

## 4 Número de soluções periódicas

Neste capítulo, baseados na descrição do conjunto singular, determinaremos o número de soluções periódicas das equações da forma

$$z'(t) = z(t)^3 + a_2(t)z(t)^2 + a_1(t)z(t) + a_0(t) \quad (4-1)$$

com as funções  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  periódicas de período 1.

Vamos considerar uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  fechada, simples e suficientemente próxima do conjunto singular estável, e também sua imagem,  $T \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Neste capítulo a Aplicação de Avanço será a Aplicação de Poincaré dada por  $T(z) = \phi(1; 0, z)$ .

Em [13], é mostrado que o número de pré-imagens de um valor regular é o número de voltas de uma curva em torno do ponto. No nosso caso, queremos contar o número de voltas que o vetor diferença

$$\eta(\tau) := \gamma(\tau) - T \circ \gamma(\tau) \quad (4-2)$$

dá em torno de zero quando  $\tau$  varia entre 0 e 1. Para facilitar a notação, chamaremos o sistema de coordenadas associados à equação (4-1) e ao vetor (4-2) de sistema de coordenadas  $\mathcal{Z}$ .

### 4.1 Número de voltas

Para determinarmos o número de soluções periódicas da equação (4-1) contaremos o número de voltas do vetor

$$\eta_w(\tau) := \iota \circ \gamma(\tau) - \iota \circ T \circ \gamma(\tau) \quad (4-3)$$

associado à equação

$$w'(t) = -(w(t)^{-1} + a_2(t) + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2), \quad (4-4)$$

onde  $\iota : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , com  $\iota(z) = \frac{1}{z}$ . Além disso,  $P(w_0) = \iota \circ T(w_0) := \phi_w(1; 0, w_0)$  com  $\phi_w$  solução de

$$\begin{cases} w'(t) = -(w(t)^{-1} + a_2(t) + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2) \\ w(0) = w_0. \end{cases}$$

O sistema de coordenadas associado à equação (4-4) e ao vetor (4-3) será o sistema de coordenadas  $\mathcal{W}$ . O próximo lema relaciona o número de voltas do vetor  $\eta$  com o vetor  $\eta_w$ .

Para demonstrar o lema (4.1), primeiro determinaremos uma expressão pra  $\omega(\eta; 0, \gamma)$ , no sistema de coordenadas  $\mathcal{Z}$ , em termos de um campo constante  $X$  e o vetor  $\eta$ . Em seguida, no sistema de coordenadas  $\mathcal{W}$ , para um campo específico  $Y$ , mas ainda constante, determinaremos uma expressão para  $\omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma)$ .

**Lema 4.1** *Se  $\omega(\eta; 0, \gamma)$  é o número de voltas de  $\eta$  em torno de zero, e  $\omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma)$  é o número de voltas de  $\eta_w$ , também em torno de zero, então*

$$\omega(\eta; 0, \gamma) - \omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma) = 2.$$

*Prova.* Considere um campo constante  $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $X(z) = 1$ , no sistema de coordenadas  $\mathcal{Z}$ . Seja  $\theta[\eta, X](\tau)$  o argumento entre os vetores  $\eta(\tau)$  e  $X$  medido em sentido anti-horário a partir de  $X$ . Nesse caso, teremos que

$$\omega(\eta; 0, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left( \theta[\eta, X](1) - \theta[\eta, X](0) \right).$$

Para um campo  $Y$ , no sistema de coordenadas  $\mathcal{W}$ , dado por  $Y(w) = g'_w(0)$ , onde  $g_w(t) = w + t$ , teremos

$$\omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left( \theta[\eta_w, Y](1) - \theta[\eta_w, Y](0) \right).$$

Agora escreveremos o campo  $Y$  em coordenadas  $\mathcal{Z}$ . O bserve que o campo  $Y$  em  $\mathcal{W}$  é o vetor tangente à curva  $g_w(t)$  em  $t = 0$ . A curva  $g_w(t)$  em coordenadas  $\mathcal{Z}$  é dada por  $g_z(t) = \frac{1}{w+t}$ , sendo seu vetor tangente no tempo  $t = 0$  dado por  $g'_z(0) = -\frac{1}{w^2} = -z^2$ ; assim, o campo  $Y$  em coordenadas  $\mathcal{Z}$  é dado por  $Y_{\mathcal{Z}}(z) = -z^2$ .

Se interpretarmos a esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , os vetores  $\eta$  e  $\eta_w$ , agora escritos como vetores de  $\mathbb{R}^3$ , devem coincidir, ou seja,  $\eta = \eta_w$ ; assim, em coordenadas  $\mathcal{Z}$ , temos que  $\theta[\eta, X] - \theta[\eta_w, Y_{\mathcal{Z}}] = \theta[Y_{\mathcal{Z}}, X]$ , logo

$$\omega(\eta; 0, \gamma) - \omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left( \theta[Y_{\mathcal{Z}}, X](1) - \theta[Y_{\mathcal{Z}}, X](0) \right). \quad (4-5)$$

Mas, observe que  $\theta[Y_{\mathcal{Z}}, X](\gamma(\tau)) = \pi + 2 \arg(\gamma(\tau))$ . Portanto, substituindo na equação (4-5), teremos

$$\begin{aligned} \omega(\eta; 0, \gamma) - \omega(\eta_w; 0, \iota \circ \gamma) &= \frac{1}{2\pi} \left( \theta[Y_{\mathcal{Z}}, X](1) - \theta[Y_{\mathcal{Z}}, X](0) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \pi + \arg(\gamma(1)) - \pi - \arg(\gamma(0)) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \arg(\gamma(1)) - \arg(\gamma(0)) \right) = 2, \end{aligned}$$

pois  $(\arg(\gamma(1)) - \arg(\gamma(0))) = 2\pi\omega(\gamma; 0)$  e  $\omega(\gamma; 0)$  é o número de voltas da curva  $\gamma$  em torno de zero, que é 1 no nosso caso. ■

**Definição 4.2** *A multiplicidade de uma solução periódica  $\phi(t)$  da equação (4-1) é a multiplicidade de  $\phi(0)$  como raiz de  $F(z) := z - T(z)$ .*

## 4.2

### Análise qualitativa

Na primeira seção do capítulo 2, vimos que se um ponto  $X$  alcança infinito em um tempo  $s \in (0, 1]$ . Então, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos, como  $n = 3$ ,  $\arg(\bar{\phi}(s - \epsilon; 0, X)) \approx 0$  ou  $\arg(\bar{\phi}(s - \epsilon; 0, X)) \approx \pi$  para soluções generalizadas apropriadas. Assim, se  $Y$  é um ponto fora do conjunto singular e está contido numa vizinhança de  $X$ , pela continuidade nos parâmetros da EDO, devemos ter também  $\arg(\phi(s - \epsilon; 0, Y)) \approx 0$  ou  $\arg(\phi(s - \epsilon; 0, Y)) \approx \pi$ . De forma análoga, se  $\tilde{X}$  pertence ao conjunto singular instável e alcança infinito também em tempo  $s$ , temos  $\arg(\bar{\phi}(s + \epsilon; 1, \tilde{X})) \approx \frac{\pi}{2}$  ou  $\arg(\bar{\phi}(s + \epsilon; 1, X)) \approx \frac{3\pi}{2}$ . Então, para  $\tilde{Y}$  numa vizinhança de  $\tilde{X}$ , teremos também  $\arg(\phi(s + \epsilon; 1, \tilde{Y})) \approx \frac{\pi}{2}$  ou  $\arg(\phi(s + \epsilon; 1, \tilde{Y})) \approx \frac{3\pi}{2}$ .

Nos exemplos apresentados mais adiante, duas configurações para os conjuntos singulares ocorrerão com mais frequência. A primeira delas ocorre quando todos os pontos do conjunto singular são regulares; e a segunda, quando uma perna se autointercepta, ou seja, existem pontos não regulares. Baseados no que foi feito acima, podemos descrever o comportamento da equação (4-1) numa vizinhança do conjunto singular.

Antes vamos fixar algumas notações que serão usadas ao longo desta seção e de todo o capítulo e serão úteis para contarmos o número de voltas do vetor  $\eta$ .

Primeiramente nossa referência será o sistema de coordenadas  $\mathcal{W}$ ; portanto, infinito será a origem do nosso sistema de coordenadas. Também teremos

que, se  $A_1, \dots, A_l$  são pontos sobre a curva  $\iota \circ \gamma$  dispostos em sentido horário, denotaremos por  $A_i A_j$  o arco de  $\iota \circ \gamma$  compreendido entre os pontos  $A_i$  e  $A_j$  percorrido em sentido horário. Se  $A$  é um ponto sobre o traço de  $\iota \circ \gamma$ ,  $\text{tr}[\iota \circ \gamma]$ , denotaremos por  $\omega(\eta_w; 0, A)$  o argumento do vetor  $\eta_w(A) = A - P(A)$  e por  $\omega(\eta_w; 0, A_i A_j)$  o giro de  $\eta_w$  entre os pontos  $A_i$  e  $A_j$ . Abusando da notação, chamaremos de  $\gamma = \iota \circ \gamma$ .

**Configuração 4.3** Suponha que todos pontos do conjunto singular estável sejam regulares. Seja  $\text{tr}[\gamma]$  uma curva suficientemente próxima de  $S^e$  e  $A_1, \dots, A_8$  são pontos sobre  $\text{tr}[\gamma]$ . Queremos observar a trajetória do conjunto  $\text{tr}[\gamma]$  juntamente com a todas as trajetórias generalizadas do conjunto singular estável. Em tempo  $t = 0$ , temos a configuração apresentada na figura (4.1).

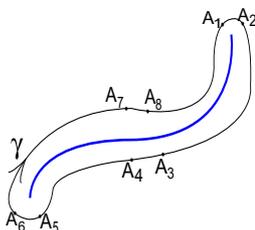


Figura 4.1: Em tempo  $t = 0$ , temos o conjunto singular estável.

Para um tempo  $t = t_1 \in (0, 1)$ , podemos observar que a região de  $\text{tr}[\gamma]$  que estava na vizinhança da origem foi expelida com argumento próximo de  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ . As duas pernas do  $t_1$ -estado instável são consequências das duas soluções previstas pelo lema (2.3). Na figura (4.3), podemos ver os  $t_1$ -estados e  $\phi(t_1; 0 \text{tr}[\gamma])$ .

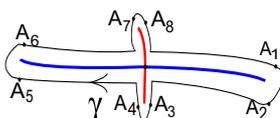


Figura 4.2: Os  $t_1$ -estados, estáveis e instáveis, e  $\phi(t_1; 0 \text{tr}[\gamma])$ .

De forma análoga, para um tempo  $t = t_2 \in (0, 1)$ ,  $t_2 > t_1$ , temos os  $t_2$ -estados e  $\phi(t_2; 0 \text{tr}[\gamma])$  representados na figura (4.3).

E, por último, em tempo  $t = 1$ , temos o conjunto singular instável, sem autointerseções, pois estávamos supondo todos os pontos regulares e  $\phi(1; 0, \text{tr}[\gamma]) = P(\text{tr}[\gamma])$  mostrados na figura (4.4).

**Configuração 4.4** Suponha agora que, para apenas um único  $k$ ,  $\Gamma_k$  tenha uma descontinuidade. Observe que nesse caso os pontos não-regulares devem vir aos pares.

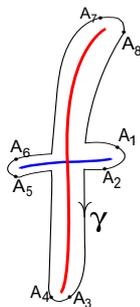


Figura 4.3: Os  $t_2$ -estados, estáveis e instáveis, e  $\phi(t_2; 0 \text{ tr}[\gamma])$

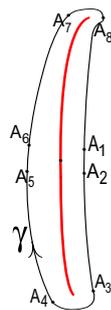


Figura 4.4: Conjunto singular instável e  $\phi(1; 0, \text{tr}[\gamma]) = \text{tr}[P \circ \gamma]$

Queremos mais uma vez descrever o comportamento da equação numa vizinhança do conjunto singular estável baseado no comportamento numa vizinhança de infinito.

Em tempo  $t = 0$ , temos a seguinte configuração. Figura (4.5).

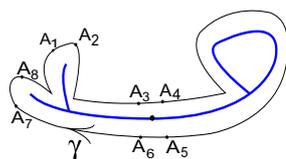


Figura 4.5: Em tempo  $t = 0$ , temos o conjunto singular estável.

Uma vez que o conjunto singular se autointercepta, existem dois pontos em que uma de suas trajetórias generalizadas devem alcançar infinito duas vezes, que são os pontos de autointerseção. Se  $t^- \in (0, 1)$  é o tempo em que os pontos não regulares de  $S^e$  alcançam infinito pela primeira vez, na figura (4.6) podemos ver os  $t^-$ -estados, estável e instável, e  $\phi(t^-; 0, \text{tr}[\gamma])$ .

Uma vez que para cada tempo só um par de pontos pode alcançar infinito, um para cada perna, parte das pernas dos  $t^-$ -estados mostrados na figura (4.6) não alcançarão infinito, e suas trajetórias terão argumento próximo de  $\frac{\pi}{2}$  na vizinhança de infinito.

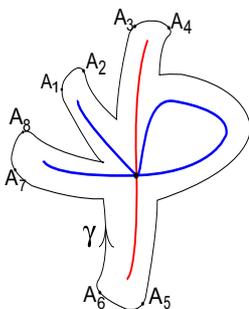


Figura 4.6:  $t^-$ -estados, estável e instável, e  $\phi(t^-; 0, \text{tr}[\gamma])$

Seja  $t_0$  tempo entre  $t^-$  e  $t^+$ , onde  $t^+ \in (0, 1)$  é o tempo relativo para a trajetória generalizada alcançar infinito pela segunda vez. Observe que a descontinuidade prevista pela autointerseção não existe mais no  $t_0$ -estado, o que faz todos seus pontos regulares. Os  $t_0$ -estados e  $\phi(t_0; 0, \text{tr}[\gamma])$  são mostrados na figura (4.7).

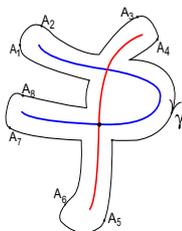


Figura 4.7: Os  $t_0$ -estados e  $\phi(t_0; 0, \text{tr}[\gamma])$

Para  $t = t^+$ , temos os  $t^+$ -estados e  $\phi(t^+; 0, \text{tr}[\gamma])$  mostrados na figura (4.8). Observe que o ponto de interseção entre os  $t_0$ -estados, na figura (4.7), é exatamente o ponto que esteve em infinito em tempo  $t^-$  e está em tempo  $t^+$ .

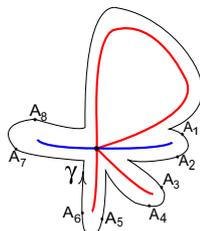


Figura 4.8: Os  $t^+$ -estados e  $\phi(t^+; 0, \text{tr}[\gamma])$

Finalmente em  $t = 1$  temos o conjunto singular instável e  $\text{tr}[P \circ \gamma]$ . Figura (4.9). Observe novamente que a vizinhança de infinito na figura (4.8) teve sua trajetória com argumento próximo de  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ .

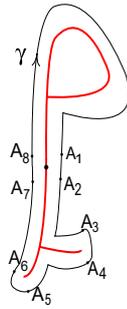


Figura 4.9: Em tempo  $t = 1$ , temos o conjunto singular instável e  $\text{tr}[P \circ \gamma]$ .

Uma vez que o número de voltas é invariante por homeomorfismos, para facilitar a contagem do número de voltas, vamos supor que as pernas dos conjuntos singulares estejam contidas nos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \text{ e } |\text{Im}(z)| \leq \delta\} \\
 U_2 &= \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \text{Re}(z) \leq 0 \text{ e } |\text{Im}(z)| \leq \delta\} \\
 U_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| \leq \delta \text{ e } 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1\} \\
 U_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| \leq \delta \text{ e } -1 \leq \text{Im}(z) \leq 0\}
 \end{aligned}$$

onde  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno. Por fim, para um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, consideraremos quatro pontos de referência em  $\overline{\mathbb{C}}$ . São eles:  $z_0$ , que satisfaz  $\overline{\phi}_0(1; 0, z_0) = \infty$  e  $\arg(\overline{\phi}_0(1 - \epsilon; 0, z_0)) \approx 0$ ;  $z_\pi$ , que satisfaz  $\overline{\phi}_2(1; 0, z_\pi) = \infty$  e  $\arg(\overline{\phi}_2(1 - \epsilon; 0, z_\pi)) \approx \pi$ ;  $z_{\frac{\pi}{2}}$ , que satisfaz  $\overline{\phi}_1(1; 0, z_{\frac{\pi}{2}}) = \infty$  e  $\arg(\overline{\phi}_1(\epsilon; 1, z_{\frac{\pi}{2}})) \approx \frac{\pi}{2}$ ; e  $z_{\frac{3\pi}{2}}$ , que satisfaz  $\overline{\phi}_3(1; 0, z_{\frac{3\pi}{2}}) = \infty$  e  $\arg(\overline{\phi}_3(\epsilon; 1, z_{\frac{3\pi}{2}})) \approx \frac{3\pi}{2}$ , com respectivas vizinhanças  $V_0, V_\pi, V_{\frac{\pi}{2}}$  e  $V_{\frac{3\pi}{2}}$ . Denotaremos por  $U_\infty = (U_0 \cup U_2) \cap (U_1 \cup U_3)$  uma vizinhança de infinito.

### 4.3 Uma interseção em infinito

Nesta primeira seção analisaremos os casos onde os conjuntos singulares só se interceptam em infinito.

**Teorema 4.5** *Se todos os pontos dos conjunto singulares são regulares e  $S^e \cap S^i = \{\infty\}$ , a equação (4-1) possui exatamente 3 soluções periódicas, contadas a multiplicidade.*

*Prova.* Suponhamos que a 0-perna de  $S^e$  esteja contida em  $U_0$ , a  $\pi$ -perna contida em  $U_2$ , a  $\frac{\pi}{2}$ -perna contida em  $U_1$  e a  $\frac{3\pi}{2}$ -perna contida em  $U_3$ . Vamos supor também que  $\text{tr}[\gamma] \subset U_0 \cup U_2$  e  $\text{tr}[P \circ \gamma] \subset U_1 \cup U_3$ .

A escolha dos pontos será baseada na configuração (4.3). Uma vez que estamos supondo  $\gamma$  suficientemente próxima de  $S^e$ , podemos escolher um ponto  $A_1 \in \text{tr}[\gamma] \cap U_0 \cap V_0$  de forma que  $P(A_1) \in U_0 \cap (U_1 \cup U_3)$ . Figura (4.10).

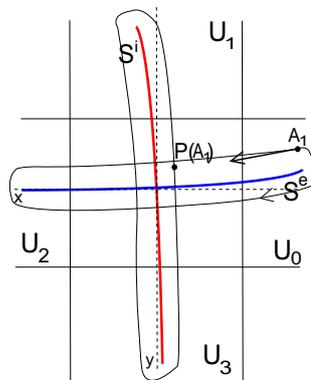


Figura 4.10: Esquema 1, teorema (4.5).

Se escolhermos agora um ponto  $A_2 \in \text{tr}[\gamma] \cap U_3$  tal que  $P(A_2) \in V_{\frac{3\pi}{2}}$ . Assim teremos  $\omega(\eta_w; 0, A_1 A_2) \approx \frac{1}{4}$ , figura (4.11). Se escolhermos um ponto  $A_3 \in V_\pi$  e  $A_4$  com  $P(A_4) \in V_{\frac{\pi}{2}}$ , teremos  $\omega(\eta_w; 0) = 1$ . Figura (4.12).

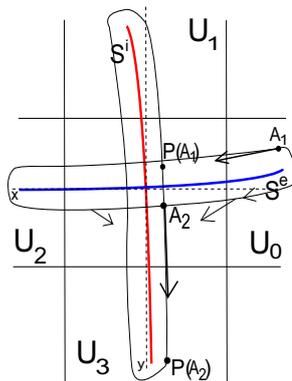


Figura 4.11: Esquema 2, teorema (4.5).

Pelo lema (4.1),  $\omega(\eta; 0) = 3$ . E, portanto, a equação deve possuir 3 soluções periódicas. ■

**Observação 4.6** Um resultado análogo pode ser demonstrado para um valor qualquer de  $n \geq 3$ . Uma demonstração mais simples é observar que, para  $z'(t) = z(t)^n$ , os conjuntos singulares satisfazem as hipóteses do teorema (4.5). Como a equação possui uma solução periódica de multiplicidade  $n$ , qualquer equação cujos conjuntos singulares forem homeomorfos ao conjunto singular de  $z'(t) = z(t)^n$  terá  $n$  soluções periódicas.

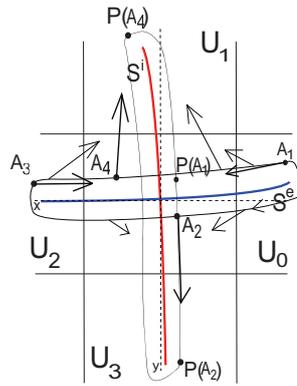


Figura 4.12: Esquema 3, teorema (4.5).

**Exemplo 4.7** Todos os pontos dos conjuntos singulares, para a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + \frac{1}{2}z(t)^2 + (1 + i) \operatorname{sen}(2\pi t)z(t) + (2 + i) \cos(2\pi t),$$

são regulares e  $S^e \cap S^i = \{\infty\}$ , como mostra a figura (4.13). Portanto, a equação possui exatamente 3 soluções periódicas.

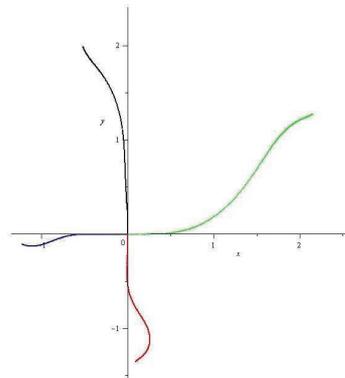


Figura 4.13: Para esta configuração dos conjuntos singulares, pelo teorema (4.5), a equação possui três soluções periódicas.

O corolário abaixo também pode ser encontrado em [16].

**Corolário 4.8** *Se cada  $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , então a equação (4-1) possui exatamente 3 soluções periódicas.*

*Prova.* Claramente deve existir um número real  $z \in S^e$ . Caso contrário, teríamos  $T(z)$  definida para todo  $z \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, poderíamos definir uma

sequência  $\{(T^n(z))\}$  que converge, pois nenhum  $z$  real alcança infinito, o que é absurdo. Não pode existir número complexo com coordenada imaginária não nula que alcance infinito, pois, caso contrário, o conjunto singular estável seria a união de pelo menos três pernas. Mas, sabemos que para  $n = 3$  só existem duas pernas. Também temos  $S^e \cap S^i = \{\infty\}$  pois o eixo real é invariante. Isso cumpre as hipóteses do teorema (4.5) ■

**Exemplo 4.9** Os conjuntos singulares, para a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + \frac{1}{2}z(t)^2 + \text{sen}(2\pi t)z(t) + (\cos(2\pi t))^2,$$

podem ser observados na figura (4.14).

Pelo corolário a equação possui exatamente três soluções periódicas.

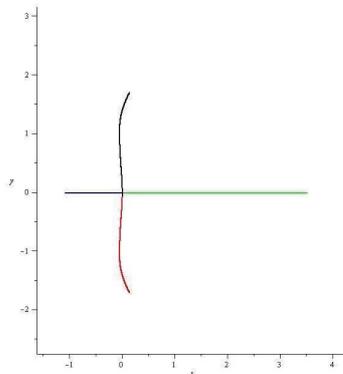


Figura 4.14: O conjunto singular estável é um subconjunto de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

**Exemplo 4.10** Os conjuntos singulares da equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (2 + i) \cos(2\pi t)z(t)^2 + (1 + i)z(t) + ((2 + i) \cos 2\pi t)^2$$

possuem configuração indicada na figura (4.15).

Nesse caso, veremos que a equação deve possuir duas soluções periódicas. Pela configuração (4.4), podemos escolher quatro pontos sobre  $\text{tr}[\gamma]$  da seguinte forma:

Seja  $A_1 \in \text{tr}[\gamma] \cap V_0 \cap U_2$ , escolhamos um ponto  $A_2$  pertence a  $\text{tr}[\gamma] \cap U_2$ , tal que  $P(A_2) \in (\text{tr}[P \circ \gamma] \cap V_{\frac{\pi}{2}} \cap U_3)$ . Assim temos  $\omega(\eta_w; 0, A_1 A_2) \approx \frac{1}{4}$ , conforme mostra a figura (4.16).

Se considerarmos um ponto  $A_3 \in \text{tr}[\gamma] \cap U_3$  com  $P(A_3) \in V_{\frac{3\pi}{2}}$ , teremos  $\omega(\eta_w; 0, A_2 A_3) \approx 0$  e, portanto,  $\omega(\eta_w; 0, A_1 A_3) \approx \frac{1}{4}$ . Figura (4.17).

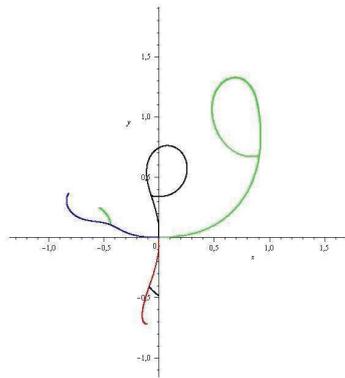


Figura 4.15: Nesse caso, a autointerseção significa descontinuidade da parametrização de uma das pernas dos conjuntos singulares.

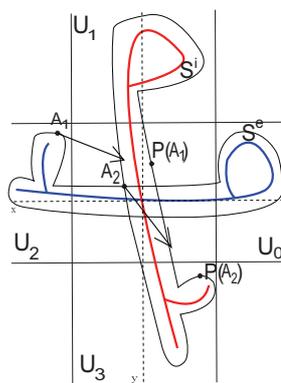


Figura 4.16: Esquema 1, exemplo (4.10)

Se  $A_4 \in U_2 \cap V_\pi \cap \text{tr}[\gamma]$ , teremos  $\omega(\eta_w; 0, A_4 A_1) \approx 0$ . Portanto,  $\omega(\eta_w; 0) = 0$ . Figura (4.18).

Assim, o número de soluções periódicas da equação é 2.

Motivados pelo exemplo acima podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 4.11** *Considere a equação (4-1). Se o conjunto  $S^e \cup S^i$  for homeomorfo ao conjunto da figura (4.15), então a equação possui duas soluções periódicas.*

*Prova.* O número de voltas é preservado por homeomorfismos. Assim qualquer equação em que  $S^e \cup S^i$  seja homeomorfo ao conjunto da figura (4.15) deverá possuir duas soluções periódicas. ■

Se os conjuntos singulares apresentarem duas autointerseções, teoremas como o teorema (4.11) precisam, no mínimo, de enunciados bem mais específicos. O exemplo abaixo mostra duas equações em que os conjuntos singulares dividem a esfera de Riemann em 3 componentes conexas e  $S^e \cap S^i = \{\infty\}$ .

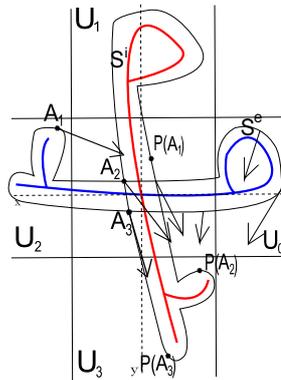


Figura 4.17: Esquema 2, exemplo (4.10)

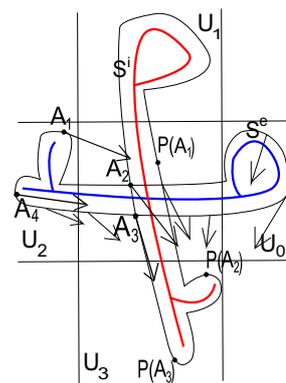


Figura 4.18: Esquema 3, exemplo (4.10).

Mas, se contarmos o número voltas, verificaremos que o número de soluções periódicas é diferente.

**Exemplo 4.12** Os conjuntos singulares para a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + \frac{43}{10}(2 + i)(\cos(2\pi t))^2 z(t)^2 + (2 + i)z(t) + 1$$

e

$$z'(t) = z(t)^3 + (((2 + i) \cos(2\pi t) + (1 + i) \operatorname{sen}(2\pi t))^3 - 5)z(t) + \frac{1}{2}$$

podem observados nas figuras (4.19) e (4.20).

Nos dois casos o conjuntos singulares possuem duas autointerseções e  $S^e \cap S^i = \{\infty\}$ .

No primeiro caso o número de soluções periódicas é 2, pois temos um comportamento semelhante ao exemplo (4.10), isto é, os dois pontos que alcançam infinito em tempo 1 pertencem, a menos de um homeomorfismo, ao conjunto  $U_0$ . Figura (4.19). Para a segunda equação o número de voltas de  $\eta$  é 3. Para isso, basta observarmos que, dos dois pontos que alcançam infinito

em tempo 1, um deles pertence ao conjunto  $U_0$  e o outro ao conjunto  $U_2$  e, em seguida, repetir o raciocínio do teorema (4.5).

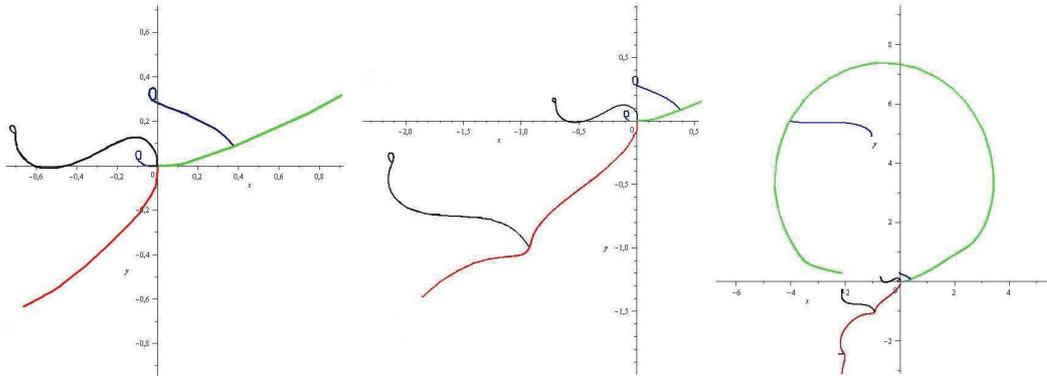


Figura 4.19: Duas autointerseções e duas soluções periódicas.

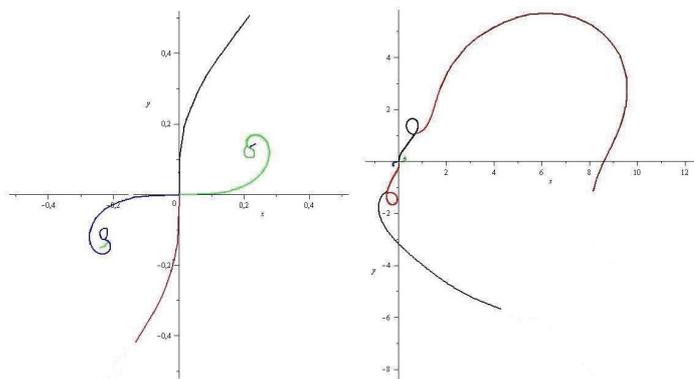


Figura 4.20: Duas autointerseções e três soluções periódicas.

#### 4.4 Interseção em um ponto além de infinito

Quando os conjuntos singulares se interceptam em um ponto além de infinito, alguns arcos de  $\text{tr}[\gamma]$  podem interceptar suas imagens em  $\text{tr}[P \circ \gamma]$ . Nesse caso, a contagem do número de voltas se divide em dois casos: quando um arco de  $\gamma$  intercepta sua imagem e quando não a intercepta.

**Exemplo 4.13** Os conjunto singulares da equação

$$z'(t) = z(t)^3 + \frac{1}{2}z(t)^2 + 3(1 + i) \text{sen}(2\pi t)z(t) + 3(2 + i) \cos(2\pi t),$$

podem ser observados na figura (4.21). Seguindo o raciocínio dos exemplos anteriores vamos contar o número de voltas e ver que, para configurações deste tipo de conjuntos singulares, pode ser 2 ou 3.

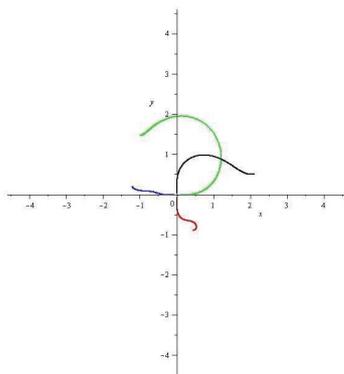


Figura 4.21: Uma interseção transversal entre os conjuntos singulares com duas ou três soluções periódicas.

Neste exemplo o comportamento da equação numa vizinhança do conjunto singular é dado pela configuração (4.3). Dessa vez, consideraremos oito pontos sobre  $\text{tr}[\gamma]$  distribuídos, em sentido horário, da seguinte maneira:  $A_1$  e  $A_2$  serão dois pontos em  $V_0 \cap U_0$ ;  $A_3, A_4 \in U_\infty$  tais que  $P(A_3), P(A_4) \in V_{\frac{3\pi}{2}}$ ;  $A_5, A_6 \in V_\pi \cap U_2$ ; e, finalmente,  $A_7, A_8 \in U_\infty$  com  $P(A_7), P(A_8) \in V_{\frac{\pi}{2}}$ . Observe que apenas o arco  $A_8A_1$  intercepta sua imagem. Seja  $X$  o ponto de interseção. Figura (4.22).

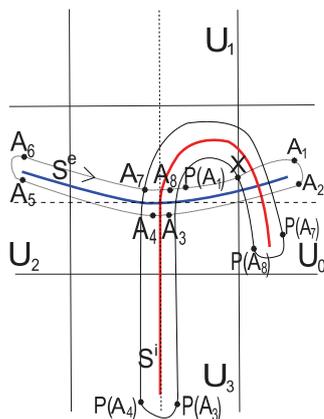


Figura 4.22: Esquema 1, exemplo (4.13).

Primeiramente vejamos o que acontece com o número de voltas entre os pontos  $A_1$  e  $A_8$ . Ainda pela figura (4.22) e pelo comportamento descrito na configuração (4.3), podemos ver que entre  $A_1$  e  $A_2$  temos  $\omega(\eta_w; 0, A_1A_2) \approx 0$ , entre  $A_1$  e  $A_3$   $\omega(\eta_w; 0, A_1A_3) \approx \frac{1}{4}$ , e, como  $\omega(\eta_w; 0, A_3A_4) \approx 0$ , teremos

$\omega(\eta_w; 0, A_1A_4) \approx \frac{1}{4}$ . Seguindo este raciocínio, obtemos  $\omega(\eta_w; 0, A_1A_8) \approx \frac{1}{2}$ . Precisamos ainda contar quantas voltas o vetor  $\eta_w$  dá entre os pontos  $A_8$  e  $A_1$ .

Suponha primeiro que  $P(X)$  esteja sobre o arco  $XP(A_1)$ . Uma vez que, pela escolha do ponto  $A_8$ , temos  $\omega(\eta_w; 0, A_8) \approx 0$  e, nesse caso, entre  $A_8$  e  $A_1$ ,  $\eta_w$  gira em sentido horário. Assim,  $\omega(\eta_w; 0, A_1A_8) \approx -\frac{1}{2}$ . Figura (4.23). Portanto, para essa primeira situação, temos  $\omega(\eta_w; 0) = 0$  que nos dá  $\omega(\eta; 0) = 2$ .

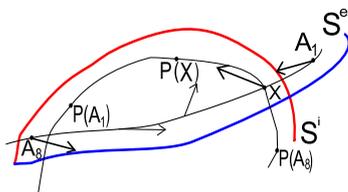


Figura 4.23: Esquema 2, exemplo (4.13).

Suponha agora que  $P(X)$  esteja sobre o arco  $P(A_8)X$ ; nesse caso temos, como  $\eta_w$  gira em sentido anti-horário, entre  $A_8$  e  $A_1$ ,  $\omega(\eta_w; 0, A_1A_8) \approx \frac{1}{2}$ , o que nos dá  $\omega(\eta_w; 0) = 1$  e, portanto,  $\omega(\eta; 0) = 3$ . Figura (4.24).

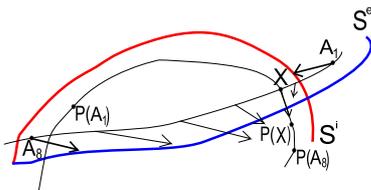


Figura 4.24: Esquema 3, exemplo (4.13).

Numericamente temos que o número de soluções periódicas para a equação é 2.

O próximo exemplo também apresenta uma interseção entre os conjuntos singulares com todos os pontos regulares. Neste caso, a maneira como os conjuntos singulares se interceptam altera o número de soluções periódicas.

**Exemplo 4.14** Os conjuntos singulares da equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (1 + i)z(t)^2 + \left( \frac{1}{i + \text{sen}(2\pi t)} \right) z(t) + (2 - 2i) \cos 2\pi t$$

também se interceptam uma única vez. Figura (4.25).

Sejam  $A_1, A_2 \in \text{tr}(\gamma) \cap V_0 \cap U_0$ ;  $A_3, A_4 \in U_\infty$  tais que  $P(A_3), P(A_4) \in U_3 \cap V_{\frac{3\pi}{2}}$ ;  $A_5, A_6 \in U_2 \cap V_\pi$  e, finalmente,  $A_7, A_8 \in U_\infty$  com  $P(A_7), P(A_8) \in V_{\frac{\pi}{2}} \cap U_2$ . Observe que esses pontos podem ser escolhidos de forma que apenas o arco

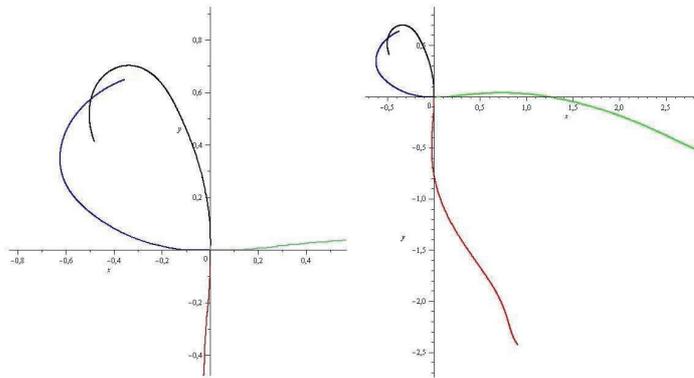


Figura 4.25: Uma interseção transversal entre os conjunto singulares e três ou quatro soluções periódicas.

$A_6A_7$  intercepte sua imagem. Figura (4.26). Assim, repetindo o raciocínio do exemplo anterior teremos, no arco  $A_7A_6$ ,  $\omega(\eta_w; 0, A_7A_6) \approx \frac{1}{2}$ .

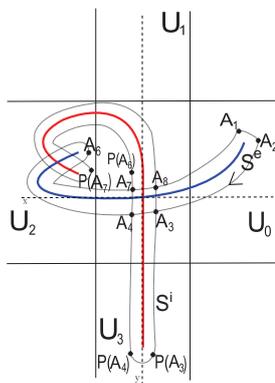


Figura 4.26: Esquema 1, exemplo (4.14).

Seja  $X$  o ponto de interseção entre os arcos  $A_6A_7$  e  $P(A_6)P(A_7)$ .

Suponha primeiro que  $X$  seja mapeado no arco  $P(A_6)X$ . Nesse caso, o vetor diferença cruza o ponto  $X$  em sentido horário para depois completar aproximadamente meia volta em sentido anti-horário no arco  $XP(A_7)$ , conforme podemos observar na figura (4.27).

Isso nos dá, nesse primeiro caso,  $\omega(\eta_w; 0) = 1$  e, portanto, a equação possuirá 3 soluções periódicas.

Suponha agora que  $P(X)$  esteja sobre o arco  $XP(A_7)$ . Nesse caso, como o vetor diferença cruza o ponto  $X$  em sentido anti-horário, ainda no arco  $A_6X$  o vetor diferença já terá dado aproximadamente meia volta em sentido anti-horário. No arco  $XA_7$  o vetor completa aproximadamente mais uma volta, o que nos dá  $\omega(\eta_w; 0, A_6A_7) \approx \frac{3}{2}$ . Nessa situação, temos  $\omega(\eta_w; 0) = 2$  e, portanto, 4 soluções periódicas para a equação. Figura (4.28).

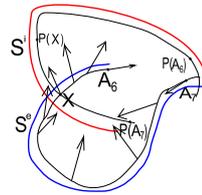


Figura 4.27: Esquema 2, exemplo (4.14).

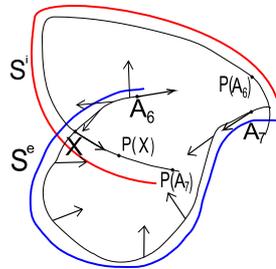


Figura 4.28: Esquema 3, exemplo (4.14).

Utilizando esse raciocínio vemos que o número de soluções periódicas para a equação é 3.

**Observação 4.15** Se conseguirmos uma família de arcos sobre  $\text{tr}[\gamma]$  que não intercepte sua imagem, o número de voltas pode ser contado como se os conjuntos singulares não se interceptassem. Esse é o caso dos dois exemplos anteriores, quando o número de soluções periódicas foi 3. De fato, observe que são os casos onde  $X$  foi mapeado "para trás"; isso criou uma família de arcos que não interceptava sua imagem.

**Exemplo 4.16** Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + ((2 + i) \cos(2\pi t) + (1 + i) \text{sen}(2\pi t))^2 z(t)^2,$$

com seus conjuntos singulares representados na figura (4.29).

Desta vez não precisaremos considerar os conjuntos auxiliares  $U_i$ . Apenas consideraremos  $U_\infty$  uma vizinhança de infinito e o comportamento da equação numa vizinhança do conjunto singular estável conforme a configuração (4.4).

Sejam  $A_1, A_2 \in \text{tr}[\gamma] \cap V_0$ ;  $A_3, A_4 \in \text{tr}[\gamma] \cap U_\infty$ ;  $A_5, A_6 \in \text{tr}[\gamma] \cap V_\pi$ . O arco  $A_1A_2$  não intercepta sua imagem, pois esta deve estar contida numa vizinhança de infinito. O mesmo vale para o arco  $A_5A_6$ . O arco  $A_3A_4$  deve ser mapeado entre as vizinhanças  $V_{\frac{3\pi}{2}}$  e  $V_{\frac{\pi}{2}}$ , portanto, não pode interceptar sua imagem.

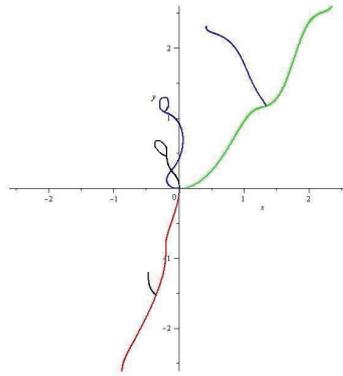


Figura 4.29: Uma interseção transversal e uma autointerseção.

Caso o arco  $A_2A_3$  intercepte sua imagem, poderíamos escolher outro ponto  $A_2$  tal que o arco  $A_2A_3$  não intercepte sua imagem. De fato, seja  $X$  ponto de interseção entre  $A_2A_3$  e  $P(A_2)P(A_3)$ , o ponto  $X$  deve estar numa vizinhança de infinito; portanto, uma vizinhança do arco  $XA_3$ , que está numa vizinhança de infinito, é, obrigatoriamente, mapeada na vizinhança  $V_{\frac{3\pi}{2}}$ , logo  $XA_3$  não intercepta sua imagem. Isso garante a configuração apresentada na figura (4.30).

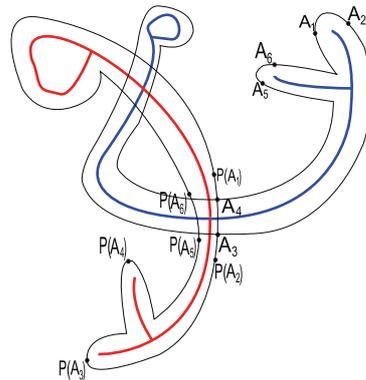


Figura 4.30: Esquema 1, exemplo (4.16)

Se nenhum arco intercepta sua imagem, como vimos na observação (4.15), a interseção entre os conjuntos singulares não altera o número de voltas, que é o mesmo do exemplo (4.10), que é 2. Portanto, está equação possui duas soluções periódicas.

O próximo exemplo mostra uma equação em que a região limitada do conjunto singular estável é mapeada nela mesma, isso nos dará mais um ponto fixo para Aplicação de Poincaré.

**Exemplo 4.17** Na equação

$$z'(t) = z(t)^3 + ((1 + i) \operatorname{sen}(2\pi t) + (3 - 4i))z(t)^2 + \frac{7}{10}z(t),$$

a região limitada pelo conjunto singular estável é mapeada na região limitada pelo conjunto singular instável e, nesse caso, é mapeada num subconjunto próprio dela mesma. Os conjuntos singulares para essa equação estão representados na figura (4.31).

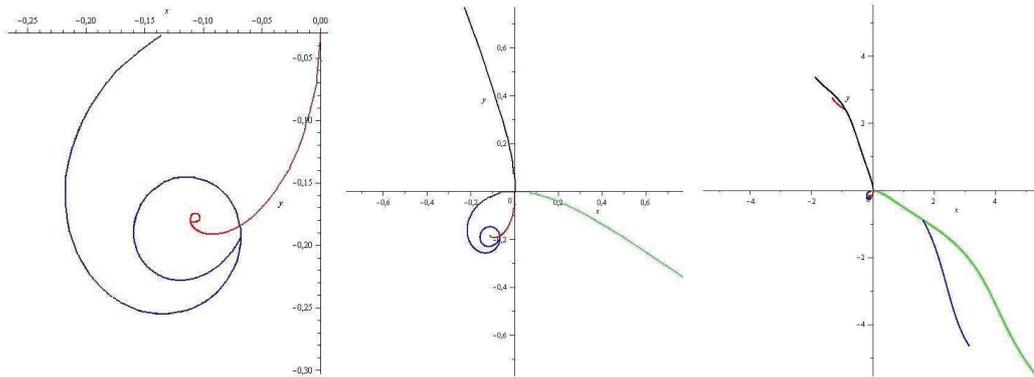


Figura 4.31: Uma interseção transversal em que a componente limitada é mapeada nela mesma.

Seja  $D$  a componente limitada pelo conjunto singular estável. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, deve existir pelo menos um ponto fixo da Aplicação de Retorno em  $D$ . Se existisse mais de um ponto fixo, pelo lema de Schwarz deveriam existir infinitos, o que é absurdo pois  $P(D)$  está estritamente contido em  $D$ .

O número de pontos fixos para a Aplicação de Retorno fora de  $D$  é 2, pois a contagem do número de voltas é exatamente a mesma do exemplo (4.16). Assim, a equação possui três soluções periódicas.

## 4.5

### Último exemplo

Os exemplos apresentados nas seções anteriores não possuíam mais que três soluções periódicas. Em especial, apenas o exemplo (4.14) mostrava a possibilidade da existência de mais que  $n$  (no nosso caso  $n = 3$ ) soluções periódicas.

O próximo exemplo, encontrado em [14], apresenta uma equação com seis soluções periódicas reais.

**Exemplo 4.18** A equação, encontrada em [14],

$$u'(t) = -u(t)^4 + bu(t)^2 - cu(t) + v(t),$$

para  $b = 4$ ,  $c = 0.3$  e  $v(t) = 0.8836063 \sin(t) - 0.4857468 \sin(2t) - 0.5792282 \cos(2t) + u_b(t)^4 - 4u_b(t)^2 - .3u_b(t)$  onde

$$u_b(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(2t) + b_4 \sin(2t)$$

com  $a_0 = -0.1173378e - 1$ ;  $a_4 = -0.01881213$ ;  $a_1 = -0.8836063$ ;  $a_2 = 0.2428734$ ;  $b_2 = -0.6855379$ ;  $a_3 = 0.4465347$ ;  $b_3 = 0.1853376$ ;  $b_4 := 0.2105862$ , possui 6 soluções periódicas reais.

Nosso objetivo não é fazer uma análise numérica detalhada dos conjuntos singulares da equação.

Uma visão geral dos conjuntos singulares pode ser vista na figura (4.32). Analisaremos vizinhanças dos pontos  $-1.31$ ,  $0.5$  e  $1.5$ .

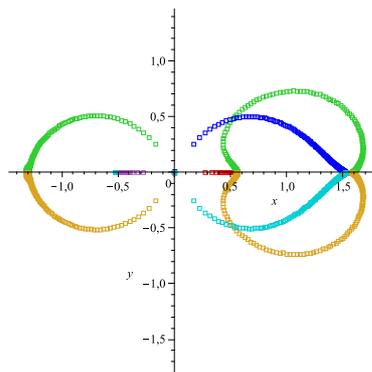


Figura 4.32: Os conjuntos singulares.

Na figura (4.33), vizinhança de  $-1.31$ , podemos observar as autointerseções do conjunto singular instável. Esse tipo de autointerseção está relacionado com transversalidade.

Mais ainda, a continuação destas pernas está conectada a terceira perna. Essa autointerseção representa uma descontinuidade na parametrização do conjunto singular. Tudo isso pode ser confirmado observando a figura (4.34).

Uma vez que o conjunto singular instável se autointercepta, o mesmo deve acontecer para o conjunto singular estável. Pois, para cada autointerseção em um conjunto deve existir uma no outro. A figura (4.35) confirma esse fato.

Mais, em uma vizinhança de  $-0.5$  poderiam ser observadas a continuação das pernas do conjunto singular estável que se autointerceptam. Numericamente não conseguimos observá-las com clareza.

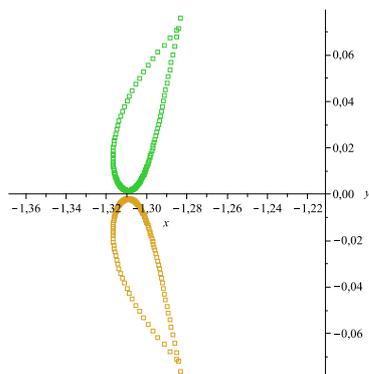


Figura 4.33: Os conjuntos singulares.

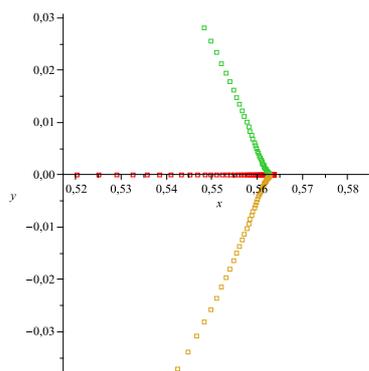


Figura 4.34: Os conjuntos singulares.

Precisaríamos de um processo mais refinado de análise numérica para obter o número de voltas do vetor diferença. Isso ocorre pois, em uma vizinhança  $V \in \mathbb{C}$  de 1.58, não fica claro o formato do conjunto singular. O que conseguimos observar é uma nuvem de pontos. Figura (4.36).

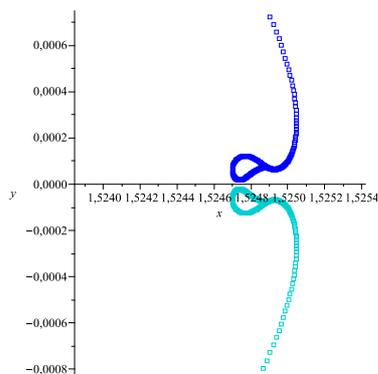


Figura 4.35: Os conjuntos singulares.

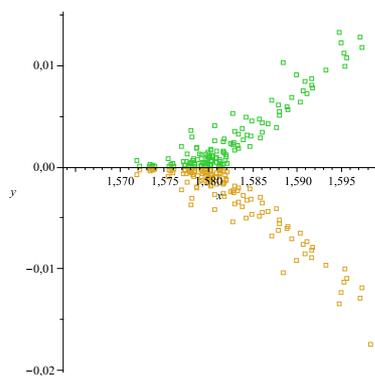


Figura 4.36: Os conjuntos singulares.