1
Introdução

Ao trabalharmos com operadores [1], muitas vezes é interessante analisá-los em subespaços dos espaços originais. A justificativa para isso é a mais simples possível: uma vez restringidos, torna-se mais fácil estabelecer as propriedades sobre o comportamento de tais operadores. Neste contexto, surge a questão em aberto mais famosa em Teoria de Operadores, o chamado Problema do Subespaço Invariante. Sua importância reside no fato de que para uma resposta afirmativa, este pode ser o início de uma teoria geral sobre a estrutura de operadores em espaços de Hilbert. Por outro lado, se negativa, a apresentação de tal contra-exemplo daria origem a diversos teoremas de aproximação.

Apesar de existirem algumas respostas parciais para este problema, o mesmo permanece sem solução para o caso geral de operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Este trabalho tem como objetivo realizar um levantamento dos principais resultados relativos a essa questão, e apresentar um exemplo de como poderia ser o espectro (i.e., o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - T)$ não tem uma inversa contínua) de um operador hiponormal [2] (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) que não tenha subespaço invariante não-trivial [3] (caso tal operador exista). Para isso, dividimos esta dissertação em sete capítulos.

O primeiro capítulo é de carater introdutório; isto é, nele estabelecemos as noções fundamentais para a compreensão do restante do texto. O assunto começa a ser trabalhado, de fato, no capítulo seguinte, onde estabelecemos diversos dos resultados tidos como clássicos sobre o tema, por exemplo, os contra-exemplos de Enflo [13] e Read [34] para espaços de Banach.

O Teorema de Lomonosov é considerado, até hoje, um dos resultados mais importantes do tema, por esse motivo dedicamos um capítulo inteiro, Capítulo 3, a este assunto. Nesta etapa, demonstramos suas duas versões, e

[1] Operadores são transformações lineares limitadas de um espaço normado nele mesmo.

[2] Um operador T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é hiponormal, se $T^*T - TT^* \geq 0$, onde T^* em $\mathcal{H}$ é o adjunto de T.

[3] Diz-se que o subespaço $\mathcal{M}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é invariante para um operador T em $\mathcal{H}$, se $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Além disso, $\mathcal{M}$ é não-trivial, se $0 \neq \mathcal{M} \neq \mathcal{H}$

explicamos os motivos que o levaram a se destacar.

Paralelamente a literatura até então exposta, os problemas equivalentes procuram, de uma maneira alternativa, encontrar uma resposta para o Problema do Subespaço Invariante. São inúmeras tais reformulações. Em particular, a técnica de Rota [39], a abordagem geométrica de Nordgren, Rosenthal e Radjavi [28] e a teoria de Nagy-Foias para contrações [18], serão aqui consideradas. Reservamos o espaço de dois capítulos para abordar estas formulações. No Capítulo 4 apresentamos a técnica de Rota, e, no Capítulo 5, os demais problemas.

No início dessa introdução, mencionamos que o Problema do Subespaço Invariante permanece em aberto para operadores definidos em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. Por outro lado, ao final do Capítulo 2, concluimos que a pergunta ainda não tem solução para a classe dos hiponormais (i.e., não se sabe se todo operador hipornormal tem subespaço invariante não-trivial). No Capítulo 6, investigamos o que pode ser estabelecido com relação as propriedades de tais operadores e construímos um exemplo de como seria o espectro de um operador hiponormal sem subespaço invariante não-trivial, caso exista tal operador. Por fim, o último capítulo desta dissertação sintetiza as principais idéias expostas ao longo do texto.

Conforme frisado, vamos dedicar o restante deste capítulo a um resumo de algumas das definições e resultados tidos como básicos para a leitura deste texto. Entedemos por básicos, aqueles teoremas e noções fundamentais já consolidados na literatura que serão utilizados ao longo do texto. Vale a ressalva de que as proposições, corolários e teoremas enunciados neste capítulo não serão demonstrados, pois este não é o objetivo do capítulo, mas serão todos referenciados à literatura pertinente. Dividimos esta resenha em duas partes: teoria de operadores, e espectro. Na primeira etapa, definimos o que são operadores, quais são suas propriedades e estabelecemos algumas notações. Depois discutimos sobre seu espectro, onde determinamos a partição clássica de um espectro e dois resultados centrais, a fórmula de Gelfand-Beurling e a Alternativa de Fredholm, que serão necessários em capítulos subsequentes.

1.1 Teoria de Operadores

Antes de prosseguirmos com a revisão sobre Teoria de Operadores, vamos estabelecer algumas notações que nos serão úteis. Um espaço de Hilbert arbitrário sempre será denotado por $\mathcal{H}$, ao passo que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ representam o corpo dos reais e dos complexos, respectivamente. Usamos a notação $\mathbb{N}$, para nos referirmos ao conjunto dos números naturais, tal que $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Considere $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ dois espaços de Hilbert quaisquer, segue que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ representa sua soma direta (i.e., o produto Cartesiano $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ munido da álgebra e topologia natural). Um subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ é um subespaço, se $\mathcal{M}$ é um subespaço linear fechado em $\mathcal{H}$, isto é, $\mathcal{M}$ é um subespaço linear do espaço do linear $\mathcal{H}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}^-$, onde $\mathcal{M}^-$ é o fecho de $\mathcal{M}$. Além disso, o complemento ortogonal do subespaço $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M}^\perp$, é conjunto dos elementos $y \in \mathcal{H}$, tal que $x \perp y$ para todo $x \in \mathcal{M}$. O Teorema da Projeção estabelece que *todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser decomposto como*

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp,$$

veja, por exemplo, [20] p. 339. Isso justifica a notação $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}^\perp$.

Uma transformação linear T de um espaço normado $\mathcal{X}$ para o espaço normado $\mathcal{Y}$ é limitada, se existe uma constante $\beta \geq 0$, tal que

$$\|Tx\| \leq \beta \|x\|,$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Proposição 1.1 *Uma transformação linear do espaço normado $\mathcal{X}$ para o espaço normado $\mathcal{Y}$ é limitada se, e somente se, ela é contínua*

Demonstração: (Ver, e.g., [20] p. 216.) □

O núcleo de T é o subespaço de $\mathcal{X}$ definido como

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{X} : Tx = 0\}.$$

A imagem de T é o subespaço linear de $\mathcal{Y}$ definido como

$$\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{X}) = \{y \in \mathcal{Y} : y = Tx \text{ para algum } x \in \mathcal{X}\}.$$

Denominamos a dimensão da $\mathcal{R}(T)$ por $\operatorname{rank}(T)$.

O conjunto de todas as transformações lineares limitadas do espaço normado $\mathcal{X}$ para o espaço normado $\mathcal{Y}$ é denotado por $\mathcal{B}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$.

Uma transformação linear $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ é invertível, se existe uma inversa $T^{-1} \in \mathcal{B}[\mathcal{R}(T), \mathcal{X}]$. Equivaletemente, T é invertível se T é limitada inferiormente, isto é, existe uma constante $\alpha > 0$, tal que

$$\alpha \|x\| \leq \|Tx\|,$$

para todo $x \in \mathcal{X}$ (ver, e.g., [20] p. 223). Denotamos o conjunto de todas as transformações lineares limitadas invertíveis em $\mathcal{B}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ por $\mathcal{G}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$.

Um operador é uma transformação linear limitada (contínua) de um espaço normado nele mesmo, isto é, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. A seguir exibimos três exemplos de classes de operadores.

Exemplo 1.1 Sejam l^p_+ o conjunto das sequências infinitas de valores escalares $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, para $1 \leq p \in \mathbb{R}$, e l^∞_+ o conjunto das sequências infinitas de valores escalares $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty$. Denote l_+ por l^p_+ ou l^∞_+. O mapa $S_+ : l_+ \to l_+$ dado por

$$S_+(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...),$$

com $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_+$, é um operador chamado shift unilateral.

Exemplo 1.2 Uma contração é um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tal que $\|T\| \leq 1$, isto é,

$$\|Tx\| \leq \|x\|,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Caso $\|T\| < 1$, dizemos que T é uma contração estrita.

Os operadores compactos compõe uma classe importante, inclusive, os primeiros resultados sobre o Problema do Subespaço Invariante foram investigados para essa classe. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ é compacto, se ele mapeia subconjuntos limitados no espaço normado $\mathcal{X}$ em subconjuntos relativamente compactos em $\mathcal{X}$.

Exemplo 1.3 O operador diagonal, $D_\alpha \in \mathcal{B}[l^p_+]$ denotado por

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & \\ & \alpha_1 & \\ & & ... \end{pmatrix},$$

onde $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^\infty_+$. Segue que D_α é um operador compacto se, e somente se, $\alpha_k \to 0$ para $k \to \infty$ (ver, e.g., [20] p. 254).

Proposição 1.2 *Se $\mathcal{X}$ é um espaço normado de dimensão finita e $\mathcal{Y}$ é um espaço normado arbitrário, então toda transformação linear limita $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tem rank finito e é compacta.*

Demonstração: (Ver, e.g., [20] p. 251.) □

A coleção de todos os operadores compactos definidos em um espaço normado $\mathcal{X}$ é denotada por $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$. Pela Proposição 1.2 tem-se que $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}] = \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ sempre que $\mathcal{X}$ for de dimensão finita (ver, e.g., [20] p. 252). O próximo resultado garante que se T é um operador compacto em $\mathcal{X}$ e K é qualquer operador em $\mathcal{X}$ (ou se T é um operador qualquer em $\mathcal{X}$ e se K é um operador compacto em $\mathcal{X}$ - i.e., $T \in \mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$ e $K \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$; ou $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ e $K \in \mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$), então TK ou KT pertencem à $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$. Equivalentemente, $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$ é um ideal bilateral. Lembre que um ideal $\mathcal{I}$ é uma subálgebra de uma álgebra $\mathcal{A}$, tal que o produto de todo elemento de $\mathcal{I}$ com um elemento de $\mathcal{A}$ é novamente um elemento pertencente à $\mathcal{I}$.

Proposição 1.3 *Se $\mathcal{X}$ é um espaço normado, então $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{X}]$ é um ideal bilateral da álgebra normada $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$.*

Demonstração: (Ver, e.g., [20] p. 253.) □

Seja T um operador no espaço de normado $\mathcal{X}$, o span de T é o menor subespaço linear de $\mathcal{X}$ que inclui T. Notação:

$$\bigvee T = (\mathrm{span} T)^-.$$

Já cobrimos parte do material necessário sobre operadores, porém ainda faltam algumas considerações pontuais. Em particular, iremos voltar nossa atenção para espaços de Banach e de Hilbert, respectivamente. Com relação ao primeiro, vamos estabelecer a noção de span da órbita, essencial em problemas envolvendo aproximação de espaços. Posteriormente, definimos os tipos de convergência para uma sequência de potências em um espaço de Hilbert e encerramos com a noção de subespaço invariante.

Seja T um operador em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ e considere $x \in \mathcal{X}$ um vetor arbitrário. A imagem da sequência de potências $\{T^n x\}_{n\geq 0}$ é chamada de órbita de x sob T.

Proposição 1.4 *Seja $\{T^n x\}_{n\geq 0}$ uma sequência de potências de valores em $\mathcal{X}$, segue que span$\{T^n x\}_{n\geq 0} = \{p(T)x \in \mathcal{X} : p$ é um polinômio não-nulo$\}$. Em outras palavras, o span da órbita de T é o conjunto das imagens de todos os polinômios não-nulos de T em x. Além disso,*

$$\bigvee \{T^n x\}_{n\geq 0} = \{p(T)x \in \mathcal{X} : p \text{ é um polinômio não-nulo}\}^-,$$

onde $\bigvee \{T^n x\}_{n\geq 0} = (span\{T^n x\}_{n\geq 0})^-$.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 282.) $\square$

Um subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$ é cíclico se

$$\bigvee \{T^n x\}_{n\geq 0} = \mathcal{M}$$

para algum $x \in \mathcal{X}$. Se $\bigvee\{T^n x\}_{n\geq 0} = \mathcal{X}$, então x é um vetor cíclico para T.

Seja T uma transformação linear limitada do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ para o espaço de Hilbert $\mathcal{K}$. Definimos o adjunto de T como o mapa $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ dado por:

$$\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^* y\rangle \,,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$. Caso $T = T^*$, isto é, se

$$\langle Tx; y\rangle = \langle x; Ty\rangle \,,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$, dizemos que T é auto-adjunto.

Uma isometria é uma transformação linear limitada entre espaços de Hilbert $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ que preserva produto interno, isto é,

$$\langle Tx; Ty\rangle = \langle x; y\rangle \,,$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

Proposição 1.5 *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, as afirmações abaixo são equivalentes.*

a) T é unitário (isto é, $T \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $T^{-1} = T^*$).

b) T é uma isometria sobrejetiva.

c) $T^*T = I$ (identidade em $\mathcal{H}$) e $TT^* = I$ (identidade em $\mathcal{K}$).

d) T é um isometria e uma coisometria (isto é, T^* é uma isometria).

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [18] p. 13) $\square$

Uma sequência de operadores $\{T_n; n \geq 1\}$ é limitada, se algumas das afirmativas abaixo é verdadeira (para verificar que estas afirmações são, de fato, equivalentes, veja, por exemplo, [18] p. 7.):

i) $\sup_n \|T_n\| < \infty$;

ii) $\sup_n |\langle T_n x; y\rangle| < \infty$ para todo x, $y \in \mathcal{H}$;

Considere $\{T_n;\, n \geq 1\}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Os ítens abaixo definem convergência fraca, forte e uniforme, respectivamente.

a) $\{T_n;\, n \geq 1\}$ converge fracamente, se existe $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que $\langle T_n x; y\rangle \to \langle T_n x; y\rangle$ para $n \to \infty$, denota-se $T_n \stackrel{w}{\to} T$.

b) $\{T_n;\, n \geq 1\}$ converge fortemente, se existe $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que $\|(T_n - T)x\| \to 0$ para $n \to \infty$, denota-se $T_n \stackrel{s}{\to} T$.

c) $\{T_n;\, n \geq 1\}$ converge uniformente, se existe $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que $\|T_n - T\| \to 0$ para $n \to \infty$, denota-se $T_n \stackrel{u}{\to} T$

O conceito de estabilidade de um operador está ligado a convergência de sua sequência de potências para zero. De maneira mais precisa, um operador T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é fracamente estável, se $\{T^n;\, n \geq 1\}$ converge fracamente para o operador nulo, isto é,

$$\langle T^n x; y\rangle \to 0,$$

quando $n \to \infty$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Analogamente, T é fortemente estável, se

$$\|T^n x\| \to 0,$$

quando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Por último, T é uniformemente estável, se

$$\|T^n\| \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Usamos as seguintes notações $T^n \stackrel{w}{\to} 0$, $T^n \stackrel{s}{\to} 0$ e $T^n \stackrel{u}{\to} 0$, para representar as estabilidades fraca, forte e uniforme de T, respectivamente.

Um subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ é invariante para $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, se $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Dizemos o $\mathcal{M}$ reduz T (ou que $\mathcal{M}$ é um espaço redutor de T), se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$ são T-invariantes. Além disso, $\mathcal{M}$ é não-trivial, se $\{0\} \neq \mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Um operador T é redutível, se ele tem um subespaço reduzido não-trivial.

Proposição 1.1 *Um subespaço $\mathcal{M}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ reduz $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ se, e somente se, $\mathcal{M}$ é invariante para ambos T e T^*.*

Demonstração: (Ver, e.g., [22] p. 35.) □

1.2 Espectro

Ao longo desta seção, vamos denotar por $\mathcal{X}$ um espaço de Banach complexo. Considere um operador T em $\mathcal{X}$, dizemos que o resolvente de T, denotado por $\rho(T)$, é o conjunto de todos os números complexos λ's os quais $(\lambda I - T)$ é invertível, isto é,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \in \mathcal{G}[\mathcal{X}]\},$$

onde $\mathcal{G}[\mathcal{X}]$ é o conjunto de todos os operadores invertíveis (isto é, operadores que admitem uma inversa no sentido de teoria dos conjuntos) de $\mathcal{B}[\mathcal{X}]$.

Em outras palavras, pelo Teorema da Inversa Contínua de Banach (ver, e.g., [20] p. 449) tem-se que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T) = \mathcal{X}\}.$$

O complemento de $\rho(T)$ chama-se espectro , denota-se $\sigma(T)$. Portanto, $\sigma(T)$ pode ser representado da seguinte maneira:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\} \text{ ou } \mathcal{R}(\lambda I - T) \neq \mathcal{X}\}.$$

Proposição 1.6 *Para todo $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$,*

a) $\sigma(T)$ é compacto.

b) $\sigma(T)$ é não-vazio.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 449-450.) □

O espectro de T pode ser interpretado como todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - T)$ não tem uma inversa contínua. Essa "falha"faz com que o espectro possua diversas partições (embora, aqui, só vamos tratar de uma delas). A partição clássica de $\sigma(T)$ compreende três partes, os espectros pontual, contínuo e residual, respectivamente, $\sigma_P(T)$, $\sigma_C(T)$ e $\sigma_R(T)$.

O espectro pontual $\sigma_P(T)$ é o conjunto de todos os autovalores de T,

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}\},$$

isto é, $\sigma_P(T)$ é o conjunto dos λ's, tal que $(\lambda I - T)$ não é injetiva, e , portanto, não tem inversa.

Definimos o espectro contínuo como o conjunto dos λ's, tais que $(\lambda I - T)$ é densamente definido mas não tem inversa limitada (ver, e.g., [20] p. 228), isto é,

$$\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}, \mathcal{R}(\lambda I - T)^- = \mathcal{X} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T) = \mathcal{X}\}.$$

Por fim, se $(\lambda I - T)$ tem uma inversa em sua imagem que não é densamente definida, então λ pertence ao espectro residual,

$$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T)^- \neq \mathcal{X}\}.$$

A coleção $\{\sigma_P(T), \sigma_R(T), \sigma_C(T)\}$ de subconjuntos de $\sigma(T)$ é uma partição do espectro, logo o espectro de T pode ser reescrito como

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_C(T).$$

O exemplo abaixo tem o objetivo de ilustrar a noção de espectro e sua partição.

Exemplo 1.4 Suponha que $\mathcal{X}$ é de dimensão finita e seja T um operador em $\mathcal{X}$. Pode-se mostrar que $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$ se, e só se, $(\lambda I - T) \in \mathcal{G}[\mathcal{X}]$ (ver, e.g., [20] p. 292). Equivalentemente, $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $\lambda \in \rho(T)$, e, portanto,

$$\sigma_C(T) = \sigma_R(T) = \emptyset.$$

Como $\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_C(T)$, então $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

O raio espectral de T é um número, tal que

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

A primeira identidade define o raio espectral $r(T)$; a segunda é uma consequência do Teorema de Weierstrass (i.e., se $\phi : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua de valores reais em um espaço métrico $\mathcal{X}$, então ϕ assume um valor de máximo e mínimo em cada subconjunto compacto não-vazio de $\mathcal{X}$), veja, por exemplo, [20] p. 459.

Um operador T é quasinilpotente se $r(T) = 0$, isto é, se $\sigma(T) = \{0\}$.

Os dois próximos resultados são centrais, além de terem uma participação decisiva na prova do Teorema de Lomonosov, conforme ficará claro mais adiante, eles também são ferramentas fundamentais na Análise Espectral.

A fórmula de Gelfand-Beurling estabelece que o raio espectral é o limite da sequência $\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este resultado relaciona o raio espectral com uma classe de operadores chamada normalóide, a ser definida no próximo capítulo.

Teorema 1.2 *(Fórmula de Gelfand-Beurling)* $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p. 460.) □

A Alternativa de Fredholm é uma ferramenta importante que caracteriza o espectro de operadores compactos (logo os de dimensão finita).

Teorema 1.3 *(Alternativa de Fredholm) Se T é um operador compacto em um espaço complexo de Banach $\mathcal{X}$, então*

$$\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_P(T)\backslash\{0\}.$$

Além disso, $\sigma(T)$ é contável, e 0 é seu único ponto de acumulação possível. Se $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert, então $dim(\mathcal{N}(\lambda I - T)) = dim(\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*)) < \infty$, onde $\overline{\lambda}$ é o complexo conjugado de λ.

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [20] p.474.) □

Encerramos este capítulo preliminar lembrando uma aplicação da técnica anterior: se T é um operador com rank finito, então seu espectro coincide com o espectro pontual.

Proposição 1.7 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{X}]$ é um operador com rank finito, então $\sigma(T)$ é finito e $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.*

DEMONSTRAÇÃO: (Ver, e.g., [22] p. 80.) □