2
O Problema do Subespaço Invariante

Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador arbitrário e considere a decomposição

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k,$$

onde cada $\mathcal{M}_k$ é um subespaço redutor (logo invariante) para T em $\mathcal{H}$. Portanto, para entender a estrutura de T, basta entendermos o comportamento de cada restrição $T|_{\mathcal{M}_k}$, pois $T(\mathcal{M}_k) \subseteq \mathcal{M}_k$. Apesar de rudimentar, isto ilustra a razão pela qual o estudo de subespaços invariantes é essencial em Teoria de Operadores. Uma vez entendidos, os subespaços invariantes oferecem a possibilidade de se descobrir propriedades importantes sobre a estrutura de um operador. Neste contexto, surge o problema mais famoso em Teoria de Operadores, o Problema do Subespaço Invariante. Ele se resume na seguinte pergunta:

Todo operador tem subespaço invariante não-trivial?

A questão acima segue em aberto até os dias atuais, apesar de já existirem algumas respostas parciais (em particular, resposta negativa para espaços de Banach). Sua importância reside no fato de que para uma resposta afirmativa, este pode ser o início de uma teoria geral sobre a estrutura de operadores. Por outro lado, dizer que um operador T não tem subespaço invariante não-trivial é equivalente à

$$\bigvee \{T^n x\}_{n \geq 0} = \mathcal{X},$$

isto é, o conjunto de todas as combinação linear de uma sequência de potências é denso em um espaço normado $\mathcal{X}$ para cada vetor não-nulo x (ver, e.g., [22] p. 4). Portanto, a apresentação de tal contra-exemplo poderia dar origem a diversos teoremas de aproximação. Não se sabe ao certo quando tal questão foi formulada ou formalizada, porém, por volta de 1930, Von Neumann já pesquisava o assunto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

Neste capítulo nosso intuito é introduzir parte dos resultados tidos como essenciais no assunto. Na primeira seção, destacamos investigações referentes aos espaços onde os operadores estão definidos e também investigações referentes a classe dos operadores compactos, tudo isso com relação ao Problema do Subespaço Invariante. Ao final da mesma, mostramos que o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Partindo desta afirmação, na seção seguinte, voltamos nossa atenção para as classes de operadores definidas em tais espaços (isto é, para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita), onde enunciamos o resultado importante de S. Brown para operadores subnormais, e demonstramos a existência de subespaço invariante não-trivial para operadores normais e quasinormais.

Antes de prosseguirmos, frisamos que a prova de muitos dos teoremas aqui enunciados são demasiadamente extensas ou complexas. Quando este for o caso, apenas iremos enunciar tais resultados (indicando as referências das provas), pois tais demonstrações fogem ao propósito desta dissertação. Um exemplo típico é o resultado de Enflo [13], cuja prova tem cerca de 100 páginas.

2.1 Primeiros Resultados

Seja $P_7(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais com grau no máximo 7, e considere $T \in \mathcal{B}[P_7(\mathbb{R})]$ um operador diferenciação, isto é,

$$Tp = p^{'},$$

para todo p não-nulo em $P_7(\mathbb{R})$, tal que $p^{'} \in P_7(\mathbb{R})$ é a derivada de p. Como a derivada de um polinômio de grau 4 é um polinômio de no máximo grau 4, segue que $T(P_4(\mathbb{R})) \subseteq P_4(\mathbb{R})$, donde $P_4(\mathbb{R})$ é um subespaço linear não-trivial de $P_7(\mathbb{R})$. Por outro lado, todo subespaço linear de dimensão finita é fechado (ver, e.g., [22] p. 5). Portanto, $P_4(\mathbb{R})$ é subespaço não-trivial de $P_7(\mathbb{R})$ invariante para T.

O exemplo acima, serve para mostrar que geralmente operadores com rank finito (i.e., operadores cuja imagem tem dimensão finita) têm diversos subespaços invariantes não-triviais. Como todo operador compacto em um espaço de Hilbert é o limite uniforme de operadores com rank finito (ver, e.g., [20] p. 254), então poderíamos imaginar que esta classe de operadores tem subespaços invariantes não-triviais. Von Neumann [1] encontrou uma técnica elegante de produzir subespaços invariantes não-triviais para esta classe através de sequências de operadores com rank finito. Em outras palavras, ele mostrou que *todo operador compacto em um espaço de Hilbert tem subespaço invariante não-trivial.*

Teorema 2.1 *Todo operador compacto em um espaço de Hilbert tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [1].) □

Embora atribuido a von Neumann, o teorema acima nunca foi publicado, sua existência ficou notória apenas quando Aronszajn e Smith [1] generalizaram este resultado para espaços de Banach. Especula-se que von Neumann nunca submeteu o artigo, pois acreditava que poderia resolver a questão para o caso geral.

Teorema 2.2 *(O Teorema de Aronsjan-Smith) Todo operador compacto em um espaço de Banach tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [1].) □

Anos se passaram até que Bernstein e Robinson [4] refinaram a técnica de Aronszajn-Smith, via "análise heterodoxa"(nonstandard analysis), para um conjunto de operadores um pouco maior que o anterior, os operadores polinomiais compactos. Um operador T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é polinomial compacto, se dado qualquer polinômio não-nulo p tem-se que $p(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i$ é compacto, onde α_i é um escalar e $T^i \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. No mesmo ano, Halmos [16] formalizou o trabalho de Bernstein e Robinson, trazendo-o de volta à análise convencional.

Teorema 2.3 *Todo operador polinomial compacto tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [16].) □

Até agora, todas as respostas obtidas foram para tipos específicos de operadores, em particular, trabalhou-se muito com operadores compactos. Argumentar que tais resultados nos possibilitariam afirmar algo, ainda que parcial, é uma justificativa, apesar de ingênua, válida. No entanto, operadores compactos são objetos importantes de estudo e encontrados em grande número

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

na teoria, basta recordar que todo operador em dimensão finita é compacto. Mesmo já tendo apresentado material razoável sobre esta classe, o próximo resultado merece destaque.

Em [26], Lomonosov surpreende a todos ao provar que:

Teorema 2.4 *(Teorema de Lomonosov - Versão Simplificada) Se um operador (em um espaço de Banach complexo) comuta com um operador compacto não-nulo, então ele tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [26].) □

O Teorema de Lomonosov é definitivo para a classe dos operadores compactos (conforme mostraremos no Capítulo 3). Além disso, o número de operadores que satisfazem a hipotóse de Lomonosov é vastíssimo, por isso tamanha expectativa criada. Porém, como a importância do Teorema de Lomonosov vai além desses dois fatos, optamos por dedicar o próximo capítulo inteiro ao assunto.

Com a descoberta de Lomonosov, acreditou-se que as extensões da técnica de Bernstein-Robinson haviam se tornado obsoletas. Apesar disso, posteriormente, o conceito de quasitriangularidade de Halmos [17] mostrou-se um pouco mais do que uma mera generalização do resultado de Bernstein e Robinson. Na expectativa de encontrar um contra-exemplo, a pesquisa se direcionou no sentido de investigar problemas equivalentes ao Problema do Subespaço Invariante, tema dos Capítulos 4 e 5. Em particular, a noção de quasitriangularidade é utilizada como ferramenta (ver, e.g., [38]). O teorema de Dyer-Porcelli [12] (enunciado a seguir) é um exemplo deste tipo de aplicação.

Teorema 2.5 *Todo operador (em um espaço de Hilbert complexo) tem subespaço invariante não-trivial se, e somente se, todo operador redutor (i.e., um operador cujo todos os subespaços invariantes são redutores) comuta com seu adjunto.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [12].) □

Inúmeras contribuições foram feitas na medida que o foco deslocou-se para os espaços onde os operadores estão definidos, ao invés dos conjuntos que os mesmos pertencem. Nesta direção, Enflo [13] provou que o Problema do Subespaço Invariante tem resposta negativa para o caso em que operador está definido em um espaço de Banach (que não seja Hilbert). Usualmente quando

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

desejamos encontrar um contra-exemplo, trabalhamos com espaços conhecidos e a partir daí tentamos encontrar um elemento ali definido que não satisfaça determinada propriedade. Em seu artigo, Enflo faz justamente o oposto, isto é, ele constrói um espaço particular e determina um contra-exemplo.

Teorema 2.6 *O Problema do Subespaço Invariante tem resposta negativa para o caso de espaços de Banach (que não sejam espaços de Hilbert).*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [13] e [34].) □

A idéia de Enflo é construir uma norma adequada em um espaço de Banach específico, e, depois, mostrar que o Problema do Subespaço Invariante tem solução negativa para este caso. Por causa da característica predominantemente computacional envolvendo a construção da norma e a verificação de suas propriedades, seu artigo levou anos para ser publicado. Além disso, ele sugeriu que esta técnica também daria origem a um outro contra-exemplo para o espaço de Hilbert. Fato que, até o momento, não se concretizou.

Seguindo uma linha diferente daquela proposta por Enflo, Read [34] demonstra que existe um operador no espaço de sequências l^1 que não tem subespaço invariante não-trivial. Lembre que l^p é o espaço de todas as sequências de valores escalares $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\epsilon_k|^p < \infty$. Mesmo produzindo um contra-exemplo mais compreensível do que aquele proposto por Enflo, afinal o espaço l^1 é familiar e concreto; logo em seguida, o autor publica outro artigo [35] sobre o mesmo assunto. Nele, Read mostra a existência de um operador em l^1, tal que a órbita de todo vetor não-nulo sob a ação deste operador é denso em l^1. Em suma, Read consegue um resultado mais forte do que o anterior, onde forte aqui é usado no sentido de ter menos subespaços.

Espaços de Banach são as generalizações mais conhecidas de espaços de Hilbert. Portanto, a priori pode-se pensar que os exemplos de Enflo e Read também são válidos para o último caso. No entanto, isto não é verdade.

Lembre que um espaço dual do espaço normado $\mathcal{X}$, denotado por $\mathcal{X}^*$, é o espaço normado de todos os funcionais contínuos lineares em $\mathcal{X}$. Diz-se que $\mathcal{X}$ é reflexivo, se a isometria linear natural $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ é sobrejetiva, onde $\mathcal{X}^{**}$ é o dual do dual $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$.

Note que as construções acima (de Enflo e Read) são para espaços de Banach não-reflexivos. Como todo espaço de Hilbert é reflexivo (ver, e.g., [20] p. 378), então o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em espaços de Hilbert.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

Ainda nesta direção, cabe uma ressalva sobre o exemplo proposto por Atzmon para espaços nucleares de Frechet. Um espaço nuclear de Frechet é um espaço metrizável localmente convexo completo, tal que a topologia é dada por uma família contável de semi-normas. Em [2], Atzmon mostra que o Problema do Subespaço Invariante tem resposta negativa para espaços de Frechet (como enunciado abaixo).

Teorema 2.7 *Existe um operador sem subespaço invariante não-trivial em um espaço nuclear de Frechet.*

Demonstração: (Ver, e.g., [2].) $\square$

Finalizamos esta seção com duas proposições: a primeira é uma consequência direta do Teorema de Lomonosov; ao passo que a outra determina os espaços os quais o Problema do Subespaço Invariante se refere.

Proposição 2.1 *Todo operador definido em um espaço de Banach complexo de dimensão finita maior do que 1 tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: Com efeito, seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ arbitrário, onde $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach complexo de dimensão finita maior do que 1. Se T for um operador nulo (i.e., $0x = 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$), então T tem subespaço invariante não-trivial. Daí, suponha que $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ é um operador não-nulo. Como todo operador definido em um espaço normado de dimensão finita é compacto (ver Proposição 1.2), segue que T é compacto. Além disso, T comuta com si próprio. Donde, pela versão simplificada do Teorema de Lomonosov (Teorema 2.4) tem-se que T tem subespaço invariante não-trivial. Portanto, como T é arbitrário, vale para todo T em $\mathcal{X}$, isto é, todo operador definido em um espaço de Banach complexo de dimensão finita maior do que 1 tem subespaço invariante não-trivial. $\square$

Proposição 2.2 *O Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita.*

Demonstração: (Ver, e.g., [20] p. 495) Com efeito, o Teorema 2.6 estabelece que existe um operador definido em um espaço de Banach complexo não-reflexivo sem subespaço invariante não-trivial. Daí, seja T um operador em um

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Note que se $\mathcal{H}$ é real, então T pode não ter subespaço invariante não-trivial. De fato, o operador

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

em $\mathbb{R}^2$ não tem autovalores reais. Por outro lado, $\mathcal{M}$ é um subespaço T-invariante não-trivial em $\mathbb{R}^2$, apenas se $\dim(\mathcal{M}) = 1$. Ora, se T não tem autovalor real, então não existe x não-nulo em $\mathcal{H}$, tal que $Tx = \lambda x$ para algum λ escalar. Equivalentemente, não existe $\mathcal{M}$ invariante para T (pois T não possui autovalores reais). Portanto, T não admite subespaço invariante não-trivial. Além disso, a Proposição 2.1 mostra que o Problema do Subespaço Invariante tem resposta positiva para espaço de Banach complexos de dimensão finita maior do que 1. Em particular, a Proposição 2.1 também é válida para espaços de Hilbert complexos. Portanto, o Problema do Subespaço Invariante se resume à operadores definidos em um espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita.

Agora, suponha que $T \in \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert complexo não-separável de dimensão infinita. Considere $\{T^n x\}_{n\geq 0}$ a órbita de x sob T, onde x é um vetor não-nulo em $\mathcal{H}$, segue que $\bigvee\{T^n x\} \neq \{0\}$ é um subespaço invariante para T. Como $\mathcal{H}$ é não-separável, então não existe um conjunto contável que span $\mathcal{H}$ (ver, e.g., [20] p. 211). Daí, $\bigvee\{T^n x\} \neq \mathcal{H}$ e, portanto, todo operador em um espaço de Hilbert complexo não-separável tem subespaço invariante não-trivial.

Conclusão: O problema do subespaço invariante permanece em aberto para operadores definidos em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita. □

2.2 Resultados para Classes de Operadores

Suponha que estejamos investigando as propriedades de um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ arbitrário. Daqui em diante, $\mathcal{H}$ passará a denotar um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita . Uma alternativa interessante seria dividí-lo em "partes", de modo que cada um desses "pedaços"determinasse certo resultado acerca de T. Esta é a idéia de decompor um operador, isto é, decomposição é o mesmo que separar um operador em "partes mais simples"que a original.

Duas das decomposições mais conhecidas são as decomposições Polar e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

Cartesiana. Apesar de importantes, tais decomposições "dividem" um operador arbitrário via soma ordinária e produto, que por sua vez são operações que não preservam subespaços invariantes. Elas não transferem subespaços invariantes das "partes" para o operador original. Entretanto, conseguimos suprir essa deficiência ao lidarmos com a noção de soma direta ao invés das operações anteriores. Note que "soma direta" de operadores equivale a "diagonalização em blocos" das matrizes (infinitas) desses operadores. Neste sentido, o Teorema Espectral é, talvez, o resultado mais importante para estes tipos de problemas.

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal, se ele comuta com seu adjunto, isto é, se

$$T^*T = TT^*.$$

Dito de outra maneira, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal, se

$$D = T^*T - TT^* = 0,$$

tal que $D \equiv [T^*, T]$ é chamado de auto-comutador de T. Em sua forma reduzida, o Teorema Espectral determina, de maneira informal, que todos operadores normais compactos podem ser reescritos como uma soma (ordinária) contável ponderada de projeções, que por sua vez são mais "simples" que o operador original.

Seja Ω um conjunto em $\mathbb{C}$, e considere $\mathcal{A}_\Omega$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Borel em Ω. Uma medida espectral (complexa) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, é um mapa $E : \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que

a) $E(\Lambda)$ é uma projeção ortogonal para todo $\Lambda \in \mathcal{A}_\Omega$,

b) $E(\emptyset) = 0$ e $E(\Omega) = I$,

c) $E(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = E(\Lambda_1)E(\Lambda_2)$ para todo $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{A}_\Omega$,

d) $E(\bigcup_k \Lambda_k) = \sum_k E(\Lambda_k)$ sempre que $\{\Lambda_k\}$ é uma coleção contável de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{A}_\Omega$.

Lembre que uma projeção ortogonal P em $\mathcal{H}$ é um operador idempotente (isto é, $P^2 = P$), onde $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

Teorema 2.8 *(Teorema Espectral) Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal, então existe uma única medida espectral $E : \mathcal{A}_{\sigma(T)} \to \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Se Λ é um subconjunto não-vazio relativamente aberto de $\sigma(T)$, então $E(\Lambda) \neq 0$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

DEMONSTRAÇÃO:(Ver,e.g.,[19] p.77.) □

O Teorema Espectral é uma das ferramentas mais importantes da Teoria de Operadores, com aplicações em diversas outras áreas da Matemática. Seu enunciado não se restringe apenas a classe dos operadores normais compactos, pelo contrário, engloba todos os operadores normais. Portanto, ele nos permite determinar praticamente tudo sobre a estrutura destes tipos de operadores. Em especial, graças à ele, aliado ao Teorema de Fuglede, demonstra-se que *todo operador normal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem subespaço invariante não-trivial.*

Teorema 2.9 *(Teorema de Fuglede) Seja* $T = \int \lambda dE_\lambda$ *uma decomposição espectral de um operador normal em* $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. *Se* $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ *comuta com* T, *então* S *comuta com* $E(\Lambda)$ *para todo* $\Lambda \in \mathcal{A}_{\sigma(T)}$.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver,e.g., [19] p. 81) □

O Lema a seguir (Lema 2.1) garante que um operador T em $\mathcal{H}$ comuta com uma projeção ortogonal não-trivial (i.e., uma projeção ortogonal que não é o operador nulo ou o operador identidade) também definida em $\mathcal{H}$ se, e somente se, T admite subespaço invariante não-trivial. Por outro lado, a partir da definição de medida espectral, sabe-se que $E(\Lambda)$ é uma projeção ortogonal sempre que E for uma medida espectral. Ora, mas pelo Teorema de Fuglede, sabe-se que se T é um operador normal e S é um operador que comuta com T, então $SE(\Lambda) = E(\Lambda)S$. Daí, para $S = T$, temos que T comuta com $E(\Lambda)$ que é uma projeção ortogonal. Portanto, se $E(\Lambda)$ for um projeção ortogonal não-trivial, segue que *todo operador normal* T *tem subespaço invariante não-trivial.*

Lema 2.1 *Seja* T *um operador em um espaço de Hilbert complexo* $\mathcal{H}$. *Segue que* T *é um operador redutível se, e somente se,* T *comuta com uma projeção ortogonal não-trivial (i.e., uma projeção ortogonal que não é o operador nulo ou o operador identidade).*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 35.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador qualquer que comuta com a projeção ortogonal não-trivial arbitrária $P \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Vamos mostrar que T é redutível. Se T comuta com P, então $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço invariante para T. De fato, como P é idempotente, segue que $\mathcal{R}(P)$ é o conjunto de todos os pontos fixos de P (i.e., $\mathcal{R}(P) = \{x \in \mathcal{H};\ Px = x\}$), veja, por exemplo, [20] p. 70. Daí, para $x \in \mathcal{H}$ arbitrário, tem-se que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

$Tx = PTx$, e, assim, $Tx \in \mathcal{R}(P)$ (pois pela igualdade anterior tem-se que Tx é um ponto fixo de P). Em outras palavras, $T(\mathcal{R}(P)) \subseteq \mathcal{R}(P)$ (pois x é qualquer), isto é, $\mathcal{R}(P)$ é T-invariante. Além disso, se P é uma projeção ortogonal, então $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço em $\mathcal{H}$ (ver, e.g., [20] p. 367). Portanto, $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço T-invariante em $\mathcal{H}$. Por outro lado, P é um operador auto-adjunto (ver, e.g., [18] p. 12), então $(TP)^* = PT^*$ e $(PT)^* = T^*P$. Logo, $PT^* = T^*P$. Analogamente, pode-se mostrar que $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço invariante para T^*. Portanto, $\mathcal{R}(P)$ é invariante para T e para T^*. Equivalentemente $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço redutor para T (ver Proposição 1.6). Para completar a demonstração de que T é redutível, basta mostrar que $\mathcal{R}(P)$ é não-trivial. Ora, note que $\{0\} \neq \mathcal{R}(P) \neq \mathcal{H}$ se, e somente se, existe $x_0 \in \mathcal{H}$; $Px_0 = x_0 \neq 0$, e existe $y \in \mathcal{H}$; $Px_1 \neq y$, $\forall x_1 \in \mathcal{H}$ (em particular, $Py \neq y$). Em outras palavras, $0 \neq P \neq I$ (i.e., P é não-trivial se, e somente se, $\{0\} \neq \mathcal{R}(P) \neq \mathcal{H}$). Logo, $\mathcal{R}(P)$ é um subespaço redutor não-trivial para T, isto é, T é um operador redutível em $\mathcal{H}$.

Reciprocamente, seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador redutível. Vamos mostrar que T comuta com uma projeção ortogonal não-trivial em $\mathcal{H}$. Se T é um operador redutível, então existe um subespaço invariante não-trival $\mathcal{M}$ para T, cujo complemento ortogonal $\mathcal{M}^\perp$ também é invariante para T (pela definição de operador redutível). Uma das versões do Teorema da Projeção estabelece que existe uma única projeção ortogonal $P \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ com $\mathcal{R}(P) = \mathcal{M}$ (ver, e.g., [20] p. 368). Donde, se $\mathcal{R}(P) = \mathcal{M}$, então $\mathcal{N}(P) = \mathcal{M}^\perp$ (ver, e.g., [20] p. 367). Isto é, para cada $y \in \mathcal{H}$ existe um único $u \in \mathcal{M}$ e um único $v \in \mathcal{M}^\perp$; $y = u + v$. Daí, fixe um $x \in \mathcal{H}$ qualquer, segue que

$$PTPx = PTP(u+v) = PTPu + PTPv = PTu + PTv,$$

pois P é linear e $\mathcal{R}(P)$ é o conjunto de todos os pontos fixos de P. Além disso, $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{N}(P)$ e $\mathcal{M} = \mathcal{R}(P)$ são T-invariantes, ou seja, $Tv \in \mathcal{N}(P)$ e $Tu \in \mathcal{R}(P)$ (i.e., $PTv = 0$ e $PTu = Tu$);

$$PTPu + PTPv = PTu = Tu = TPu = TP(x-v) = TPx - TPv = TPx,$$

onde usamos que $u \in \mathcal{M} = \mathcal{R}(P)$, $u = x - v$, linearidade de P e que $v \in \mathcal{M}^\perp = \mathcal{N}(P)$ nas igualdades 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Portanto, $PTP = TP$. Por outro lado, como $\mathcal{M} = \mathcal{R}(P)$ e $\mathcal{M}$ é um subespaço não-trivial, então $\{0\} \neq \mathcal{R}(P) \neq \mathcal{H}$. Em outras palavras, P é uma projeção ortogonal não-trivial sobre $\mathcal{M}$; $PTP = TP$.

Agora, considere a projeção ortogonal $E = I - P$ em $\mathcal{H}$, tal que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

$\mathcal{R}(E) = \mathcal{N}(P)$ e $\mathcal{N}(E) = \mathcal{R}(P)$. Analogamente ao caso anterior, pode-se mostrar que E é uma projeção ortogonal não-trivial sobre $\mathcal{M}^{\perp}$; $ETE = TE$. Daí, substituindo E por $I - P$,

$$ETE = (I-P)T(I-P) = T - TP - PT + PTP = T(I-E) = T - TP,$$

isto é, $PTP = PT$. Portanto, se T é redutível, existe uma projeção ortogonal não-trivial P em $\mathcal{H}$, tal que $TP = PTP = PT$, isto é, existe uma projeção ortogonal não-trivial P em $\mathcal{H}$; P comuta com T. □

Teorema 2.10 *Todo operador normal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 84.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador normal arbitrário, então existe uma única medida espectral $E : \mathcal{A}_{\sigma(T)} \to \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que

$$T = \int \lambda dE_{\lambda}$$

pelo Teorema Espectral (Teorema 2.8). Note que, se $\sigma(T)$ tem um único ponto, digamos $\sigma(T) = \{\mu\}$, segue que

$$T = \int_{\mu} \lambda dE_{\lambda} = \mu \int_{\lambda} dE_{\lambda} = \mu I,$$

pela unicidade da medida espectral. Isto é, neste caso T é um operador escalar e, assim, todo subespaço de $\mathcal{H}$ reduz T. Portanto, se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal e escalar, então T tem subespaço invariante não-trivial.

Agora, suponha que T não é um operador escalar, segue que $\sigma(T)$ tem mais de um ponto, digamos $\lambda, \mu \in \sigma(T)$, com $\lambda \neq \mu$. Considere os seguintes conjuntos em $\mathcal{A}_{\sigma(T)}$:

$$\Lambda_{\lambda} = \sigma(T) \cap \mathbb{D}_{\lambda} \text{ e } \Lambda_{\lambda}' = \sigma(T) \backslash \mathbb{D}_{\lambda}^{-},$$

onde $\mathbb{D}_{\lambda}$ um disco aberto de raio $\frac{1}{2}|\lambda - \mu|$ centrado em μ. Note que Λ_{λ} e Λ_{λ}' formam uma partição de $\sigma(T)$. Donde, pela definição de medida espectral (em particular dos ítens (a), (b) e (d)) tem-se que

$$I = E(\sigma(T)) = E(\Lambda_{\lambda} \cup \Lambda_{\lambda}') = E(\Lambda_{\lambda}) + E(\Lambda_{\lambda}').$$

Além disso, como $\sigma(T) \cap \mathbb{D}_{\lambda}$ e $\sigma(T) \backslash \mathbb{D}_{\lambda}^{-}$ são subconjuntos não-vazios relativamente abertos de $\sigma(T)$ (pois $\Lambda_{\lambda} = \sigma(T) \cap \mathbb{D}_{\lambda}$ e $\sigma(T) \backslash \mathbb{D}_{\lambda}^{-} \subseteq \Lambda_{\lambda}'$), então

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

$E(\Lambda_\lambda) \neq 0$ e $E(\Lambda'_\lambda) \neq 0$. Logo, $0 \neq E(\Lambda_\lambda) = I - E(\Lambda'_\lambda) \neq I$ (pela expressão acima). Equivalentemente, $E(\Lambda_\lambda)$ é uma projeção ortogonal não-trivial.

Por outro lado, pelo Teorema de Fuglede (Teorema 2.9) tem-se que se S é um operador em $\mathcal{H}$ que comuta com T, então $SE(\Lambda_\lambda) = E(\Lambda_\lambda)S$. Em particular, como T comuta com si próprio, segue que T comuta com uma projeção ortogonal não-trivial $E(\Lambda_\lambda)$. Portanto, T é um operador redutível (ver Lema 2.1), ou seja, T possui subespaço invariante não-trivial.

Conclusão: Se T é um operador normal em $\mathcal{H}$, então T tem subespaço invariante não-trivial. Como T é qualquer, todo operador normal definido em um espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita admite subespaço invariante não-trivial. $\square$

A noção de subespaço hiperinvariante é uma generalização do conceito de subespaço invariante. Dizemos que um subespaço $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ é hiperinvatiante para um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, se ele é invariante para todo operador que comuta com T. Partindo dessa definição pode-se generalizar o resultado anterior para o caso de subespaços hiperinvariantes. De fato, como $E(\Lambda_\lambda)$ é uma projeção ortogonal não-trivial (ver a prova do teorema anterior), então $\{\mathcal{R}(E(\Lambda))\}_{\Lambda \in \mathcal{A}_{\sigma(T)}}$ é uma família de subespaços redutores para todo operador que comuta com T pelo Lema 2.1. Portanto, aplicando o Teorema de Fuglede (Teorema 2.9), verifica-se que *todo operador normal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem um subespaço hiperinvariante não-trivial.*

Ainda que não seja uma das tarefas mais díficeis, a prova da existência de subespaço invariante não-trivial para tais operadores foi central. Ela deu origem a uma linha de pesquisa para o Problema do Subespaço Invariante, cujo objetivo consiste em generalizar o resultado acima (isto é, o fato de que todo operador normal tem subespaço invariante não-trivial) para as extensões dos operadores normais. Nesta seção, vamos abordar alguns dos resultados desenvolvido para as generalizações dos operadores normais.

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é quasinormal, se

$$T^*TT = TT^*T.$$

Equivalentemente, T é quasinormal se $DT = 0$, onde D é o auto-comutador de T definido anteriormente.

Proposição 2.3 *Todo operador normal é quasinormal.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador normal, então $D = 0$. Portanto, $DT = 0$, e, assim, T é quasinormal. $\square$

É quase imediato, a partir do último teorema, provar que a afirmativa para o Problema do Subespaço Invariante também é verdadeira para o caso quasinormal. Em outras palavras, *todo operador quasinormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem subespaço invariante não-trivial.*

Lema 2.2 *Seja T um operador arbitrário em um espaço normado $\mathcal{X}$, então $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{R}(T)^-$ são subespaços hiperinvariantes para T.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 3.) Considere $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ arbitrário, e seja $L \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ um operador que comuta com T (i.e., $TL = LT$). Tome $x \in \mathcal{N}(T)$ arbitrário, se L comuta com T,

$$TLx = LTx = 0,$$

isto é, $Lx \in \mathcal{N}(T)$. Como $x \in \mathcal{N}(T)$ é qualquer, segue que $L(\mathcal{N}(T)) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Equivalentemente, $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço invariante para L. Portanto, $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço hiperinvariante para T (pois L é um operador arbitrário que comuta com T). Analogamente, seja $x \in \mathcal{H}$ arbitrário, então

$$LTx = TLx,$$

pois T comuta com L. Como x é qualquer, tem-se que $L(\mathcal{R}(T)) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Por outro lado, como L é um mapa contínuo (ver Proposição 1.1), segue que $L(\mathcal{R}(T)^-) \subseteq L(\mathcal{R}(T))^-$ (ver, e.g., [20] p. 182). Além disso, pode-se verificar que se L é uma função contínua e $L(\mathcal{R}(T)) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então $L(\mathcal{R}(T))^- \subseteq \mathcal{R}(T)^-$ (ver, e.g., [20] p. 182). Logo,

$$L(\mathcal{R}(T))^- \subseteq L(\mathcal{R}(T))^- \subseteq \mathcal{R}(T)^-,$$

isto é, $\mathcal{R}(T)^-$ é um subespaço invariante para L. Portanto, $\mathcal{R}(T)^-$ é um subespaço hiperinvariante para T (pois L é arbitrário). $\square$

Teorema 2.11 *Todo operador quasinormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 84.) Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador quasinormal arbitrário. Pela definição de operador quasinormal, segue que $DT = 0$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

onde D é o auto-comutador de T (i.e., $D = T^*T - TT^*$). Então, existem duas possibilidades para $DT = 0$: ou $D = 0$; ou $D \neq 0$ e $DT = 0$. Se $D = 0$, então T é normal. Daí, pelo Teorema 2.10 (i.e., todo operador normal em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial), segue que T tem subespaço invariante não-trivial.

Agora, suponha que $D \neq 0$ e $DT = 0$. Note que se $D \neq 0$, então $T \neq 0$. De fato,

$$T = 0 \Rightarrow D = T^*T - TT^* = 0 - 0 = 0.$$

Equivalentemente, provamos que $D \neq 0 \Rightarrow T \neq 0$ pela contra-positiva. Logo, $\mathcal{R}(T) \neq \{0\}$ (pois $T \neq 0$). Além disso, se $DT = 0$, segue que

$$T(\mathcal{N}(D)) \subseteq T(\mathcal{H}) = \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(D).$$

Ora, acabamos de verificar que $\mathcal{R}(T) \neq \{0\}$, donde $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(D)$. Assim, $\mathcal{N}(D) \neq \{0\}$ é um subespaço T-invariante. Por outro lado, $\mathcal{N}(D) \neq \mathcal{H}$, pois $D \neq 0$. Portanto,

$$\{0\} \neq \mathcal{N}(D) \neq \mathcal{H}$$

é um subespaço invariante não-trivial para T.

Note que $\mathcal{R}(T)^- \subseteq \mathcal{N}(D)^-$ (pois $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(D)$, veja, por exemplo, [20] p. 182). Como $\mathcal{N}(D)$ é fechado, segue que $\mathcal{N}(D)^- = \mathcal{N}(D)$. Donde,

$$\{0\} \neq \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)^- \subseteq \mathcal{N}(D) \neq \mathcal{H}$$

pelo que verificamos no parágrafo anterior. Equivalentemente, $\mathcal{R}(T)^-$ é um subespaço não-trivial. Além disso, o Lema 2.2 estabelece que $\mathcal{R}(T)^-$ é sempre um subespaço invariante para T. Portanto, $\mathcal{R}(T)^-$ é um subespaço invariante não-trivial para T.

Resumindo: se $D \neq 0$ e $DT = 0$, então

$$\{0\} \neq \mathcal{N}(D) \neq \mathcal{H} \text{ e } \{0\} \neq \mathcal{R}(T) \neq \mathcal{H}$$

são dois subespaços invariantes não-triviais para T.

Conclusão: Em ambos os casos T admite subespaço invariante não-trivial. Como T é qualquer, segue que todo operador quasinormal em $\mathcal{H}$ tem subespaço invariante não-trivial. □

Mesmo significativas, não tivemos grandes dificuldades em deduzir as respostas para classes normais e quasinormais. O mesmo não ocorre a partir

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

de agora, anos se passaram até que S. Brown [7] mostrou que *todo operador subnormal tem subespaço invariante não-trivial.*

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é subnormal, se existe um espaço de Hilbert $\mathcal{K}$, com $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, e um operador normal N em $\mathcal{K}$, tal que $\mathcal{H}$ é N-invariante (isto é, $N(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$) e T é a restrição de N em $\mathcal{H}$ (ou seja, T$= N|_{\mathcal{H}}$).

Proposição 2.4 *Todo operador quasinormal é subnormal.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver,e.g., [20] p. 445.) □

A descoberta de S. Brown é considerada uma das mais importantes na área, pois esse problema resistiu a inúmeras tentativas. Em seu artigo, assim como Lomonosov, ele propõe uma nova técnica para a resolução de problemas envolvendo subespaços invariantes. Sua prova é demasiadamente técnica e extensa, de modo que só vamos enunciar o resultado.

Teorema 2.12 *Todo operador subnormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) tem subespaço invariante não-trivial.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [7].) □

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA

Muito se trabalhou em torno da técnica de S. Brown, inclusive, através de ferramentas algébricas, Thomson [41] obteve uma prova menor e mais simples do que aquela apresentada por S. Brown. Ainda existem outras duas classes de operadores que merecem ser destacadas, os operadores hiponormais e os normalóides, respectivamente.

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é hiponormal, se

$$TT^* \leq T^*T.$$

Em outras palavras, T é hiponormal se, e somente se, $D \geq 0$. Até hoje não sabemos se existe ou não subespaço invariante não-trivial para os operadores hiponormais (i.e., se todo operador hiponormal tem subespaço invariante não-trivial). Mesmo assim, o quadro não é tão desanimador quanto parece. No último capítulo, veremos que S. Brown [6] chegou muito perto de uma resposta positiva, ao mostrar que *todo operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial tem espectro com interior vazio.*

Proposição 2.5 *Todo operador subnormal é hiponormal.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 446.) □

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normalóide, se

$$r(T) = \|T\|$$

(lembre que $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$). A próxima proposição garante que o conjunto do operadores normalóides inclui todas as classificações anteriores.

Proposição 2.6 *Todo operador hiponormal é normalóide.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 447.) □

Corolário 2.1 *As classes anteriormente apresentadas estão relacionadas pela seguinte relação de inclusão própria:*

$$\textit{Normal} \subset \textit{Quasinormal} \subset \textit{Subnormal} \subset \textit{Hiponormal} \subset \textit{Normalóide}$$

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 447.) □

Todo contra-exemplo obtido, até hoje, de operadores (em espaços de Banach não-reflexivos) sem subespaço invariante não-trivial foram para o caso não-normalóide (ver, e.g., [3] p. 339). Além disso, sabe-se que [30] se existe um operador (em espaço de Hilbert) sem subespaço invariante não-trivial, então existe um operador normalóide sem subespaço invariante não-trivial. Daí, uma vez estabelecida a resposta para pergunta, "todo operador normalóide tem subespaço invariante não-trivial?", obtém-se uma solução para o Problema do Subespaço Invariante (para o seu caso geral).

No próximo capítulo, voltamos nossa atenção para o Teorema de Lomonosov. Ali, vamos exibir as provas de Hilden e Lomonosov, além de estabelecer as razões pelas quais esse resultado teve um grande impacto na teoria.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912939-CA