operadores em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente. Lembre do Capítulo 1 que $\mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ denota a classe de todos os operadores invertíveis em $\mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. Dizemos que T e L são similares, se existe $W \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, tal que $WT = LW$ (isto é, $T = W^{-1}LW$; equivalentemente, $L = WTW^{-1}$, veja, por exemplo, [18] p. 23).

Uma parte de um operador é a restrição dele mesmo a um dos seus subespaços invariantes. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é dito um modelo universal, se todo operador em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é similar a um múltiplo de uma parte dele. De forma equivalente, T é um modelo universal, se para todo $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ existe um escalar c e um subespaço invariante $\mathcal{M}$ de T , tal que A é similar a restrição de cT a $\mathcal{M}$. Isto é, T em $\mathcal{H}$ é um modelo universal para A , se A é similar a $cT|_{\mathcal{M}}$.

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem propriedade $\mathbb{S}$, se dado um subespaço invariante de dimensão infinita $\mathcal{M}$ de T , existe um outro subespaço invariante não-trivial $\mathcal{N}$ de T , tal que $\mathcal{N}$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{M}$.

Teorema 4.2 *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ modelo universal arbitrário, segue que T tem a propriedade $\mathbb{S}$ se, e somente se, todo operador tem um subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um modelo universal com a propriedade $\mathbb{S}$, e considere A um operador arbitrário em $\mathcal{H}$. Segue que existe um escalar c , tal que A é similar a cT em $\mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é um subespaço invariante para T em $\mathcal{H}$. Por outro lado, se T tem a propriedade $\mathbb{S}$, existe um subespaço invariante não-trivial $\mathcal{N}$ propriamente contido em $\mathcal{M}$. Daí, $\mathcal{N}$ é subespaço invariante não-trivial de A , pois A é similar a cT em $\mathcal{M}$ e similaridade preserva subespaço invariante não-trivial (ver, e.g., [22] p. 6). Assim, como A é qualquer, temos que todo operador em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial. Reciprocamente, suponha que todo operador tem subespaço invariante não-trivial. Em particular, a restrição de T a $\mathcal{M}$ tem subespaço invariante não-trivial, digamos $\mathcal{N}$, onde $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Portanto, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem a propriedade $\mathbb{S}$. $\square$

Note que o teorema acima só vale para o caso em que $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é modelo universal. Então, a não ser que exista um grande número de modelos universais,

ou algum operador importante que seja um modelo universal, a reformulação acima não nos ajuda muito. De fato, os modelos universais não são muitos, no entanto, Rota [39] mostra que os shift unilateral reverso canônicos são modelos universais.

Vimos no capítulo preliminar que podemos definir o shift unilateral como o mapa $S_+ : l_+ \rightarrow l_+$ dado por:

$$S_+x = \{v_k\}_{k=0}^\infty \text{ com } v_k = 0 \text{ se } k = 0 \text{ ou } \epsilon_{k-1} \text{ se } k \geq 1,$$

isto é, $S_+(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots) = (0, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots)$ para todo $x = \{\epsilon_k\}_{k=0}^\infty$, tal que l_+ denota os espaços normados $(l_+^p, \|\cdot\|_p)$ ou $(l_+^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. A representação do shift unilateral via uma matriz infinita deixa evidente sua estrutura analítica simples,

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde todas as entradas abaixo da diagonal principal são iguais a 1 e as demais entradas são 0.

A partir do conceito de isometria, podemos generalizar a noção acima. Lembre que uma isometria em um espaço de Hilbert, é um operador que preserva produto interno. Em outras palavras, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma isometria, se $\langle Tx; Ty \rangle = \langle x; y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Daí, um shift unilateral é um operador S_+ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que S_+ mapeia cada $\mathcal{H}_k$ isometricamente sobre $\mathcal{H}_{k+1}$ (isto é, unitariamente em $\mathcal{H}_{k+1}$), onde $\{\mathcal{H}_k : k \geq 0\}$ é uma sequência de subespaços dois a dois ortogonais, com $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{H}_k$. O adjunto de S_+ , denotado por S_+^* , é chamado de shift unilateral reverso.

Com base na definição acima, pode-se concluir que S_+ é uma isometria. De fato, como $S_+|_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ é uma isometria sobrejetiva, então $S_+|_{\mathcal{H}_k}$ é unitário (ver Proposição 1.5). Daí, podemos reescrever $S_+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ como

$$S_+x = 0 \bigoplus_{k=1}^\infty \bigoplus_{k=1}^\infty U_k x_{k-1} \forall x = \bigoplus_{k=0}^\infty x_k \in \mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{H}_k,$$

onde $\{U_{k+1} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{k+1}, k \geq 0\}$ é uma sequência de operadores unitários com $S_+|_{\mathcal{H}_k} = U_{k+1}$ para cada $k \geq 0$, e $0 \in \mathcal{H}_0$ é o operador nulo. Por outro lado, como a soma direta de operadores unitários é um operador unitário

(ver, e.g., [18] p. 37), segue que S_+ é unitário. Portanto, S_+ é uma isometria (equivalentemente, $S_+ S_+^* = I$). Além disso, pode-se verificar que

$$S_+^{*n} \xrightarrow{s} 0$$

para $n \rightarrow \infty$ (ver, e.g., [18] p. 37).

Note que S_+ pode ser representado pela matriz de dimensão infinita abaixo:

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ U_1 & 0 & & & \\ & U_2 & 0 & & \\ & & U_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

O próximo resultado estabelece que toda parte de um shift unilateral é um shift unilateral. Equivalentemente, a Proposição 4.1 garante que diversas propriedades sobre os subespaços invariantes das partes de um shift unilateral são conhecidas. Daí, se $\mathcal{M}$ é um subespaço invariante para S_+ , tal que $S_+|_{\mathcal{M}}$ é um shift unilateral, então $\mathcal{M}^\perp$ é um subespaço invariante para S_+^* . Portanto, é natural se perguntar o que podemos estabelecer sobre $S_+^*|_{\mathcal{M}^\perp}$, isto é, quais operadores são as partes de um shift unilateral reverso S_+^* . Rota responde a essa pergunta.

Um operador é uma extensão de outro operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, se T é uma parte dele. Dizemos que a classe $\mathbb{P}$ é padrão para a classe $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$, se todo operador em $\mathcal{C}$ tem extensão em $\mathbb{P}$, isto é, se todo operador em $\mathcal{C}$ é uma parte de um operador em $\mathbb{P}$. Por exemplo, da definição de operadores subnormais, temos que os operadores normais são padrões para operadores subnormais.

Proposição 4.1 *Toda parte de um shift unilateral é também um shift unilateral.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 88.) Seja T uma parte de um shift unilateral S_+ em $\mathcal{H}$. Sabe-se que T é um shift unilateral se, e somente se, $T^{*n} \xrightarrow{s} 0$ e T é uma isometria (ver, e.g., [18] p. 88). Portanto para concluir a demonstração, basta mostrar que a parte de um shift unilateral T satisfaz a essas duas condições.

Quando definimos shift unilateral utilizando o conceito de isometria, vimos que se S_+ é um shift unilateral, então S_+ é uma isometria. Como a restrição de uma isometria a um subespaço é uma isometria, segue que T

é uma isometria. Por outro lado, se T é uma parte de S_+ , então existe um subespaço $\mathcal{M}$ invariante para S_+ , tal que $T = S_+|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ e

$$S_+ = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

com relação a decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, para o par de operadores $X : \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}$ e $Y : \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$. Analogamente,

$$S_+^{*n} = \begin{pmatrix} T^{*n} & 0 \\ X_n^* & Y^{*n} \end{pmatrix},$$

com relação a mesma decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, tal que $X_n := \sum_{k=1}^n T^{k-1}XY^{n-k} : \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}$, para cada $n \geq 1$. Ora, como $S_+^{*n} \xrightarrow{s} 0$, então $T^{*n} \xrightarrow{s} 0$. Logo, T é uma isometria e $T^{*n} \xrightarrow{s} 0$ se, e somente se, T é um shift unilateral (ver, e.g., [18] p. 88). $\square$

Na verdade, o Teorema de Rota se refere a uma classe particular de shift unilaterais, os chamados shift unilateral canônicos reversos (definidos a seguir). Considere o operador unitário U , donde

$$U = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U_k \dots U_0 : l_+^2(\mathcal{K}_0) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

tal que $\mathcal{K}_0$ é um espaço de Hilbert, e $U_k : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ é um operador unitário com $\dim(\mathcal{H}_k) = \dim(\mathcal{K}_0)$ para todo $k \geq 1$. Segue que $U^*S_+U : l_+^2 \rightarrow l_+^2$ é um shift unilateral com $\dim(U^*S_+U) = \dim(\mathcal{K}_0)$. Dizemos que U^*S_+U é um shift unilateral canônico em $l_+^2(\mathcal{K}_0)$, se U^*S_+U pode ser representado pela matriz abaixo:

$$U^*S_+U = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ I & 0 & & & \\ & I & 0 & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Um shift unilateral reverso canônico é um shift unilateral reverso, onde os operadores unitários U_k são todos iguais a identidade.

Voltemos a questão anterior: quais operadores são as partes de um shift

unilateral reverso? Todo operador se corretamente multiplicado por um escalar positivo, se torna parte de um shift unilateral reverso. Em outras palavras, *os shift unilateral reverso canônicos são modelos universais*.

Teorema 4.3 (*Teorema de Rota*) *Seja T um operador em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $r(T) < 1$, então T é similar a parte de um shift unilateral reverso canônico em $l_+^2(\mathcal{M})$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 89.) Seja T um operador em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e suponha $r(T) < 1$. Considere S_+ um shift unilateral canônico em $l_+^2(\mathcal{H})$, tal que $S_+^* \mathbf{x} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} x_{k+1}$ para todo $\mathbf{x} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} x_k \in l_+^2(\mathcal{H})$. Seja $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}(W) \subseteq l_+^2(\mathcal{H})$ dado por:

$$Wx = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k x,$$

tal que

$$\|x\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k x\|^2 = \|Wx\|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|^2 \right) \|x\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Como $r(T) < 1$, segue que $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|^2 < \infty$ (ver, e.g., [18] p. 11). Daí, W é uma transformação linear limitada inferiormente, isto é, $W \in G[\mathcal{H}, \mathcal{R}(W)]$. Além disso, $\mathcal{R}(W)$ é um fechado em $l_+^2(\mathcal{H})$ (ver, e.g., [18] p. 3), isto é, $\mathcal{R}(W)$ é um subespaço de $l_+^2(\mathcal{H})$.

Por outro lado,

$$WTx = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^{k+1} x = S_+^* Wx,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Equivalentemente, $\mathcal{R}(W)$ é S_+^* -invariante. Portanto, $S_+^*|_{\mathcal{R}(W)} : \mathcal{R}(W) \rightarrow \mathcal{R}(W)$ é uma parte de S_+^* , donde

$$T = W^{-1}(S_+^*|_{\mathcal{R}(W)})W.$$

Em outras palavras, T é similar a $S_+^*|_{\mathcal{R}(W)}$. $\square$

A técnica de Rota apontou um outro problema: mesmo conhecendo-se todos os subespaços invariantes do shift unilateral, não sabemos dizer nada com relação aos subespaços invariantes das partes do seu operador adjunto.

4.2

O Refinamento de Branges-Rovnyak

Procurando descobrir mais sobre as partes do shift unilateral reverso, Branges e Rovnyak [5] sugerem trabalhar com o conceito de equivalência unitária ao invés de similaridade. Entretanto, para isso substituem a hipótese de que T é uniformemente estável (isto é, $r(T) < 1$) por fortemente estável e impõe que o operador T é uma contração.

Assim, como anteriormente, continuaremos a considerar $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ dois espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Dizemos que $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ são unitariamente equivalentes, se existe uma transformação unitária entre eles. Equivalentemente, dois espaços de Hilbert são unitariamente equivalentes se existe uma isometria linear sobrejetiva entre eles. Segue que, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são unitariamente equivalentes, se existe $U \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, tal que $UT = LU$ (i.e., $T = U^*LU$; equivalentemente, $L = UTU^*$, veja, por exemplo, [18] p. 23). Tanto o conceito de unitariamente equivalente, quanto a noção de similaridade representam relações de equivalência, porém, a segunda é uma forma mais fraca do que a primeira (i.e., a noção de similaridade é uma relação de equivalência que não preserva tantas propriedades quanto o conceito de equivalência unitária). Por exemplo, a proposição abaixo só vale sob a noção de equivalência unitária.

Proposição 4.2 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é unitariamente equivalente a soma direta de $L = \bigoplus_k L_k \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$, então $T = \bigoplus_k T_k$, com T_k unitariamente equivalente à L_k para cada k .*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 25) $\square$

Na verdade, uma transformação unitária preserva a estrutura algébrica, geométrica e topológica entre dois espaços de Hilbert, fato que a similaridade não faz (como se pode observar a partir do resultado anterior). Resumindo: similaridade preserva cada parte do espectro, e, portanto, raio espectral (i.e., $r(T) = r(WTW^{-1})$); enquanto equivalência unitária também preserva norma, isto é, $\|T\| = \|UTU^*\|$ para todo operador unitário $U \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ (ver, e.g., [18] p. 23).

Teorema 4.4 *(O Refinamento de Branges-Rovnyak) Uma contração T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é fortemente estável (i.e., uma contração T que converge fortemente para o operador nulo) se, e só se, T é unitariamente equivalente a parte de um shift unilateral reverso canônico em $l_+^2(\mathcal{M})$, onde $\mathcal{M}$ é um subespaço qualquer de $\mathcal{H}$ com $\mathcal{R}(I - T^*T) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 92.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração fortemente estável. Se T é uma contração, então

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx; x \rangle \leq \langle x; x \rangle = \|x\|^2 \Leftrightarrow 0 \leq I - T^*T,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Considere $D = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ e $W_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}(W_1)$ uma função linear dada por:

$$W_1x = \bigoplus_{k=0}^{\infty} DT^kx,$$

onde $\mathcal{R}(W_1) \subseteq l_+^2(\mathcal{R}(D)^-) \subseteq l_+^2(\mathcal{H})$, e $x \in \mathcal{H}$ é arbitrário. Note que,

$$\|Dx\|^2 = \langle (I - T^*T)x; x \rangle = \langle x; x \rangle - \langle T^*Tx; x \rangle = \|x\|^2 - \|Tx\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Daí,

$$\|W_1x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|DT^kx\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\|T^kx\|^2 - \|T^{k+1}x\|^2) = \|x\|^2 - \lim_n \|T^{n+1}x\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Como T é fortemente estável, segue que $\lim_n \|T^{n+1}x\|^2 \rightarrow 0$. Logo,

$$\|W_1x\|^2 = \|x\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ (isto é, W_1 é uma isometria). Além disso, $\mathcal{R}(W_1)$ é um subespaço de $l_+^2(\mathcal{R}(D)^-)$ (ver, e.g., [18] p. 3). Portanto, $W_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}(W_1)$ é um operador unitário em $l_+^2(\mathcal{R}(D)^-)$.

Agora, considere $\mathcal{M}$ um subespaço arbitrário de $\mathcal{H}$, tal que $\mathcal{R}(D)^- \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$. Seja S_+ um shift unilateral canônico em $l_+^2(\mathcal{M})$. Segue que,

$$W_1Tx = \bigoplus_{k=0}^{\infty} DT^{k+1}x = S_+^*W_1x,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Logo, $\mathcal{R}(W_1)$ é um subespaço invariante para S_+^* , e, portanto, $S_+^*|_{\mathcal{R}(W_1)} : \mathcal{R}(W_1) \rightarrow \mathcal{R}(W_1)$ é uma parte de S_+^* . Como W_1 é unitário, tem-se

$$T = W_1^*S_+^*|_{\mathcal{R}(W_1)}W_1.$$

Equivalentemente, T é unitariamente equivalente a parte de um shift unilateral reverso canônico.

Reciprocamente, seja S_+^* um shift unilateral reverso canônico em um

subespaço $\mathcal{M}$, arbitrário, de $\mathcal{H}$. Segue que S_+^* é uma contração fortemente estável (ver, e.g., [18] p. 88). Como qualquer parte de uma contração fortemente estável é, também, uma contração fortemente estável. Em particular, $S_+^*|_{\mathcal{M}}$ é uma contração fortemente estável. Além disso, T é unitariamente equivalente à $S_+^*|_{\mathcal{M}}$ (lembre que equivalência unitária preserva estabilidade forte). Portanto, T é uma contração fortemente estável. $\square$

O corolário abaixo é um caso particular do teorema anterior.

Corolário 4.1 *Toda contração estrita em $\mathcal{H}$ é unitariamente equivalente a uma parte de um shift unilateral reverso canônico em $l_+^2(\mathcal{H})$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 94.) Seja T é uma contração estrita. Segue que $\|T\| < 1 \Rightarrow r(T) < 1$, pois $r(T)^n \leq \|T^n\|^n$ para todo $n \geq 1$. Ora, mas $r(T) < 1$ é equivalente à $T^n \xrightarrow{u} 0$, donde $T^n \xrightarrow{u} 0 \Rightarrow T^n \xrightarrow{s} 0$ (ver, e.g., [18] p. 11). Daí, T é uma contração fortemente estável, e, assim, T é unitariamente equivalente a uma parte de um shift unilateral reverso canônico em $l_+^2(\mathcal{H})$ pelo teorema anterior. $\square$

Portanto, todo operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é unitariamente equivalente a um múltiplo de uma parte de um shift unilateral reverso canônico S_+^* em $l_+^2(\mathcal{H})$. Isto é, $S_+^* \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathcal{H})]$ é um modelo universal em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Assim, podemos reformular o Problema do Subespaço Invariante para o caso em que S_+^* é um shift unilateral reverso canônico.

Teorema 4.5 *Considere a notação prévia usada no Refinamento de Branges-Rovnyak. Segue que S_+^* em $l_+^2(\mathcal{M})$ tem a propriedade $\mathbb{S}$ se, e somente se, todo operador tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 95.) Suponha que todo operador em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial. Considere um operador não-nulo arbitrário em $\mathcal{H}$. Seja T o resultado da divisão do operador original pelo dobro de sua própria norma, segue que T é um múltiplo deste operador. Além disso, note que T é uma contração estrita em $\mathcal{H}$. Do Refinamento de Branges-Rovnyak, segue que T é unitariamente equivalente a parte de um shift unilateral reverso canônico $S_+^*|_{\mathcal{R}}$ em $l_+^2(\mathcal{M})$ (lembre que $\mathcal{M}$ é um subespaço arbitrário em $\mathcal{H}$, com $\mathcal{R}(I - T^*T)^- \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$), e $\mathcal{R} \subseteq l_+^2(\mathcal{M})$ é um subespaço invariante para S_+^* .

Por outro lado, se todo operador em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial, então T tem subespaço invariante não-trivial. Equivalentemente, S_+^*

tem subespaço invariante não-trivial (equivalência unitária preserva subespaço invariante). Isto é, T tem subespaço invariante não-trivial se, e somente se, S_+^* tem um subespaço invariante $\mathcal{N}$, tal que

$$\{0\} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{R}.$$

Isto ocorre se, e somente se, S_+^* em $l_+^2(\mathcal{M})$ tem a propriedade $\mathbb{S}$. $\square$

De fato, trabalhar com equivalência unitária em detrimento da noção de similaridade é uma sugestão interessante. Em contrapartida, para isso são feitas hipóteses demasiadamente fortes. Primeiramente, não sabemos muito sobre estabilidade forte, fato que por si só dificulta a verificação de propriedades. Além disso, agora, precisamos impor que T é uma contração, enquanto isso não era necessário anteriormente.

A técnica de Rota não é o único exemplo de modelo universal. Com efeito, Nordgren, Rosenthal e Wintrobe [29] constroem outro operador que também pertence a esta categoria, nosso próximo tema.

4.3

Um Segundo Exemplo de Modelo Universal

Lembre que uma função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em U (U um aberto qualquer de $\mathbb{C}$), se para todo $z_0 \in U$ existe o limite abaixo

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

tal que $z \in U$. Seja $\mathbb{H}^2$ um espaço de Hardy, isto é, $\mathbb{H}^2$ é o espaço de todas as funções holomorfas no disco unitário quadraticamente somáveis,

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) < \infty.$$

Considere C_ϕ um operador composição em $\mathbb{H}^2$ dado por:

$$(C_\phi f)(z) = f[\phi(z)] = f\left[\frac{z - \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})z}\right],$$

para $f \in \mathbb{H}^2$.

Teorema 4.6 *Se C_ϕ é um operador composição em $\mathbb{H}^2$ e λ é um ponto interior arbitrário do espectro de C_ϕ , então $C_\phi - \lambda$ é um modelo universal.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [29].) $\square$

Logo, o Problema do Subespaço Invariante pode ser reescrito da seguinte forma: será que todo operador tem subespaço invariante não-trivial se, e somente se, C_ϕ tem a propriedade $\mathbb{S}$?

Nordgren, Rosenthal e Wintrobe [29] provam uma segunda reformulação do Problema do Subespaço Invariante.

Teorema 4.7 *Para $\phi(z) = \frac{z-(1/2)}{1-(1/2)}$, o Problema do Subespaço Invariante é equivalente a seguinte afirmação: dada uma função não constante $f \in \mathbb{H}^2$, existe uma função $g \in \mathbb{H}^2$, tal que g não é identicamente 0 e o span de*

$$\{C_\phi^n g : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

é um subconjunto próprio do span de

$$\{C_\phi^n f : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [29].) $\square$

Segundo Nordgren, Rosenthal e Wintrobe, mesmo tendo uma expressão analítica mais simples do que o shift unilateral reverso, torna-se mais difícil de obter propriedades do operador composição, por se tratar de uma composição de funções. P. Rosenthal [36], chama a atenção para o fato de que seu exemplo não obteve muitos avanços na busca de uma resposta definitiva.

No próximo capítulo, como já comentado, voltaremos a falar de Problemas Equivalentes. Em particular, apresentaremos a formulação geométrica de Nordgren, Rosenthal e Radjavi [28] e a teoria de Nagy-Foias para contrações [21].