

## 3

## Equações Excepcionais

Neste capítulo continuaremos a descrição dos conjuntos singulares associados a equações da forma

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \quad (3-1)$$

Na primeira seção trataremos de equações genéricas. Isso justificará os exemplos que serão apresentados na seção 2. Por fim, na seção 3, trataremos de equações com infinitas soluções periódicas.

## 3.1

Descontinuidades de  $\Gamma_k$ 

No final do capítulo 2, passamos a interpretar as descontinuidades das aplicações  $\Gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 2n-3$ , como autointerseções dos conjuntos singulares. Os conjuntos singulares, estável e instável, devem possuir o mesmo número (podendo ser infinito) de autointerseções.

Para ver isso, considere o problema

$$\begin{cases} w'(t) = -(w(t)^{2-n} + a_{n-1}(t)w(t)^{3-n} + \dots + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2) \\ w(a) = z_e \end{cases}$$

para  $t \in [a, b]$ , onde  $z_e \in S^e$ . Se alguma trajetória generalizada de  $z_e$  alcança infinito mais de uma vez, devem existir  $t_0, t_1 \in [a, b]$  e uma trajetória generalizada  $\alpha$  tal que  $\alpha(t_0) = \bar{\phi}_{2k}(t_0; a, z_e) = 0$  e  $\alpha(t_1) = \bar{\phi}_{2k}(t_1; a, z_e) = 0$ . Se  $t_0 < t_1$ , pela definição,  $\Gamma_{2k}$  é descontínua em  $t_1$ .

Agora observe que, como  $z_e \in S^e$ , temos que  $\bar{\phi}_{2k}(b; a, z_e) = z_i \in S^i$  para alguma solução generalizada. Assim,  $z_i$  também possui uma trajetória generalizada que alcança infinito pelo menos duas vezes, ou seja, para algum  $m$  entre  $0, \dots, (n-2)$ ,  $\Gamma_{2m+1}$  também é descontínua. Isso nos dá a seguinte proposição.

**Proposição 3.1** *Para cada autointerseção em  $S^e$ , existe uma autointerseção em  $S^i$ . ■*

Como consequência direta da proposição (2.10), temos que os conjuntos  $X_{2k}$  e  $X_{2k+1}$  são abertos. Mais ainda, em geral esses conjuntos serão subconjuntos abertos e densos do intervalo  $[a, b]$ . O próximo exemplo apresenta uma equação onde  $X_p$  não é denso, isto é, as parametrizações  $\Gamma_p$  não estão definidas em subconjunto aberto do intervalo, que, neste caso, será o intervalo  $[0, 1]$ . Isso é verificado mostrando que um aberto de pontos em  $S^e$  alcança infinito mais de uma vez.

**Exemplo 3.2** Para equação  $z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$ , existe um subintervalo de  $[0, 1]$  onde as parametrizações  $\Gamma_m$ ,  $m = 0, 1, 2$  e  $3$ , não estão definidas. De fato, primeiro considere o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

com solução

$$z(t) = \frac{2\pi iz_0}{\sqrt{(-z_0^2 + 4\pi ie^{-8\pi it} + z_0^2 e^{-8\pi it})\pi i}},$$

logo as condições iniciais  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  que alcançam infinito em tempo  $t \in [0, 1]$  são dadas por

$$z_0 = \pm \sqrt{-\frac{4\pi ie^{-8\pi it}}{e^{-8\pi it} - 1}}.$$

Lembramos que a parametrização  $\Gamma_{2k}$  não está definida num tempo  $t_1 \in [0, 1]$  se existe  $t_0 < t_1$  e uma solução generalizada,  $z(t)$ , de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t) \\ z(t_1) = \infty \end{cases}$$

satisfazendo  $z(t_0) = \infty$ .

Uma vez que a equação  $z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$  é autônoma, podemos dizer que todos os pontos que alcançam infinito descrevem a mesma trajetória. Pelo lema de existência de soluções generalizadas o problema deve possuir duas soluções em um intervalo do tipo  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ . Assim, neste exemplo, vamos fixar sempre a mesma raiz toda vez que uma trajetória generalizada alcançar infinito para podermos fazer as contas. Assim, por exemplo, para  $t = \frac{1}{4}$

$$z_0 = \sqrt{-\frac{4\pi ie^{-2\pi i}}{e^{-2\pi i} - 1}} = \infty,$$

ou seja, uma trajetória da condição inicial  $z_0 = \infty$  também alcança infinito em tempo  $t = \frac{1}{4}$ . Portanto, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos

$$-\frac{4\pi ie^{-8\pi i\epsilon}}{e^{-8\pi i\epsilon}-1} = -\frac{4\pi ie^{-8\pi i(\epsilon+\frac{1}{4})}}{e^{-8\pi i(\epsilon+\frac{1}{4})}-1}.$$

Logo, todos os pontos  $z_0 = \sqrt{-\frac{4\pi ie^{-8\pi it}}{e^{-8\pi it}-1}}$  para  $t \in [0, \epsilon]$  alcançam infinito pelo menos duas vezes e, portanto,  $\Gamma_{2k}$  não está definida em algum subintervalo de  $[0, 1]$  para algum  $k$ .

Esse exemplo motiva mais uma definição.

**Definição 3.3** *Dizemos que a equação*

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t),$$

*definida no intervalo  $[a, b]$ , é excepcional de 1º tipo se, para algum  $k$ ,  $X_k$  não é um conjunto denso do intervalo  $[a, b]$ .*

Dividiremos o conjunto singular estável em dois subconjuntos. O primeiro deles,  $X_{t \geq t_0}$ , é formado pelo pontos de  $S^e$  cujas trajetórias generalizadas alcançam infinito em algum tempo  $t \in [t_0, b]$ . O outro,  $X_{t \leq t_0}$ , será formado pelos pontos que a trajetória generalizada alcança infinito em tempo  $t \in [a, t_0]$ . Com isso, definimos

$$S_{t_0}^e = \{z_* \in \overline{\mathbb{C}} : z_* = \overline{\phi}(t_0; a, z), z \in X_{t \geq t_0}\}$$

e

$$S_{t_0}^i = \{z_* \in \overline{\mathbb{C}} : z_* = \overline{\phi}(t_0; a, z), z \in X_{t \leq t_0}\}.$$

Os conjuntos  $S_{t_0}^e$  e  $S_{t_0}^i$  serão chamados de  $t_0$ -estados dos conjuntos singulares, estável e instável, respectivamente.

No exemplo (3.2), vimos que existe um aberto onde  $\Gamma_k$  não está definida. Isso significa que existe um aberto de pontos de  $S^e$  que alcançam infinito pelo menos duas vezes. Assim, para algum  $t_0 \in [a, b]$ ,  $S_{t_0}^e \cap S_{t_0}^i$  contém um aberto de pontos. Geometricamente,  $S_{t_0}^e$  e  $S_{t_0}^i$  estão sobrepostos.

Suponha que as funções  $a_i$  sejam suaves. As parametrizações  $\Gamma_{2k, t_0}$  e  $\Gamma_{2m+1, t_0}$  das pernas dos  $t$ -estados,  $S_{t_0}^e$  e  $S_{t_0}^i$  respectivamente, podem ser definidas de maneira análoga às parametrizações das pernas dos conjuntos singulares do capítulo anterior. Ou seja, para uma determinada perna do  $t_0$ -estado estável,  $\Gamma_{2k, t_0}(\tilde{t})$  é tal que por  $\overline{\phi}_k(\tilde{t}; t_0, \Gamma_{2k, t_0}(\tilde{t})) = \infty$  para  $\tilde{t} \in [t_0, b]$ . Já para uma perna do  $t_0$ -estado instável temos que  $\Gamma_{2k+1, t_0}(\tilde{t})$  é tal que

$\overline{\phi}_k(\tilde{t}; t_0, \Gamma_{2m+1, t_0}(\tilde{t})) = \infty$  para  $\tilde{t} \in [a, t_0]$ . Dessa forma, essas parametrizações também serão suaves, desde que as funções  $a_i$  sejam.

Suponha que os  $t_0$ -estados  $S_{t_0}^e$  e  $S_{t_0}^i$  se interceptem, isto é, existem  $t_b \in (t_0, b]$   $t_a \in (a, t_0]$  e tais que  $\Gamma_{2k, t_0}(t_b) = \Gamma_{2m+1, t_0}(t_a)$  para algum  $k$  e  $m$  entre  $1, \dots, (n-1)$ . Ou seja, os  $t_0$ -estados se interceptam em alguma de suas pernas.

Se  $\Gamma'_{2k, t_0}(t_b) \neq \Gamma'_{2m+1, t_0}(t_a)$  para todos os pontos de interseção entre os  $t_0$ -estados, dizemos que os  $t_0$ -estados da equação (3-1) se interceptam transversalmente e escrevemos  $S_{t_0}^e \pitchfork S_{t_0}^i$ . Em particular, se  $S_{t_0}^e \cap S_{t_0}^i = \{\infty\}$ , também dizemos que os  $t_0$ -estados se interceptam transversalmente. Com isso definimos o conceito de equação transversal.

**Definição 3.4** Suponha que as funções  $a_i$  sejam suaves. Dizemos que a equação (3-1) é **transversal** se, para cada  $t \in [a, b]$ , tivermos  $S_t^e \pitchfork S_t^i$ . Caso contrário, dizemos que a equação é **não transversal**.

**Lema 3.5** Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + (a_0(t) + sb_0(t)),$$

com  $s$  um parâmetro complexo e funções  $a_i$  de classe  $C^1$ . Suponha que  $z(t)$  seja uma solução generalizada de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) + sb_0(t) \\ z(t_0) = \infty \end{cases}$$

para  $s = 0$  satisfazendo  $z(t) \neq \infty$  para  $t \in (t_0, t_1)$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que, se  $b_0(t)$  é uma função suave no intervalo  $[a, b]$  com suporte compacto em  $(t_b - \epsilon, t_b + \epsilon)$ ,  $t_b \in (t_0, t_1)$  e satisfazendo  $\int_a^b b_0(t)dt = 1$ , então existem  $\delta > 0$  e  $\mathcal{Z} : (t_0, t_1) \times B(0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $s \in B(0, \delta)$ ,  $\mathcal{Z}(t_0, s) = \infty$  e, para todo  $t \in (t_0, t_1]$ ,  $\mathcal{Z}(t, s) \neq \infty$  com

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{Z}(t; s)) = \mathcal{Z}(t; s)^n + a_{n-1}(t)\mathcal{Z}(t; s)^{n-1} + \dots + a_1(t)\mathcal{Z}(t; s) + (a_0(t) + sb_0(t))$$

$e$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{Z}(t; 0)) \neq 0.$$

para  $t > t_b + \epsilon$ .

*Prova.* A existência de  $\epsilon$  e uma função  $b_0$  com suporte compacto em satisfazendo  $(t_b - \epsilon, t_b + \epsilon)$ ,  $t_b \in (t_0, t_1)$  e  $\int_a^b b_0(t)dt = 1$  é garantida pela existência de *bump functions*. Uma referência para esse fato pode ser encontrada em [9], apêndice C.

Seja  $\mathcal{Z}(t; s)$  solução de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) + sb_0(t) \\ z(t_0) = \infty. \end{cases}$$

Por hipótese temos que, no sistema  $w$ ,  $\mathcal{W}(t; 0) \neq 0$  para  $t \in (t_0, t_1)$ . Pela continuidade da equação com relação às funções  $a_i$ , lema (2.6), dado  $\tilde{\epsilon} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\mathcal{W}(t; s) - \mathcal{W}(t; 0)| \leq \tilde{\epsilon}$$

para  $|s| \leq \delta$ . Isso nos dá  $\mathcal{Z}(t; s) \neq \infty$  para  $t \in (t_0, t_1)$  e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{Z}(t; s)) = \mathcal{Z}(t; s)^n + a_{n-1}(t)\mathcal{Z}(t; s)^{n-1} + \dots + a_1(t)\mathcal{Z}(t; s) + (a_0(t) + sb_0(t)).$$

Precisamos agora ver que  $\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{Z}(t; 0)) \neq 0$ . Escrevendo  $\mathcal{Z}(t; s)$  e  $z(t)$  na forma de equação integral, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t; s) - z(t) &= \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{Z}(\tau; s)^n - z(\tau)^n] + \dots + a_1(\tau)[\mathcal{Z}(\tau; s) - z(\tau)] + sb_0(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_b - \epsilon}^{t_1} [\mathcal{Z}(\tau; s)^n - z(\tau)^n] + \dots + a_1(\tau)[\mathcal{Z}(\tau; s) - z(\tau)]d\tau + s. \end{aligned}$$

Pois, para  $t \leq t_b - \epsilon$ , temos  $\mathcal{Z}(t; s) = z(t)$  e, portanto, a EDO não foi alterada no intervalo. Uma vez que  $|s| < \delta$ , devemos ter  $\mathcal{Z}(t; s) \approx z(t) + s$  e, portanto, pela sauvideade da solução  $\mathcal{Z}(t; s)$  nas funções  $a_i$ , lema (2.7),  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{Z}(t_1; 0) \approx 1$ . Assim, temos  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{Z}(t_1; 0) \neq 0$ . ■

O lema nos diz que uma pequena perturbação nas funções  $a_i$  nos dá  $\mathcal{Z}(t; s) \neq \mathcal{Z}(t; \tilde{s})$ , para  $t > t_b + \epsilon$  desde que  $s$  seja suficientemente pequeno. Essencialmente o que mostramos com o lema é que podemos desviar parte dos conjuntos singulares com a perturbação. Ou seja, se os  $t_0$ -estados se interceptam de forma não transversal, a perturbação, da maneira que foi feita, desloca apenas as pernas de  $S_{t_0}^i$ . Assim, a equação perturbada passa a ser transversal. Em particular, caso  $S_{t_0}^e$  e  $S_{t_0}^i$  coincidam num aberto, isto é, a equação associada a eles é *excepcional de 1º tipo*, existe naturalmente uma não

transversalidade. Dessa forma, uma equação excepcional de 1º tipo é também sensível as perturbações.

Isso nos dá a seguinte proposição

**Proposição 3.6** *Se a equação (3-1) é excepcional do 0º tipo então ela é não-transversal. ■*

A ideia essencial do lema (3.5) é que o conjunto das equações transversais é um subconjunto aberto e denso no espaço das equações.

Para formalizar esse fato, diremos que o espaço das equações do tipo de (3-1), denotado por  $\mathcal{E}$ , é o espaço de Banach formado pelas  $n$ -uplas  $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ , com  $a_i \in C^r([a, b]; \mathbb{C})$ ,  $r \geq 1$ , com norma

$$E_A = \max_{i=1 \dots (n-1)} \{ \|a_i\|_{C^r} \},$$

onde  $E_A$  é a equação associada à  $n$ -upla  $A = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ . Com isso podemos enunciar a seguinte proposição que é uma consequência direta do lema (3.5).

**Proposição 3.7** *O conjunto das equações transversais é um subconjunto aberto e denso do espaço  $\mathcal{E}$ . ■*

Uma consequência da transversalidade de certas equações é que as parametrizações dos conjuntos singulares apresentam um número finito de descontinuidades. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

**Proposição 3.8** *Suponha que as funções  $a_i$  sejam suaves. Se a equação (3-1) é transversal então  $\Gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 2n - 3$ , possui um número finito de descontinuidades.*

*Prova.* Suponha que  $\Gamma_k$  possua infinitos pontos de descontinuidade para algum  $k$ , ou seja, os conjuntos singulares se autointerceptam infinitas vezes. Uma vez que os conjuntos singulares são compactos, as autointerseções devem se acumular em algum ponto do conjunto singular.

Seja  $z_\infty$  ponto de acumulação cuja trajetória generalizada alcança infinito em tempo  $t_\infty$ . Seja  $t_0 > t_\infty$  tal que todas as trajetórias generalizadas de uma vizinhança de  $z_\infty$  já tenham alcançado infinito.

Nesse caso, os  $t_0$ -estados estável e instável possuem infinitos pontos de interseção que devem se acumular em um ponto, digamos,  $z_{\infty, t_0}$ . Como a equação é transversal, as interseções entre os  $t_0$ -estados devem ser transversais. Mas, numa vizinhança do ponto de acumulação,  $\Gamma'_{k, t_0}$ , a parametrização dos  $t_0$ -estados, deixa de ser suave. Logo, se as funções  $a_i$  são suaves e a equação é transversal, o número de autointerseções deve ser finito. ■

### 3.2 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos. Mas, antes vamos descrever o modo como os conjuntos singulares foram gerados numericamente.

Seja  $z_*$  pertencente a uma vizinhança de infinito. Dessa forma, o comportamento da solução do problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_*) = z_* \end{cases}$$

pode ser aproximado pelo comportamento da solução de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n \\ z(t_*) = z_* \end{cases}$$

desde que  $t \in (t_* - \epsilon, t_* + \epsilon)$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Vamos fixar  $n = 3$ . Considere uma partição do intervalo  $[0, 1]$ ,  $[0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{l-1}, 1]$  tal que cada  $[t_i, t_{i+1}]$  tenha comprimento  $\frac{1}{l}$ .

Seja  $l$  é suficientemente grande e  $z_*$  pertencente a uma vizinhança de infinito. Considere o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 \\ z(t_i) = z_* \end{cases} \quad (3-2)$$

com solução dada por

$$z(t) = \frac{z_*}{\sqrt{-2tz_*^2 + 1 + 2t_i z_*^2}}.$$

Uma vez que estamos fixando  $n = 2$ , existem apenas dois pontos,  $z^+$  e  $z^-$ , que alcançam infinito em tempo  $t_{i+1}$ . Esses pontos são dados por

$$z^\pm = \pm \sqrt{\frac{-1}{2t_i - 2t_{i+1}}}.$$

Pela proposição (3.7) podemos assumir que todas as equações são transversais, ou seja, os conjuntos singulares das equações possuem um número finito de auto-interseções. Portanto, a menos de um número finito de pontos, dado um tempo  $\tilde{t}$ , existe sempre  $\tilde{z}$  tal que  $\bar{\phi}(\tilde{t}; 0, \tilde{z}) = \infty$ , ou seja,  $\Gamma_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  é descontínua apenas num número finito de pontos.

Assim, se resolvemos, numericamente, o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + a_2(t)z(t)^2 + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_i) = z^\pm, \end{cases} \quad (3-3)$$

para cada  $i = 1, \dots, l$  e denotando por  $z_i^\pm(t)$  suas respectivas soluções, podemos obter uma aproximação para o conjunto singular estável da equação (3-1) calculando  $z_i^+(0)$  e  $z_i^-(0)$  para cada  $i$ . Seguindo este mesmo raciocínio, também encontramos uma aproximação do conjunto singular instável.

Os exemplos deste capítulo estão desenhados da maneira que foram gerados. Utilizamos também a mudança de variáveis  $w = \frac{1}{z}$ , portanto, a origem em cada uma das figuras representa o infinito. Os demais exemplos da tese foram corrigidos com programas gráficos para ser tornarem mais fáceis de visualizar.

**Exemplo 3.9** Os conjuntos singulares, estável e instável, para a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (2+i)(\cos(4\pi t))^2 z(t)^2 + (2+i)z(t) + 1$$

estão representados pela figura (3.1). As pernas que tangenciam o eixo  $x$  em 0 são as pernas do conjunto singular estável. Mais especificamente, como estamos tratando de equações com  $n = 3$ , essas são 0-perna e a  $\pi$ -perna e as pernas que tangenciam o eixo  $y$  em 0 são as  $\frac{\pi}{2}$ -perna e  $\frac{3\pi}{2}$ -perna.

Podemos ver também que os conjuntos singulares não se autointerceptam, portanto, todos os pontos são regulares.

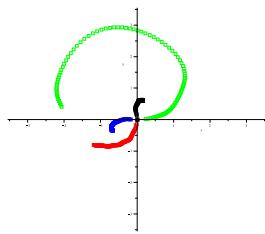


Figura 3.1: Todos os pontos dos conjuntos singulares são regulares.

**Exemplo 3.10** Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (2+i)\cos(2\pi t)z(t)^2 + (1+i)z(t) + ((2+i)\sin(8\pi t))^2.$$

Neste exemplo podemos ver que existe um ponto de autointerseção; o que implica uma descontinuidade na parametrização  $\Gamma_0$ . Podemos observar também os  $\frac{1}{2}$ -estados dos conjuntos singulares na figura (3.2). A interseção transversal entre o  $\frac{1}{2}$ -estado estável e o  $\frac{1}{2}$ -estado instável garante que uma pequena perturbação nas funções  $a_i$  ainda apresentará  $\frac{1}{2}$ -estados com interseção transversal.

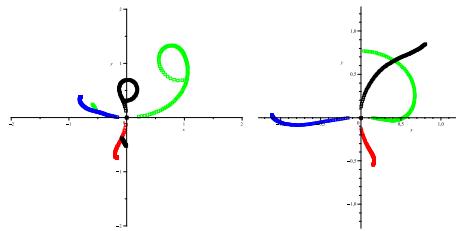


Figura 3.2: Uma autointerseção; Os  $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam transversalmente.

**Exemplo 3.11** Foi mostrado no exemplo (3.2) que os conjuntos  $X_k$  associados à equação

$$z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$$

não são densos. A figura (3.3) mostra os conjuntos singulares e os  $\frac{1}{2}$ -estados do conjunto singular estável. Como  $X_k$  não é denso, existe uma sobreposição dos  $\frac{1}{2}$ -estados com o conjunto singular, ou seja, todos os pontos alcançam infinito mais de uma vez. Nesse caso, os  $\frac{1}{2}$ -estados coincidem. Podemos ver também que conjunto singulares também coincidem; assim, a equação é não transversal.

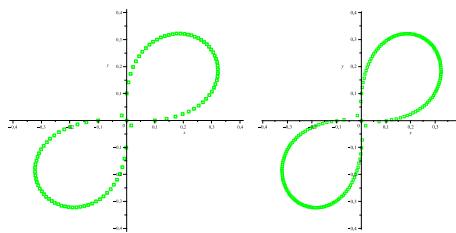


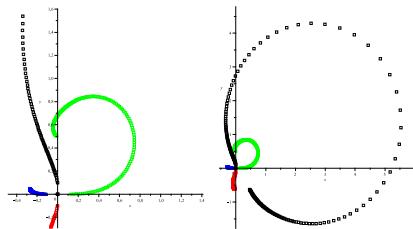
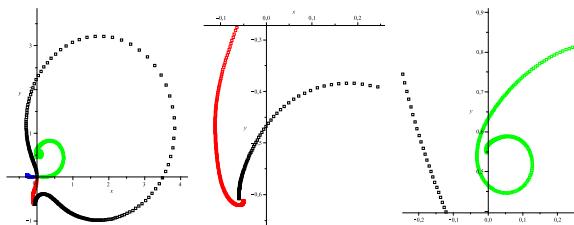
Figura 3.3: Equação é não transversal.

**Exemplo 3.12** Agora considere a família de equações, no parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dada por

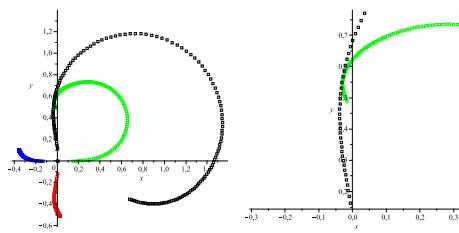
$$z'(t) = z(t)^3 + \lambda z(t)^2 + [(1+i)\sin(2\pi t))^2 + 0.3]z(t) + 3((2+i)\cos(2\pi t))^2.$$

Se escolhermos  $\lambda = 3$ , os  $\frac{1}{2}$ -estados da equação podem ser vistos na figura (3.4). Para esse valor de  $\lambda$ , os  $\frac{1}{2}$ -estados não se interceptam. Na figura são mostradas duas vistas dos conjuntos singulares para  $\lambda = 3$ . Isso significa que não existem pontos em que alguma trajetória generalizada alcança infinito mais de uma vez, ou seja, os conjuntos singulares não se autointerceptam, figura (3.5).

Para  $\lambda = 1.5$ , se observarmos a figura (3.6), veremos que uma das pernas do  $\frac{1}{2}$ -estado do conjunto singular estável praticamente tangencia uma das pernas do  $\frac{1}{2}$ -estado do conjunto singular instável. Então, nos conjuntos

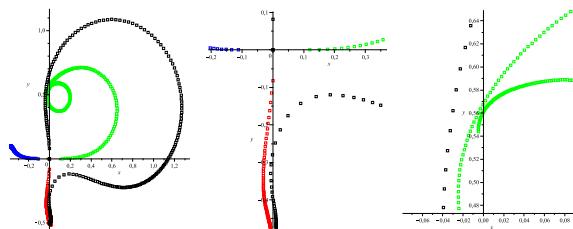
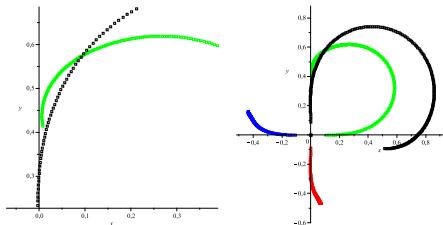
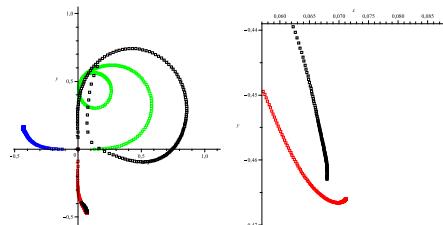
Figura 3.4:  $\frac{1}{2}$ -estados para  $\lambda = 3$ Figura 3.5: Conjuntos singulares para  $\lambda = 3$ 

singulares devemos ter, se não uma autointerseção, uma aproximação das pernas. Pois interseção nos  $t$ -estados significa que existe pelo menos uma trajetória generalizada que alcança infinito mais de uma vez, ou seja, os conjuntos singulares se auto-interceptam. Podemos confirmar essa expectativa observando a figura (3.7).

Figura 3.6:  $\frac{1}{2}$ -estados para  $\lambda = 1.5$ .

Se  $\lambda = 0.5$ , os  $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam transversalmente, figura (3.8). Essa interseção transversal das pernas deixa claro, visualmente, a autointerseção dos conjuntos singulares. Nesse caso, pela figura (3.9), apenas a descontinuidade no conjunto singular instável pode ser observada numericamente.

Assim, podemos dizer que deve existir um valor de  $\lambda \in [0, 3]$  tal que os  $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam de maneira não transversal.

Figura 3.7: Conjuntos singulares para  $\lambda = 1.5$ .Figura 3.8:  $\frac{1}{2}$ -estados para  $\lambda = 0.5$ .Figura 3.9: Conjuntos singulares para  $\lambda = 0.5$ .

### 3.3

#### Equações com infinitas soluções periódicas

Nesta seção estaremos interessados em equações que possuem infinitas soluções periódicas. O próximo exemplo mostra uma equação autônoma com coeficientes complexos que possui todas soluções periódicas.

**Exemplo 3.13** A equação  $z'(t) = z(t)^3 + 2\pi iz(t)$  possui infinitas soluções periódicas. De fato, resolvendo a equação explicitamente para a condição inicial  $z(0) = z_*$ , obtemos

$$z(t) = \frac{2\pi z_*}{\sqrt{(-2iz_*^2 - 4\pi e^{-4i\pi t} + 2iz_*^2 e^{-4i\pi t})\pi}}.$$

Uma vez que  $z(1) = z_*$ , concluímos que a equação possui infinitas soluções periódicas de período 1.

Os conjunto singulares associados a essa equação são idênticos aos conjunto singulares associados à equação do exemplo (3.11). Nesse caso também os conjuntos singulares coincidem.

Agora definiremos o segundo tipo de excepcionalidade, que ocorre quando a equação possui infinitas soluções periódicas. O exemplo (3.13) é um caso autônomo. Nesta seção mostraremos que existe uma família de equações não autônomas que possui infinitas soluções periódicas.

**Definição 3.14** *Suponha que as funções  $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, (n - 1)$  sejam periódicas de período 1. Dizemos que a equação (3-1) é **excepcional de 2º tipo** se possuir infinitas soluções periódicas.*

Seja  $c \in \mathbb{C}$ . Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + c \operatorname{sen}(2\pi t)z(t)^2. \quad (3-4)$$

Veremos que existe uma vizinhança de  $c$ ,  $V_c \subset \mathbb{C}$ , tal que a equação acima é excepcional de 2º tipo para todo  $c \in V_c$ . A figura (3.10) mostra os conjuntos singulares associados à equação (3-4) quando  $c = 2\sqrt{\pi}(1 - i)$ . Na primeira figura, mostramos apenas o conjunto singular estável e, na segunda, o conjunto singular instável.

Esses conjuntos são bem comportados, ou seja, possuem um número finito de autointerseções, mesmo havendo uma sobreposição deles (terceira figura). Na região limitada pelos dois conjuntos singulares a Aplicação de Poincaré  $T$  é a Identidade.

A figura (3.11) mostra a trajetória de alguns pontos da região limitada pelos conjuntos singulares. Observe que as trajetórias são fechadas, o que indica a excepcionalidade da equação.

Para mostrar que a equação (3-4) possui infinitas soluções periódicas, vamos transformar o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + c \operatorname{sen}(2\pi t)z(t)^2 \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3-5)$$

em um problema na variável complexa  $s$  pela mudança de variável  $s = e^{2\pi it}$ .

O lema (3.16) relaciona analiticidade numa vizinhança disco de raio 1,  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , da solução de um problema com domínio complexo com soluções periódicas de equações com domínio real. Já o lema (3.17) mostra que se a solução de um problema com domínio complexo for holomorfa numa região que contenha o disco de raio 1, uma pequena perturbação na condição inicial ou num parâmetro complexo ainda deixa a solução do problema perturbado holomorfa numa região que contém o disco unitário.

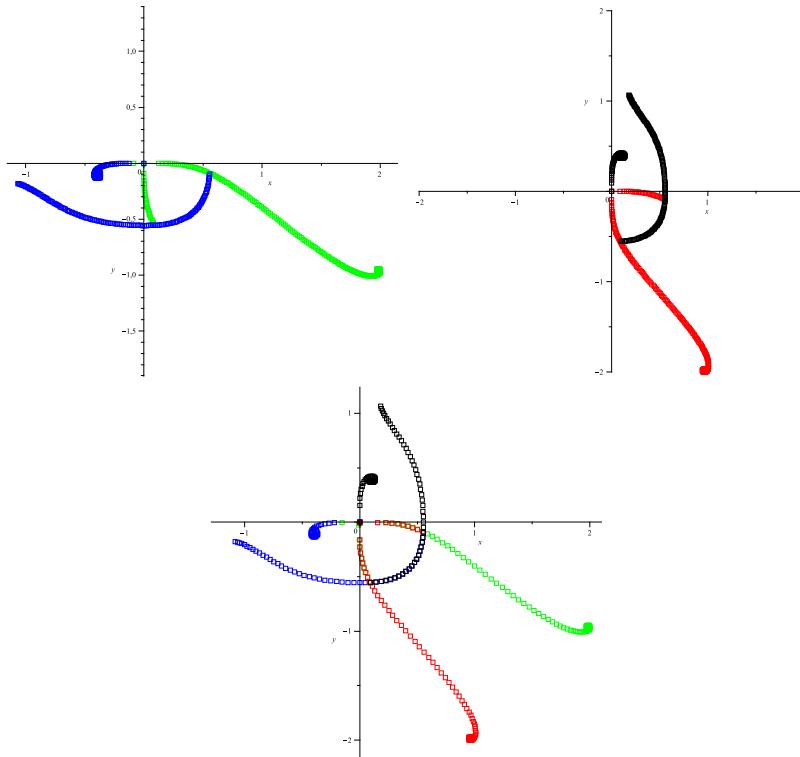


Figura 3.10: Os conjuntos singulares da equação  $z' = z^3 + 2\sqrt{\pi}(1-i)\sin(2\pi t)z^2$ .

Uma combinação destes resultados mostra que a equação (3-4) é excepcional de 2º tipo.

**Observação 3.15** Em [11] encontramos uma abordagem bastante detalhada sobre EDO's em domínios complexos. Em particular encontramos, no capítulo 2, o Teorema de Existência e Unicidade e a dependência analítica nos parâmetros.

**Lema 3.16** *Considere a mudança de variável  $s = e^{2\pi it}$  de forma que o problema*

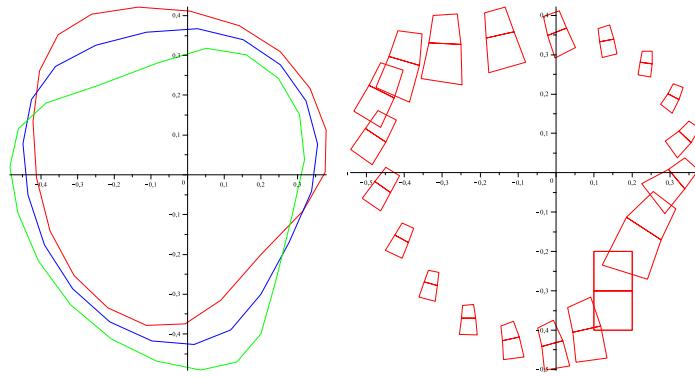
$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3-6)$$

*na variável real  $t$  possa ser transformado no problema*

$$\begin{cases} u'(s) = g(s, u(s)) \\ u(1) = u_1. \end{cases} \quad (3-7)$$

*na variável complexa  $s$ . Se a solução de (3-7) for holomorfa numa vizinhança do disco unitário,  $D_1$ , então a equação associada ao problema (3-6) possui solução periódica de período 1.*

*Prova.* Sejam  $u$  a solução do problema e  $A$  uma vizinhança de  $D_1$  tal que  $u$  seja holomorfa em  $A$ . Considere a curva  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ . Por um lado, uma vez

Figura 3.11: Trajetórias para a equação  $z(t)' = z(t)^3 + 2\sqrt{\pi}(1-i)\sin(2\pi t)z(t)^2$ .

que  $u(s)$  é holomorfa em  $A$ , temos  $\int_{\gamma} u'(s)ds = 0$ . Por outro lado, também temos que  $\int_{\gamma} u'(s)ds = \int_0^1 u'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))$ . Juntando as duas informações, temos  $u(\gamma(1)) = u(\gamma(0))$ . Pela mudança de variável dada na hipótese, essa última igualdade nos dá  $z(1) = z(0)$ .  $\blacksquare$

**Lema 3.17** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa numa vizinhança de  $(0, u_0, c)$ .*

*Se a solução de*

$$\begin{cases} u'(s) = f(s, u(s), c) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3-8)$$

*for holomorfa numa vizinhança do disco de raio 2, existem vizinhanças  $V_{u_0}, V_c \subset \mathbb{C}$ , de  $u_0$  e  $c$  respectivamente, tal que, se  $\tilde{u} \in V_{u_0}$  e  $\tilde{c} \in V_c$ , a solução de*

$$\begin{cases} u'(s) = f(s, u(s), \tilde{c}) \\ u(0) = \tilde{u} \end{cases} \quad (3-9)$$

*é holomorfa numa região que contém o disco unitário.*

*Prova.* Seja  $u(s)$  a solução de (3-8) que, por hipótese, é holomorfa numa vizinhança do disco de raio 2. Se considerarmos a mudança de variáveis  $s = xe^{iy}$ , com  $y \in [0, 2\pi]$ , temos  $u(s) = u(xe^{iy}) = v(x, y)$ . Se fixarmos um valor de  $y$ , transformamos o problema (3-8), na variável complexa  $s$ , no problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = f(xe^{iy}, v(x, y), c)e^{iy} \\ v(0, y) = u_0 \end{cases} \quad (3-10)$$

na variável real  $x$ . A solução de (3-10) é suave no intervalo  $[-2, 2]$ , pois  $u(s)$  é holomorfa no disco de raio 2.

Pela suavidade nos parâmetros, para  $\tilde{u}$  numa vizinhança  $V_{u_0}$  de  $u_0$  e  $\tilde{c}$  numa vizinhança  $V_c$  de  $c$  e para cada  $y$ , existe  $\delta_y$  (dependendo de  $y$ ) tal que a

solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = f(xe^{iy}, v(x, y), \tilde{c})e^{iy} \\ v(0, y) = \tilde{u}, \end{cases}$$

denotada por  $\tilde{v}(x, y)$ , é suave num intervalo  $(-2 + \delta_y, 2 - \delta_y)$  que contém o intervalo  $[-1, 1]$ .

Ainda pela continuidade nos parâmetros, a função  $\delta(y)$ , que associa à  $y$  um valor  $\delta_y$ , é contínua e, portanto, deve assumir um valor  $\delta_{min}$  tal que  $(-2 + \delta_y, 2 - \delta_y)$  contenha o intervalo  $[-1, 1]$  desde que  $V_{u_0}$  e  $V_c$  sejam vizinhanças apropriadas.

Assim, para  $\tilde{c} \in V_c$ ,  $\tilde{u} \in V_{u_0}$  temos que  $\tilde{v}(x, y)$  está definida no disco  $D_{min} = \{z = xe^{iy} : |z| \leq 2 - \delta_{min}\}$ . Observe que  $D_{min} \supset D_1$ .

Pelo teorema de existência e unicidade, [11],  $\tilde{v}(x, y) = \tilde{u}(s)$  é solução holomorfa de (3-9) numa vizinhança da origem. Se mostrarmos que  $\tilde{v}(x, y)$  é holomorfa em  $D_{min}$ , o lema estará provado.

Na teoria das funções complexas, temos que, se  $g(x, y) = g(z)$  é uma função complexa, então

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right). \quad (3-12)$$

Definimos  $H(x, y, \tilde{v}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}(x, y) - i \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}(x, y)$ . Por (3-12),  $\tilde{v}$  é holomorfa em  $D_{min}$  se, e somente se,  $H \equiv 0$  em  $D_{min}$ . Como  $\tilde{v}(x, y)$  é solução de (3-9), por (3-11), temos que  $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}(x, y) = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{v}(s) = f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c})$  numa vizinhança da origem; portanto,

$$H(x, y, \tilde{v}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}(x, y) - i f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, \tilde{v}(x, y)) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tilde{v}(x, y) - i \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) - i \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \\ &= \partial_3 f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \cdot [H(x, y, \tilde{v}(x, y))]. \end{aligned}$$

Ou seja,  $H$  satisfaz uma EDO linear e, como  $H(0, 0, \tilde{v}(0, 0)) = 0$ , pois  $\tilde{v}(x, y)$  é holomorfa na origem, teremos  $H \equiv 0$  enquanto  $\tilde{v}$  estiver definida; logo,  $H \equiv 0$

em  $D_{min}$  e, portanto,  $\tilde{v}$  é holomorfa em  $D_{min}$ . ■

Considere a mudança de variável  $s = e^{2\pi it}$  no problema (3-5). Então  $z(t) = u(e^{2\pi it}) = u(s)$  e, portanto, o problema pode ser reescrito na variável complexa  $s$  como

$$\begin{cases} u'(s) = \left[ u(s)^3 + c \left( \frac{s-s^{-1}}{2i} \right) u(s)^2 \right] \frac{1}{2\pi is} \\ u(1) = u_1 = z_0. \end{cases} \quad (3-13)$$

As mudanças de variáveis seguintes nos conduzirão a um problema cuja solução será inteira. Dessa forma, pelo lema (3.16), a EDO possuirá pelo menos uma solução periódica.

Agora, faça  $v(s) = \frac{1}{u(s)}$ . Assim, temos

$$\begin{cases} v'(s) = -\frac{1}{2\pi isv(s)} + \frac{c}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{s^2} \right) \\ v(1) = v_1 = \frac{1}{u_1}. \end{cases} \quad (3-14)$$

Finalmente, se considerarmos a mudança de variáveis  $w(s) = v(s) - \frac{c}{4\pi} \left( s + \frac{1}{s} \right)$ , o problema é reescrito como

$$\begin{cases} w'(s) = \frac{2i}{4\pi sw(s) + cs^2 + c} \\ w(1) = w_1, \end{cases} \quad (3-15)$$

onde  $w_1 = v_1 - \frac{c}{2\pi}$ . A partir disso, queremos encontrar uma solução inteira para o problema acima da forma  $w(s) = As$ , onde  $A \in \mathbb{C}$  será determinado da seguinte forma:

Se  $w(s) = As$ , então  $w'(s) = A$ ; logo, pela equação do problema (3-15), devemos ter  $A = \frac{2i}{4\pi As^2 + cs^2 + c}$ . Assim, se resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 4\pi A^2 + c = 0 \\ A \cdot c = 2i, \end{cases} \quad (3-16)$$

encontraremos a solução inteira desejada. Facilmente podemos verificar que  $A = \frac{(1-i)}{2\sqrt{\pi}}$  e  $c = -2\sqrt{\pi}(1-i)$ .

Com isso chegamos ao principal resultado deste capítulo.

**Teorema 3.18** *Existe um valor de  $c \in \mathbb{C}$  tal que a equação (3-4) é excepcional do 2º tipo. Além disso, existem conjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $\mathbb{C}$  tais que o problema de valor inicial (3-5), com  $c \in U$  e  $z_0 \in V$ , possui solução periódica.*

*Prova.* A partir do problema (3-15), com  $w_1 = 0$ , para  $c = -2\sqrt{\pi}(1-i)$ , a solução é dada por  $w(s) = \frac{(1-i)}{2\sqrt{\pi}}s$ . Pelo lema (3.16), podemos recuperar, por meio das mudanças de variáveis feitas em (3-5), uma solução periódica para (3-4).

Novamente pelo lema (3.16) combinado com o lema (3.17), pequenas perturbações na condição inicial ainda garantem infinitas soluções periódicas para a equação.

Como para os valores de  $c$  e  $A$  encontrados acima a equação é inteira, pequenas perturbações em  $c$  ainda implicarão soluções holomorfas em regiões que contêm  $D_1$ . Combinando novamente os lemas (3.16) e (3.17), a equação perturbada ainda possuirá infinitas soluções periódicas. ■