3
O Teorema de Lomonosov

O Teorema de Lomonosov aliado ao resultado de S. Brown para operadores subnormais são, talvez, até agora, os trabalhos mais importantes, do ponto de vista afirmativo, vinculado ao Problema do Subespaço Invariante. Em [26], Lomonosov mostra que:

i) *Se um operador definido em um espaço de Banach com dimensão maior do que 1 comuta com um operador compacto não-nulo, então ele tem subespaço invariante não-trivial;*

ii) *Se esse operador é não-escalar, então ele tem um subespaço hiperinvariante não-trivial;*

Lembre que um subespaço $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ é hiperinvariante para o operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, se ele é invariante para todo operador que comuta com T.

Previamente, o resultado mais forte conhecido, determinava que todo operador compacto polinomial tem subespaço invariante não-trivial. Por sua vez, o Teorema de Lomonosov é definitivo para compactos, isto é, Lomonosov prova que todo operador compacto tem subespaço invariante não-trivial. Afinal, todo operador compacto comuta consigo mesmo. Além disso, a classe de operadores que satisfaz a hipótese de Lomonosov é tão vasta, que por um momento acreditou-se que o Problema do Subespaço Invariante havia sido solucionado. No entanto, Hadwin, Nordgren, Radjabalipour, Radjavi e Rosenthal [15] provaram que existem operadores que não satisfazem as condições necessárias para a aplicação do teorema.

Por causa do impacto que o resultado de Lomonosov teve sobre o Problema do Subespaço Invariante, dedicamos este capítulo a uma análise mais detalhada desse resultado. O presente capítulo está dividido em três partes: na seção a seguir, exibimos uma prova detalhada de uma versão parcial do Teorema de Lomonosov, isto é, o ítem (i) acima; depois enfatizamos o porquê de sua importância na teoria, e demonstramos sua versão completa, o ítem (ii) acima; e por fim, na terceira seção, mostramos uma generalização do teorema.

Ao contrário do que fizemos no Capítulo 1, apresentamos as demonstrações da maioria das afirmações aqui feitas (talvez as únicas excessões sejam os teoremas de Mazur e do Ponto Fixo de Schauder). Mesmo sendo usados diretamente na demonstração do ítem (ii), ambos os resultados acima citados envolvem temas que fogem do escopo deste trabalho, em particular, Geometria de espaços de Banach e Análise Funcional Não-Linear, respectivamente.

3.1
A prova de Hilden

Outro aspecto importante no resultado de Lomonosov é que este continua resistindo as inúmeras tentativas de generalização. A demonstração proposta por ele é baseada nas aplicações dos Teoremas de Mazur e do Ponto Fixo de Schauder. Diversos pesquisadores tentaram, em vão, substituir a utilização destes teoremas por outros, como, por exemplo, o Princípio da Contração de Banach. Entretanto, algum êxito não veio de uma extensão, mas sim de uma pequena modificação na prova. Note que, o resultado de Lomonosov é dividido nos ítens (i) e (ii). Partindo de noções básicas em Análise Funcional, Hilden [27] conseguiu, para versão fraca do teorema, uma prova mais elegante e simples do que a original, fato este que levou a demonstração do ítem (i) ser conhecida como a Prova de Hilden.

Lema 3.1 *Considere $\mathcal{X}$ um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1. Sejam K e T dois operadores em $\mathcal{X}$, tal que K é um operador compacto não-nulo, e T um operador que comuta com K. Se T não tem subespaço invariante não-trivial, então existe uma sequência $\{p_k\}$ em um conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$, tal que*

$$p_1(T)p_2(T)...p_n(T)K^n x_0 \in B_1[x_0],$$

onde $x_0 \in \mathcal{X}$ e $B_1[x_0]$ é uma bola fechada unitária em torno de x_0, tal que $0 \notin B_1[x_0]$ e $0 \notin K(B_1[x_0])^-$.

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 130.) Seja T um operador sem subespaço invariante não-trivial que comuta com o operador compacto não-nulo K, onde ambos operadores estão definidos em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ com dimensão maior do que 1. Primeiro vamos mostrar a existência de um conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$. Depois, provaremos que existe uma sequência $\{p_k\} \in \mathcal{P}$, donde $p_1(T)p_2(T)...p_n(T)K^n x_0 \in B_1[x_0]$.

Considere a bola fechada em torno de $x_0 \in \mathcal{X}$ arbitrário dada pelo conjunto,

$$B_1[x_0] = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq 1\},$$

tal que $0 \notin B_1[x_0]$ e $0 \notin K(B_1[x_0])^-$. Note que $B_1[x_0]$ definida acima não é vazia. Ou melhor como $K \neq 0$, então $x_0 \in B_1[x_0]$ sempre que $\|K\| < \|Kx_0\|$. De fato, se $0 \in B_1[x_0]$, então $\|x_0\| \leq 1$, e, portanto, $\|Kx_0\| \leq \|K\|$. Se $0 \in K(B_1[x_0])^-$ (i.e., 0 pertence ao fecho de $K(B_1[x_0])$), então 0 é ponto de aderência de $K(B_1[x_0])$. Daí, existe uma sequência de valores $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $B_1[x_0]$, com $Kx_n \to 0$ (pelo Teorema do Conjunto Fechado, veja, por exemplo, [20] p. 118). Logo,

$$\|Kx_0\| = \lim_n \|K(x_n - x_0)\| \leq \|K\| \limsup_n \|x_n - x_0\| \leq \|K\|.$$

Então, considere um x_0 em $\mathcal{X}$ que satisfaça as propriedades acima. Defina o conjunto

$$U_p(x_0) = \{x \in \mathcal{X} : \|p(T)x - x_0\| < 1\},$$

para cada polinômio p não-nulo. Segue que $U_p(x_0)$ é a imagem inversa de uma bola aberta $B_1(x_0) = \{y \in \mathcal{X} : \|y - x_0\| < 1\}$ sob a função contínua $p(T)$. Como a imagem inversa sob a função contínua de um conjunto aberto é também um cojunto aberto (ver, e.g., [20] p. 102). Em particular, $U_p(x_0)$ é um aberto em $\mathcal{X}$. Além disso, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então

$$\bigvee \{T^n x\}_{n \geq 0} = \{p(T)x \in \mathcal{X} : p \text{ é um polinômio não-nulo}\}^- = \mathcal{X}$$

(ver, e.g., [22] p. 283) para $x \in \mathcal{X}$ não-nulo. Isto é, $\{p(T)x \in \mathcal{X} : p$ é um polinômio não-nulo$\}$ é denso em $\mathcal{X}$. Ora, sabe-se que todo subconjunto aberto em $\mathcal{X}$ intercepta um subconjunto denso em $\mathcal{X}$ (ver, e.g., [20] p. 122). Como $U_p(x_0)$ é aberto e $\{p(T)x \in \mathcal{X} : p$ é um polinômio não-nulo$\}$ é denso em $\mathcal{X}$, segue que existe um polinômio p não-nulo, tal que $p(T)x \in B_1[x_0]$. Logo, $x \in U_p(x_0)$.

Agora, vamos mostrar a existência de um conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$. Considere $\mathcal{U}$ a coleção de todos os conjuntos abertos não-vazios da forma $U_p(x_0)$. Acabamos de estabelecer que para cada $x \neq 0$ em $\mathcal{X}$, existe p não-nulo, tal que $x \in U_p(x_0)$. Então, $\mathcal{U}$ é uma cobertura para cada aberto em $\mathcal{X}$ que não contém a origem. Em particular, $\mathcal{U}$ é uma cobertura para $K(B_1[x_0])^-$ (pois $0 \neq K(B_1[x_0])^-$). Como K é compacto, então existe uma subcobertura finita de $K(B_1[x_0])^-$, digamos $\{U_p(x_0)\}_{p\in\mathcal{P}}$, para algum conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$. Portanto, existe um conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$. Além disso, se $x \in K(B_1[x_0])$, então $x \in U_p(x_0)$ para algum $p \in \mathcal{P}$, e, portanto, $p(T)x \in B_1(x_0)$.

Para concluir a demonstração, basta verificar que existe uma sequência de polinômios $\{p_k\}$ em $\mathcal{P}$, tal que

$$p_1(T)...p_n(T)K^n x_0 \in B_1[x_0].$$

Vamos provar essa afirmação por indução. Seja $x_0 \in B_1[x_0]$, tal que $\|K\| < \|Kx_0\|$. No parágrafo anterior, estabelecemos que existe $p_1 \in \mathcal{P}$, tal que $p_1(T)Kx_0 \in B_1[x_0]$. Portanto, a afirmativa é verdadeira para $n = 1$. Suponha que a afirmativa seja verdadeira para um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Analogamente, se $x_0 \in B_1[x_0]$, tal que $Kx_0 \in K(B_1[x_0])$, então existe $p'_{n+1} \in \mathcal{P}$, com

$$p'_{n+1}(T)Kp_1(T)...p_n(T)K^n x_0 \in B_1[x_0].$$

Como T comuta com K, segue que

$$p_1(T)...p_n(T)p'_{n+1}(T)K^{n+1}x_0 \in B_1[x_0].$$

Donde, podemos obter uma nova sequência $\{p'_k\}$ em $\mathcal{P}$, trocando cada p_{n+1} da sequência de polinômios $\{p_k\}$ em $\mathcal{P}$ por p'_{n+1}, donde

$$p'_1(T)...p'_{n+1}(T)x_0 \in B_1[x_0].$$

Como n é arbitrário, encerramos a prova por indução.

Portanto, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então existe uma sequência $\{p_k\}$ em um conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$, tal que

$$p_1(T)p_2(T)...p_n(T)K^n x_0 \in B_1[x_0],$$

onde $x_0 \in \mathcal{X}$ e $B_1[x_0]$ é uma bola fechada unitária em torno de x_0, com $0 \notin B_1[x_0]$ e $0 \notin K(B_1[x_0])^-$. $\square$

Teorema 3.1 *(A Prova de Hilden) Se um operador comuta com um operador compacto não-nulo (ambos definidos em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1), então ele tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 130.) Seja T um operador (em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1) que comuta com o operador compacto não-nulo K (também definido em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1). Considere, $B_1[x_0]$ uma bola fechada centrada em x_0, com $0 \neq B_1[x_0]$ e $0 \neq K(B_1[x_0])^-$.

Suponha por contradição que T não tem subespaço invariante não-trivial. Daí, o Lema 3.1 garante que existe uma sequência $\{p_k\}$ de polinômios pertencente ao conjunto finito de polinômios $\mathcal{P}$, tal que

$$x_n = p_1(T)...p_n(T)K^n x_0$$

para todo $n \geq 1$. Em outras palavras, existe uma sequência de vetores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $B_1[x_0]$, tal que

$$\|x_n\| = \|p_1(T)...p_n(T)K^n x_0\| \leq \alpha^n \|K^n x_0\| \leq \|(\alpha K)^n\| \|x_0\|,$$

onde $\alpha = \sup_{p\in\mathcal{P}} \|p(T)\|$.

Por outro lado, se K comuta com T, então $\mathcal{N}(\lambda I - K)$ é um subespaço invariante para T (ver, e.g., [22] p. 77), onde λ é um escalar não-nulo arbitrário em $\mathbb{C}$. Como T não tem subespaço invariante não-trivial, segue que

$$\mathcal{N}(\lambda I - K) = \mathcal{X} \text{ ou } \mathcal{N}(\lambda I - K) = \{0\}.$$

Considere $\mathcal{N}(\lambda I - K) = \mathcal{X}$, segue que K é um operador escalar não-nulo em $\mathcal{X}$. Ora, mas K é compacto e o operador identidade em dimensão infinita não é compacto (ver, e.g., [20] p. 251). Logo, $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach complexo de dimensão finita maior do que 1. Equivalentemente K é um operador com rank finito. Donde, $\sigma(T) = \sigma_P(T)$ pela Proposição 1.8. No entanto, sabe-se que todo operador sem subespaço invariante não-trivial em $\mathcal{X}$ tem espectro pontual vazio (ver, e.g., [22] p. 77). Logo, $\sigma(T) = \emptyset$ o que é uma contradição (ver Proposição 1.7 ítem (b)).

Agora, suponha que $\mathcal{N}(\lambda I - K) = \{0\}$ para todo λ escalar não-nulo arbitrário em $\mathbb{C}$, segue que $\sigma_P(K) \subseteq \{0\}$. Daí, pela Alternativa de Fredholm (Teorema 1.2), tem-se que $\sigma(K)\backslash\{0\} = \sigma_P(K)\backslash\{0\}$. Ora, como $\sigma(T) \neq \emptyset$ (ver Proposição 1.7 ítem (b)), então $\sigma(K) = \{0\}$, isto é, K é quasinilpotente. Equivalentemente, $r(K) = 0$, donde pela Fórmula de Gelfand-Beurling (Teorema 1.1),

$$r(\alpha K) = \alpha r(K) = 0 \Rightarrow \|(\alpha K)^n\| \to 0.$$

Então, existe uma sequência de vetores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $B_1[x_0]$, tal que

$$\|x_n\| = \|p_1(T)...p_n(T)K^n x_0\| \leq \alpha^n \|K^n x_0\| \leq \|(\alpha K)^n\| \|x_0\|.$$

Ora, se $\|(\alpha K)^n\| \to 0$, então

$$\|x_n\| = \|p_1(T)...p_n(T)K^n x_0\| \leq \alpha^n \|K^n x_0\| \leq \|(\alpha K)^n\| \, \|x_0\| \to 0.$$

Isto é, existe uma sequência de vetores em $B_1[x_0]$ que converge para o origem. Como $B_1[x_0]$ é fechado, então $0 \in B_1[x_0]$ (pelo Teorema do Conjunto Fechado veja, por exemplo, [20] p. 118). Contradição, pois por hipótese $0 \notin B_1[x_0]$. Portanto, se T é um operador (em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1) que comuta com um operador compacto não-nulo (em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1), então T tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

A seguir, apresentamos a prova da versão completa do Teorema de Lomonosov.

3.2
A Versão Completa do Teorema de Lomonosov

Note que, apesar da demonstração de Hilden ter ficado demasiadamente extensa, a idéia em si é simples. Basta supor por contradição que existe um operador T (definido em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1) sem subespaço invariante não-trivial que comuta com outro operador compacto não-nulo K (também definido em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1). Como T não tem subespaço invariante não-trivial, então as afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) K é quasinilpotente, e αK é uniformemente estável, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Para cada vetor x em um espaço complexo de Banach de dimensão maior do que 1, digamos $\mathcal{X}$, e cada aberto $U \neq \emptyset$ de $\mathcal{X}$, existe um polinômio p, tal que $p(T)x \in U$.

Essas duas afirmações nos levam a uma contradição. Além disso, ao longo da demonstração, à excessão da Fórmula de Gelfand-Beurling e a Alternativa de Fredholm, são utilizados somente conceitos básicos em Análise Funcional. O mesmo não acontece se desejarmos provar a versão completa do Teorema de Lomonosov. Nela são usadas noções um pouco mais sofisticadas, como, por exemplo, os Teoremas de Mazur e o do Ponto Fixo de Schauder. Com isto em mente, a seguir, destacamos algumas definições e resultados que nos vão ser utéis.

Seja G um subconjunto do espaço linear $\mathcal{X}$. Dizemos que co(G) é a envoltória convexa de G, se co(G) é o menor conjunto convexo que contém G. Daí, $x \in$ co(G) se, e somente se, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ para algum conjunto finito de vetores $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ em G, e para algum conjunto finito de escalares positivos $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Teorema 3.2 *(Teorema de Mazur) Se C é um conjunto compacto em um espaço de Banach $\mathcal{X}$, então co$(C)^{-}$ é um conjunto compacto em $\mathcal{X}$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [8] p. 180.) □

Para entendermos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder precisamos do conceito de compacidade da Análise Funcional Não-Linear. Seja D um subconjunto fechado não-vazio do espaço normado $\mathcal{X}$. Um mapeamento (possivelmente não-linear) $F : D \to \mathcal{X}$ é um compacto, se F é contínua e $F(B)^{-}$ é um conjunto compacto em $\mathcal{X}$, para um subconjunto limitado B de D. Pode-se mostrar que se D é limitado e $F(D)^{-}$ é um conjunto compacto em $\mathcal{X}$, então F é um mapeamento compacto (ver, e.g., [22] p. 131).

Teorema 3.3 *(Teorema do Ponto Fixo de Schauder) Seja D um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço normado $\mathcal{X}$. Considere $F : D \to X$ um mapeamento compacto. Se D é F-invariante, então F tem um ponto fixo. Equivalentemente, se $F(D) \subseteq D$, então existe $x \in D$, tal que $F(x) = x$.*

DEMONSTRAÇÃO:(Ver,e.g., [8] p. 150 .) □

O próximo resultado merece destaque. Além de ser uma peça fundamental na demonstração do Teorema de Lomonosov, como ficará claro mais adiante, o Lema de Lomonosov (Lema 3.3 abaixo) também representa um resultado importante por si só. Com base nos Teoremas de Mazur e do Ponto Fixo de Schauder, Lomonosov introduziu uma nova técnica para se lidar com problemas envolvendo subespaços invariantes. Em poucas palavras, o Lema de Lomonosov estabelece que: *se T é um operador em um espaço de Banach $\mathcal{X}$, tal que T comuta com um operador compacto $K \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$, então T tem autovalor*. Isto é, $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ para algum escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Daí, se T não tem subespaço invariante não-trivial, então $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{H}$. Em suma, o Lema de Lomonosov é uma ferramenta importante para se verificar a existência ou não de subespaços invariantes triviais.

Lema 3.2 *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach complexo e $\mathcal{A}$ uma subálgebra unital de $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$ sem subespaço invariante não-trivial. Além disso, considere $K \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ um operador compacto não-nulo e $B_1[x_0]$ uma bola fechada em torno de $x_0 \in \mathcal{X}$, onde $0 \neq B_1[x_0]$ e $0 \neq K(B_1[x_0])^-$. Então, existe um subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, tal que se $x \in K(B_1[x_0])$, então $Tx \in B_1[x_0]$ para algum $T \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 132.) Tome $x_0 \in \mathcal{X}$ arbitrário, tal que $0 \neq B_1[x_0]$ e $0 \neq K(B_1[x_0])^-$. A idéia da demonstração é semelhante aquela usada no Lema 3.1, isto é, primeiro vamos mostrar que existe um subconjunto denso em $\mathcal{X}$; depois provamos que existe uma cobertura para o conjunto $K(B_1[x_0])^-$; e, por fim, garantimos a existência do $\mathcal{F}$ em questão que satisfaz as propriedades desejadas.

Seja $x \in \mathcal{X}$ arbitrário e considere o conjunto

$$T_x = \{Tx \in \mathcal{X} : T \in \mathcal{A}\} = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} Tx \subseteq \mathcal{X}.$$

Se x_1 e $x_2 \in T_x$, então existem T_1, T_2 pertencentes a $\mathcal{A}$, tal que $x_1 = T_1x$, $x_2 = T_2x$. Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e T_1, $T_2 \in \mathcal{A}$, segue que $T_1 + T_2 \in \mathcal{A}$ e, portanto,

$$x_1 + x_2 = (T_1 + T_2)x \in T_x.$$

Além disso, seja $x \in \mathcal{A}$ qualquer, então existe $T \in \mathcal{A}$; dado um escalar α, tem-se

$$(\alpha T_1 + \alpha T_2)x = \alpha(x_1 + x_2) \in \mathcal{A}.$$

Em outras palavras, T_x é um subespaço linear de $\mathcal{X}$. Logo, $(T_x)^-$ é um subespaço de $\mathcal{X}$ por definição.

Agora, tome $y \in T_x$ qualquer, então existe $T_0 \in \mathcal{A}$ com $y = T_0x$. Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra, para $T \in \mathcal{A}$ arbitrário tem-se que $TT_0 \in \mathcal{A}$. Então,

$$Ty = TT_0x \in T_x,$$

isto é, $T(T_x) \subseteq T_x$ (pois y é qualquer). Além disso, como T é contínuo, segue que $T(T_x^-) \subseteq T_x^-$. Portanto,

$$T_x^- \text{ é um subespaço invariante para } \mathcal{A}.$$

Por outro lado, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unital, então $I \in \mathcal{A}$, e, assim, $x \in T_x$ (i.e., $T_x^- \neq \{0\}$). Como $\mathcal{A}$ não tem subespaço invariante não-trivial, e T_x^- é um subespaço invariante para $\mathcal{A}$, segue que $T_x^- = \mathcal{X}$ para todo $x \neq 0$ em

$\mathcal{X}$. Portanto, T_x é denso em $\mathcal{X}$. Equivalentemente, todo subconjunto aberto não-vazio em $\mathcal{X}$ encontra T_x sempre que $x \neq 0$.

Em particular, o subconjunto

$$U_T(x_0) = \{x \in \mathcal{X} : \|Tx - x_0\| < 1\},$$

é aberto não-vazio de $\mathcal{X}$ (pois $U_T(x_0)$ é a imagem inversa da bola aberta $B_1(x_0) = \{y \in \mathcal{X} : \|y - x_0\| < 1\}$ sob T, que é contínuo), para cada $T \in \mathcal{A}$. Daí, como T_x é denso em $\mathcal{X}$, tem-se que para cada um vetor não-nulo x em $\mathcal{X}$ existe $T \in \mathcal{A}$, tal que $Tx \in B_1[x_0]$; isto é, tal que $x \in U_T(x_0)$.

Agora, considere $\mathcal{U}$ a coleção de todos os conjuntos não-vazios $U_T(x_0)$. Segue que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta para o conjunto compacto $K(B_1(x_0))^-$. Daí, $\mathcal{U}$ admite uma subcobertura aberta finita, digamos $\{U_T(x_0)\}_{T\in\mathcal{F}}$, para algum subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$. Portanto, existe um subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, tal que se $x \in K(B_1[x_0])$, então $x \in U_T(x_0)$ para algum $T \in \mathcal{F}$ (i.e., $Fx \in B_1[x_0]$). $\square$

Lema 3.3 *(Lema de Lomonosov) Seja K um operador compacto não-nulo em um espaço de Banach complexo $\mathcal{X}$, e considere $\mathcal{A}$ uma subálgebra unital de $B[\mathcal{X}]$. Se não existe subespaço invariante não-trivial em $\mathcal{X}$ que é invariante para todo operador em $\mathcal{A}$, então existe $L \in \mathcal{A}$, tal que 1 é um autovalor de LK (isto é, $\mathcal{N}(I - LK) \neq \{0\}$).*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 132.) Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach complexo e $\mathcal{A}$ uma subálgebra unital de $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$, tal que $\mathcal{A}$ não tem subespaço invariante não-trivial. Considere $K \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ um operador compacto não-nulo. Lembre que $B_1[x_0] = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq 1\}$ é uma bola fechada em torno de $x_0 \in \mathcal{X}$, com

$$0 \notin B_1[x_0] \text{ e } 0 \notin K(B_1[x_0])^-.$$

Pelo Lema 3.2 existe um conjunto finito $\mathcal{F}$ em $\mathcal{A}$, tal que se $x \in K(B_1[x_0])$, então $Tx \in B_1[x_0]$ para algum $T \in \mathcal{F}$. Tome um vetor $x_0 \in \mathcal{X}$ que satisfaz as hipóteses acima, isto é, $0 \notin B_1[x_0]$ e $0 \notin K(B_1[x_0])^-$. Considere $\beta_T(x) : K(B_1[x_0]) \to \mathbb{R}$ um mapa dado por

$$\beta_T(x) = \frac{\alpha_T(x)}{\sum_{T\in\mathcal{F}} \alpha_T(x)},$$

onde $\alpha_T : K(B_1[x_0]) \to \mathbb{R}$ é uma função definida por

$$\alpha_T = \max\{0, 1 - \|Tx - x_0\|\},$$

para todo $x \in K(B_1[x_0])$ e para cada $T \in \mathcal{F}$.

Note que β_T está bem definido. Com efeito, pelo Lema 3.2 existe $T \in \mathcal{F}$, tal que $\|Ax - x_0\| < 1$. Segue que $0 < \alpha_T(x)$ para algum $T \in \mathcal{F}$. Além disso, como $\mathcal{F}$ é finito e $0 < \alpha_T(x)$ (para todo $x \in K(B_1[x_0])$ e para cada $T \in \mathcal{F}$), então

$$0 < \sum_{T \in \mathcal{F}} \alpha_T(x) < \infty,$$

para todo $x \in B_1[x_0]$. Portanto, podemos definir um mapa $F : B_1[x_0] \to \mathcal{X}$, tal que

$$F(x) = \sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T(Kx)TKx,$$

para todo $x \in B_1[x_0]$. Donde F é o produto e a soma finita das funções contínuas α_T e β_T, logo F é contínua (lembre que a composição de funções contínuas é contínua e a norma também é contínua, assim, α_T e β_T são contínuas).

Agora, considere $T \in \mathcal{F}$ arbitrário. Se T é contínua (logo T é limitada pela Proposição 1.1), então $TK(B_1[x_0])^-$ é um conjunto compacto pela definição de operador compacto. É fácil verificar que a união finita de conjuntos compactos é também um conjunto compacto (ver, e.g. [14] p. 79). Daí, como $\mathcal{F}$ é finito, tem-se que $\bigcup_{T \in \mathcal{F}} TK(B_1[x_0])^-$ é uma união finita de conjuntos compactos, logo compacto. Portanto, pelo Teorema de Mazur (Teorema 3.2) tem-se que $\mathrm{co}(\bigcup_{T \in \mathcal{F}} TK(B_1[x_0]))^-$ (pois $\mathrm{co}(G)^- \subseteq \mathrm{co}(G^-)^-$ para todo G). Por outro lado, tome $x \in B_1[x_0]$ qualquer. Note que

$$\sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_{\mathcal{F}}(Kx) = 1,$$

isto é, $F(x)$ é a combinação linear convexa de vetores em $\bigcup_{T \in \mathcal{F}} TK(B_1[x_0])$. Em outras palavras,

$$F(B_1[x_0]) \subseteq \mathrm{co}(\textstyle\bigcup_{T \in \mathcal{F}} TK(B_1[x_0]))$$

(pois x é arbitrário). Então, $F(B_1[x_0])^-$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto $\mathrm{co}(\bigcup_{T \in \mathcal{F}} TK(B_1[x_0]))^-$. Portanto, $F(B_1[x_0])^-$ é um conjunto compacto (lembre que um subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto, veja, por exemplo, [14] p. 79). Além disso, como $B_1[x_0]$ é convexo, então

$\text{co}(B_1[x_0]) = B_1[x_0]$. Daí, seja $x \in B_1[x_0]$ arbitrário, onde $Kx \in K(B_1[x_0])$. Se $\beta_T(Kx) \neq 0$, então $\alpha_T(Kx) > 0$, e, portanto, $TKx \in B_1[x_0]$. Logo, $F(x) \in B_1[x_0] = \text{co}(B_1[x_0])$ (lembre que $F(x)$ é a combinação linear de todos os vetores em $B_1[x_0]$). Equivalentemente,

$$F(B_1[x_0]) \subseteq B_1[x_0],$$

isto é, $B_1[x_0]$ é F-invariante.

Agora, tome $\beta_T = \beta_T(Kx) \in \mathbb{R}$, e considere o operador L definido abaixo,

$$L = \sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T T,$$

para cada $T \in \mathcal{F}$. Equivalentemente,

$$LKx = F(x), \forall x \in B_1[x_0].$$

Note que $L \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{F}$ é finito e $\mathcal{A}$ é uma álgebra. Por outro lado, estabelecemos que $F : B_1[x_0] \to \mathcal{X}$ é um mapeamento compacto e que $B_1[x_0]$ é F-invariante, tal que $B_1[x_0]$ fechado, limitado, convexo em $\mathcal{X}$. Então, existe $x \in B_1[x_0]$, tal que $F(x) = x$ pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder ($x \neq 0$ pois $0 \neq B_1[x_0]$). Ora, $LKx = F(x)$ com

$$LKx = F(x) = x \neq 0,$$

isto é, existe $L \in \mathcal{A}$ com $\mathcal{N}(I - LK) \neq \{0\}$. $\square$

A versão completa do Teorema de Lomonosov estabelece que *se um operador não-escalar T comuta com um operador compacto não-nulo K, então T tem subespaço hiperinvariante não-trivial.* Isto é, Lomonosov propõe uma nova reformulação, mais forte que a anterior, do Problema do Subespaço Invariante (que , obviamente, permanece em aberto):

Será que todo operador tem subespaço hiperinvariante não-trivial?

Resumindo, as contribuições de seu resultado foram:

a) Cobre todos os casos até então descobertos, e, além disso, é definitivo para operadores compactos;

b) O número de operadores que satisfazem sua hipótese é vastíssima;

c) Estabelece uma nova técnica para questões envolvendo subespaço invariantes;

d) Reformula uma versão mais forte para o Problema do Subespaço Invariante;

Podemos reescrever o teorema anterior da seguinte maneira, *se um operador T não tem subespaço hiperinvariante não-trivial, tal que T comuta com um operador compacto não-nulo K, então T é escalar.* De acordo com esta formulação, suponha que T não admite subespaço hiperinvariante não-trivial. Como $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ é hiperinvariante para T, segue que $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{X}$ ou $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$. O Lema de Lomonosov, nos permite afirmar que T tem autovalor, isto é, $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ e, assim, $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{X}$. Portanto, $T = \lambda I$, isto é, T é escalar. Estas são as etapas a serem percorridas na demonstração abaixo.

Teorema 3.4 *(Teorema de Lomonosov) Se um operador não-escalar comuta com um operador compacto não-nulo (ambos definidos em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1), então ele tem subespaço hiperinvariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 133.) Seja T um operador sem subespaço hiperinvariante não-trivial, definido em um espaço complexo de Banach $\mathcal{X}$ com dimensão maior do que 1. Considere $\{T\}'$ a álgebra unital de todos os operadores em $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$ que comutam com T. Suponha que existe um operador compacto não-nulo K em $\{T\}'$. Vamos mostrar que T é um operador escalar.

De fato, note que $\{T\}'$ é, em particular, uma subálgebra unital de $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$. Daí, como K é um operador compacto não-nulo, pelo Lema de Lomonosov (Lema 3.3), existe $L \in \{T\}'$, tal que

$$\mathcal{N}(I - LK) \neq \{0\}.$$

Por outro lado, se $\{T\}'$ é uma álgebra, então $LK \in \{T\}'$, donde $LKT = TLK$, pois $L \in \{T\}'$. Segue que

$$LKTx = TLKx = Tx,$$

para todo $x \in \mathcal{N}(I - LK)$. Portanto, $Tx \in \mathcal{N}(I - LK)$, isto é, $\mathcal{N}(I - LK)$ é T-invariante.

Note que se T tem autovalor, então $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{X}$ (lembre que T não admite subespaço hiperinvariante não-trivial). Equivalentemente, $T = \lambda I$, e, portanto, acabou a demonstração. Então, basta mostrar que T tem autovalor.

Afirmo que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ (isto é, T tem autovalor). Se K é um operador compacto em $\mathcal{X}$, então LK também é compacto em $\mathcal{X}$ (ver Proposição 1.3). Note que $LK|_{\mathcal{N}(I-LK)} = I$, tal que LK é compacto em $\mathcal{N}(I-LK)$, pois um operador compacto restrito a um subespaço linear continua sendo compacto (ver, e.g., [22] p. 140). Ora, mas o operador identidade não é compacto em espaços de dimensão infinita. Logo, $\mathcal{X}$ tem dimensão finita. Por outro lado, acabamos de verificar que pelo Lema de Lomonosov pode-se afirmar que $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ é T-invariante. Além disso, $T|_{\mathcal{N}(\lambda I-T)} \in \mathcal{B}[\mathcal{N}(\lambda I - T)]$. Daí, pela Proposição 1.8 tem-se que $T|_{\mathcal{N}(\lambda I-T)}$ tem autovalor, isto é, $T|_{\mathcal{N}(I-LK)}x = \lambda x$ para $x \neq 0$ em $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ e para algum escalar λ. Donde $T|_{\mathcal{N}(I-LK)}x = \lambda x$, implica que

$$Tx = T|_{\mathcal{N}(I-LK)}x = \lambda x.$$

Portanto, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ tem autovalor, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ com $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$.

Por fim, como $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ é hiperinvariante para T, e T não admite subespaço hiperinvariante não-trivial, segue que $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{X}$ ou $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$. No entanto, T tem autovalor e $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, então $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{X}$. Portanto $T = \lambda I$, isto é, T é um operador escalar.

Conclusão: Se um operador (em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1) não tem subespaço hiperinvariante não-trivial e ele comuta com um operador compacto não-nulo, então ele é um operador escalar. Equivalentemente, se um operador não-escalar (em um espaço de Banach complexo com dimensão maior do que 1) comuta com um operador compacto não-nulo, então ele tem subespaço hiperinvariante não-trivial. □

Corolário 3.5 *Todo operador compacto em um espaço de Banach de dimensão maior do que 1 tem subespaço invariante não-trivial, e, se não-escalar, tem subespaço hiperinvariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja T um operador compacto arbitrário definido em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ de dimensão maior do que 1. Se $\mathcal{X}$ é de dimensão finita, então T tem subespaço invariante não-trivial (ver Proposição 2.1). Daí, suponha que $\mathcal{X}$ seja de dimensão infinita. Lembre que, o único operador escalar compacto em $\mathcal{X}$ é o operador nulo (ver, e.g., [20] p. 495), que tem subespaço invariante não-trivial. Logo, se T é um operador compacto não-nulo, então T é não-escalar. Em particular, T comuta com si próprio, donde pelo Teorema de Lomonosov T tem subespaço hiperinvariante não-trivial (logo T tem subespaço invariante não-trivial). Como T é qualquer, todo operador compacto em um espaço de Banach de dimensão maior do que 1 tem subespaço invariante não-trivial, e, se não-escalar, tem subespaço hiperinvariante não-trivial. □

3.3
Extensões do Teorema de Lomonosov

Na primeira seção deste capítulo, quando escrevemos que as generalizações de Lomonosov foram em vão, queríamos dizer que nenhum resultado significativo foi alcançado. No entanto, existe pelo menos uma dessas tentativas que merece atenção. Se dois operadores, digamos T e K, satisfazem a hipótese de Lomonosov, então rank($KT - TK$)= 0. Daughtry [10], demonstra que *se T é um operador (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) que comuta com o operador compacto não-nulo K (também definido em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita), tal que rank($KT - TK$)= 1, então T tem subespaço invariante não-trivial.* De modo que podemos reescrever o resultado de Daughtry para subespaços hiperinvariantes.

Teorema 3.6 *(Uma Extensão do Teorema de Lomonosov) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador não-escalar, com rank($KT - TK$)$\leq$ 1 para algum operador compacto não-nulo $K \in \mathcal{B}_\infty[\mathcal{H}]$. Então, T tem subespaço hiperinvariante não-trivial.*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 134) Com efeito, temos duas possibilidades: rank($KT - TK$)= 0 ou rank($KT - TK$)= 1. Se rank($KT - TK$)= 0, então o problema está resolvido pelo Teorema de Lomonosov. Caso contrário, considere rank($KT - TK$)= 1. Suponha por contradição que T não tem subespaço hiperinvariante não-trivial. Daí, pelo Lema de Lomonosov, existe $L \in \{T\}'$, tal que $N(I - LK) \neq \{0\}$. Como $\{T\}'$ é uma álgebra, então $LK \in \{T\}'$. Agora, considere $C = KT - TK$, segue que

$$(LK)T - T(LK) = LC.$$

Além disso, como a álgebra de operadores compactos é um ideal (ver Proposição 1.3), então LK é um operador compacto não-nulo. Portanto, se $LC = 0$, então $T(LK) = (LK)T$. Equivalentemente, neste caso T é um operador não-escalar que comuta com o operador compacto não-nulo LK, e, assim, tem subespaço hiperinvariante não-trivial (pelo Teorema de Lomonosov), contradição.

Caso contrário, suponha $LC \neq 0$. Como LK é compacto, pela Alternativa de Fredholm (Teorema 1.2), segue que

$$\dim \mathcal{N}(\lambda - LK) = \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} - (LK)^*) < \infty,$$

onde λ é um escalar não-nulo arbitrário. Então, para $S = I - LK$ tem-se

$$0 < \dim \mathcal{N}(S) < \infty.$$

Além disso, se $LC \neq 0$, então $\mathcal{R}(LC) = 1$ (lembre que $\mathcal{R}(C)$=1). Logo $TS - ST = T(I - LK) - (I - LK)T = LC$, e, portanto,

$$\dim \mathcal{R}(TS - ST) = \dim \mathcal{R}(LC) = \dim \mathcal{R}(C) = 1.$$

Por outro lado, LK é compacto implica que $(LK)^* = K^*L^*$ e $\sigma(LK) = \sigma((LK)^*)^*$ (ver, e.g., [22] p. 77). Daí, pelo Lema de Lomonosov (Lema 3.3), tem-se que $1 \in \sigma_P(LK)$, isto é, $1 \in \sigma_P(K^*L^*)$ (ver, e.g., [22] p. 77). Donde, $\{0\} \neq \mathcal{N}(I - K^*L^*) = \mathcal{N}(S^*)$, pela Alternativa de Fredholm. Em outras palavras,

$$0 < \dim(\mathcal{N}(S^*)) < \infty.$$

No entanto, se $0 < \dim \mathcal{N}(S) < \infty$ e $0 < \dim \mathcal{N}(S^*) < \infty$, então $\sigma_P(T) \cup \sigma_P(T^*) \neq \emptyset$ (ver, e.g., [22] p. 134). Logo, $\sigma_P(T) \cup \sigma_P(T^*) \neq \emptyset$ e T é não-escalar, e, portanto, T tem subespaço hiperinvariante não-trivial (ver, e.g., [22] p. 78), contradição.

Conclusão: se rank$(KT - TK)$= 1 então T tem subespaço hiperinvariante não-trivial. □

Apesar de termos demonstrado o teorema acima para espaços de Hilbert, o problema também admite solução para o caso de espaços de Banach. Inclusive, a demonstração original de Daughtry [10] é feita para espaços de Banach. Porém, como o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita, não há perda de genelaridade para o que acabamos fazer.

Outro aspecto interessante do artigo de Daughtry reside em uma consequência do resultado acima. Ao final de seu trabalho, Daughtry chama a atenção para o fato de que o Problema do Subespaço Invariante é equivalente ao caso em que o rank$(KT - TK)\leq 1$ é substituido por rank$(KT - TK)\leq 2$. Isto é, se substituirmos rank$(KT - TK)\leq 1$ por rank$(KT - TK)\leq 2$ no enunciado do Teorema 3.5, e se obtivéssemos uma demonstração para o enunciado assim modificado, então teríamos resolvido o Problema do Subespaço Invariante. De fato, pelo que foi exposto, basta escolher um operador compacto não-nulo K com rank igual a 1 para obtermos tal equivalência.

Sem êxito em encontrar uma resposta definitiva para o Problema do Subespaço Invariante, muitos pesquisadores buscaram uma possível solução na formulação de problemas equivalentes. Nos próximos dois capítulos mostramos três destas reformulações: a técnica de Rota para modelos universais [39]; a abordagem geométrica de Nordgren, Rosenthal e Radjavi [28]; e a teoria de Nagy-Foias para contrações [21].