



João Antonio Zanni Portella

**Considerações sobre o Problema do Subespaço
Invariante**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de
Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Carlos Kubrusly

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011



João Antonio Zanni Portella

Considerações sobre o Problema do Subespaço Invariante

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Kubrusly
Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Alexandre Street de Aguiar

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 21 de fevereiro de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

João Antonio Zanni Portella

Graduou-se em Ciências Econômicas na Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro. Trabalhou nas Empresa de Pesquisa Energética (EPE) e no Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA) como estagiário do setor financeiro e assistente de pesquisa, respectivamente. Após sua graduação resolveu prosseguir seus estudos no Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio, onde junto com seu orientado atualmente pesquisa em Teoria de Operadores, em particular, sobre o Problema do Subespaço Invariante.

Ficha Catalográfica

Zanni, João

Considerações sobre o Problema do Subespaço Invariante / João Antonio Zanni Portella; orientador: Carlos Kubrusly. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2011.

v., 93 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Métodos de Apoio a Decisão) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. Análise Funcional. 3. Teoria de Operadores. 4. Problema do Subespaço Invariante. 5. Subespaço Invariante. 6. Subespaços. 7. Teoria de Funções. I. Kubrusly, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador Carlos Kubrusly pelo apoio, paciência, incentivo e simpatia de sempre, para a realização deste trabalho e na minha formação.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus pais João Carlos Portella e Eleonora Zanni, e irmão Rodrigo Portella pelo apoio e carinho indiscutíveis sem os quais não teria concluído esta jornada.

Aos meus avós Euzébio João Zanni, Olga Migailides Zanni e Magnólia Portella por tudo.

Aos meus colegas da PUC-Rio e FGV-Rio, em particular à Bruno Sultanum Texeira, Bruno Lund, Axel Simonsen, Pedro Olea, Pedro Calmanowitz, Rodrigo Miyamoto, Rafael Azevedo, Bernardo Ricca, Alexandre Ashade e Pedro Milet, quem sempre se propuseram a discutir e ajudar nas questões acadêmicas.

Aos amigos de infância Rafael Ribas, André Luis Caldas, João Eduardo Pádua, Salvio Rocha, Marcelo Letichevsky e Bernardo Monteiro por sempre estarem presentes.

Aos professores da EPGE e do Departamento de Matemática Aplicada da FGV-Rio sem os quais não estaria aqui, em especial Maria Izabel Camacho, Moacyr Silva e Caio Ibsen.

Ao professor Jair Koiller, que me adotou como aluno e me apresentou a carreira de pesquisador.

Ao professor Ricardo Sá Earp, cujo apoio e dedicação foram essenciais na minha formação.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica pela ajuda de todos os dias.

Resumo

Zanni, João; Kubrusly, Carlos. **Considerações sobre o Problema do Subespaço Invariante**. Rio de Janeiro, 2011. 93p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O Problema do Subespaço Invariante é a questão em aberto mais importante em Teoria de Operadores. Apesar de existirem diversos resultados parciais, a questão continua em aberto para classes de operadores definidas em espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. No caso de uma resposta positiva, este pode ser o início de uma teoria geral para a estrutura de operadores em espaços de Hilbert. Se apresentado um contra-exemplo, então o mesmo pode dar origem a diversos teoremas de aproximação. Este trabalho tem como objetivo realizar um levantamento dos principais resultados relativos a essa questão, e apresentar um exemplo de como poderia ser o espectro de um operador hiponormal (em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita) que não tivesse subespaço invariante não trivial (caso tal operador exista).

Palavras-chave

Análise Funcional. Teoria de Operadores. Problema do Subespaço Invariante. Subespaço Invariante. Subespaços. Teoria de Funções.

Abstract

Zanni, João; Kubrusly, Carlos. **Remarks about the Invariant Subspace Problem**. Rio de Janeiro, 2011. 93p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Invariant Subspace Problem is the most important open question in Operator Theory. Although, there are many partial results, the question remains open for operators on complex, infinite-dimensional, separable Hilbert spaces. To prove that every operator has a non-trivial invariant subspace might be the beginning of a general structure theory for Hilbert space operators. On the other hand, a counterexample would may yield a number of approximation theorems. In this work we present a survey the Invariant Subspace Problem, and in addition we show also how it might be the spectrum of a hyponormal operator (on a complex separable infinite-dimensional Hilbert space) which had no nontrivial invariant subspace.

Keywords

Functional Analysis. Operator Theory. Invariant Subspace Problem. Invariant Subspaces. Subspaces. Functions Theory.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Teoria de Operadores	10
1.2	Espectro	16
2	O Problema do Subespaço Invariante	19
2.1	Primeiros Resultados	20
2.2	Resultados para Classes de Operadores	25
3	O Teorema de Lomonosov	35
3.1	A prova de Hilden	36
3.2	A Versão Completa do Teorema de Lomonosov	40
3.3	Extensões do Teorema de Lomonosov	48
4	Problemas Equivalentes - Parte I	51
4.1	A técnica de Rota	52
4.2	O Refinamento de Branges-Rovnyak	58
4.3	Um Segundo Exemplo de Modelo Universal	61
5	Problemas Equivalentes - Parte II	63
5.1	Uma Abordagem Geométrica	63
5.2	A Teoria de Nagy-Foias para Contrações	65
6	O Espectro de um Operador Hiponormal	73
6.1	Propriedades do Espectro de um Operador Hiponormal	74
6.2	A Figura de um Espectro	79
7	Conclusão	86
	Referências Bibliográficas	88
A	Apêndice	92

Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. Immortality may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*.