

2

Soluções Generalizadas e Conjuntos Singulares

O problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(a) = z_0, \end{cases} \quad (2-1)$$

com $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas, possui única solução local $z(t)$. Suponha que $z(t)$ esteja definida no intervalo $[a, t_1]$, assim denotamos por $\phi(t_1; a, z_0)$ a solução do problema acima calculada no tempo t_1 , isto é, $\phi(t_1; a, z_0) = z(t_1)$. Mais ainda, para um intervalo fixo $[a, b]$, suponha que a solução $z(t)$ esteja definida em todo intervalo $[a, b]$. Assim podemos definir a aplicação holomorfa $T : D \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$T(z_0) = \phi(b; a, z_0),$$

chamada de *Aplicação de Avanço* relativa ao intervalo $[a, b]$ onde D é um domínio apropriado. Quando $a = 0$ e $b = 1$, T é chamada de Aplicação de Poincaré, ou com abuso de linguagem, *Aplicação de Retorno*. Podemos definir também a inversa da aplicação T dada por $T^{-1}(z_0) = \phi(a; b, z_0)$.

Neste capítulo estaremos interessados nas singularidades da Aplicação de Retorno T e sua inversa T^{-1} , isto é, nas condições iniciais z_0 tais que a solução de (2-1) não está definida em $[a, b]$. Chamaremos esses pontos de conjunto singular da equação (1-1).

2.1

Soluções Generalizadas

Para estudarmos os conjuntos singulares, precisaremos resolver problemas de valor inicial com condição inicial infinita, isto é, queremos encontrar soluções para problemas do tipo

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_0) = \infty \end{cases} \quad (2-2)$$

Supondo que o problema acima possua solução, podemos dizer que tal solução está na esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Assim, se considerarmos a mudança de variáveis $w(t) = \frac{1}{z(t)}$, reescrevemos o problema (2-2) da forma

$$\begin{cases} w'(t) = -(w(t)^{2-n} + \dots + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2) \\ w(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2-3)$$

Assim, resolver o problema (2-2) com condição inicial infinita é o mesmo que resolver o problema (2-3) com condição inicial zero.

Exemplo 2.1 O problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'(t) = -w(t)^{-1} \\ w(t_0) = w_0 \end{cases} \quad (2-4)$$

tem solução

$$w(t) = \pm \sqrt{w_0^2 + 2(t_0 - t)} \quad (2-5)$$

onde o sinal “ \pm ” depende da condição inicial w_0 .

Suponha que $w_0 = 1$ e $t_0 = 0$ e que desejemos encontrar uma solução de (2-4) no intervalo $[0, 1]$. Uma vez que a solução é dada por $w(t) = \sqrt{1 - 2t}$, em $t = \frac{1}{2}$ a solução não está definida.

Queremos resolver o caso particular do problema (2-3), isto é, queremos resolver

$$\begin{cases} w'(t) = -w(t)^{-1} \\ w(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases} \quad (2-6)$$

Se considerarmos a mudança de variáveis $w(t)^2 = u(t)$, podemos transformar (2-6) em

$$\begin{cases} u'(t) = -2 \\ u(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

com solução única dada por $u(t) = -2t + 1$.

O que queremos agora é recuperar uma solução $w(t)$ para o problema (2-6) a partir de $u(t)$. Nesse caso, observe que, para cada uma das raízes de $w(t)^2 = u(t)$, podemos obter soluções do problema (2-6) dadas por $w(t) = \sqrt{1 - 2t}$ e $w(t) = -\sqrt{1 - 2t}$, que não são soluções no sentido clássico, pois a derivada não está definida no tempo $t = \frac{1}{2}$.

Assim, podemos resolver o problema (2-4) com $w_0 = 1$ e $t_0 = 0$ no intervalo $[0, 1]$ da seguinte forma: no intervalo $[0, \frac{1}{2})$, resolvemos o problema da forma tradicional; em seguida, fixamos uma raiz para $w(t)^2 = u(t)$ e obtemos a continuação da solução no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. A solução construída dessa forma

é uma solução generalizada no intervalo $[0, 1]$ que não é derivável apenas em $t = \frac{1}{2}$.

O exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 2.2 Uma *solução generalizada* para o problema (2-2) é uma curva contínua $\bar{\phi} : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ que cumpre as seguintes condições

- (i) $\bar{\phi}(t) \neq \infty$ **q.t.p**
- (ii) $(\bar{\phi}(t))' = (\bar{\phi}(t))^n + a_{n-1}(t)(\bar{\phi}(t))^{n-1} + \dots + a_1(t)(\bar{\phi}(t)) + a_0(t)$, exceto possivelmente em um conjunto enumerável.

Agora, se considerarmos a mudança de variáveis $u(t) = w(t)^{n-1}$, o problema (2-3) acima se torna

$$\begin{cases} u'(t) = c[1 + a_{n-1}(t)w(t) + \dots + a_1(t)w(t)^{n-1} + a_0(t)w(t)^n]. \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$$

onde $c = -(n-1)$. Assim, se fixarmos um ramo da raiz n -ésima ${}^{n-1}\sqrt{u} = w$ podemos reescrever o problema acima da seguinte maneira

$$\begin{cases} u'(t) = c[1 + a_{n-1}(t)u(t)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_1(t)u(t) + a_0(t)u(t)^{\frac{n}{n-1}}]. \\ u(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2-7)$$

Para problemas como (2-2), não conseguimos garantir a unicidade das soluções generalizadas, como mostra o exemplo (2.1). Mais ainda, o próprio ramo ${}^{n-1}\sqrt{u}$ não está, em princípio, continuamente bem definido. O próximo lema técnico é um Teorema de Existência e contorna as dificuldades apresentadas. Mesmo não sendo possível garantir a unicidade, o lema fornece um número de soluções generalizadas em um intervalo de tempo suficientemente pequeno.

Lema 2.3 O problema (2-2) possui pelo menos $(n-1)$ soluções generalizadas no intervalo $[t_0, t_0 + \epsilon]$ para ϵ suficientemente pequeno. Mais precisamente, se escolhermos um ramo $w(t) = {}^{n-1}\sqrt{u(t)}$ e \tilde{c} uma constante tal que $0 < \tilde{c} < \min\{|c|, \sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|_{C^0}\}$ o problema (2-7) possui única solução em

$$X = \{u \in C^0([t_0, t_0 + \epsilon]; \mathbb{C}) : |u(t) - c(t - t_0)| \leq \tilde{c}(t - t_0) \text{ e } |u(t)| \leq A < 1\}.$$

$$\text{onde } A = \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|_{C^0}} \right)^{n-1} \text{ e}$$

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{1}{|c|(1+\tilde{c})} \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|_{C^0}} \right)^{n-1}, \left(\frac{1}{2 \sum_{i=1}^n M_i \frac{(n-1)}{i} \|a_i\|_{C^0}} \right)^{n-1} \right\},$$

sendo $M_\alpha = |c|^{\frac{\alpha}{n-1}} K_\alpha$ onde K_α é a constante de Lipschitz de $f(v) = v^{\frac{\alpha}{n-1}}$ para v satisfazendo $|v - 1| \leq \frac{\tilde{c}}{|c|} < 1$, para $\alpha = 1, \dots, n$.

Prova. Ao longo desta demonstração, eventualmente, vamos omitir a dependência de t das funções $u(t)$ e $a_i(t)$. Também vamos supor que $t_0 = 0$ e que $\|f\| := \|f\|_{C^0} = \sup_{t \in [0, \epsilon]} |f(t)|$.

Observe que, pela escolha do ramo, a raiz $u^{\frac{1}{n-1}}$ fica continuamente bem definida para $u \in X$.

Defina o operador $F : X \rightarrow C^0([0, \epsilon]; \mathbb{C})$ dado por

$$F(u)(t) = c \int_0^t (1 + a_{n-1}u^{\frac{1}{n-1}} + a_{n-2}u^{\frac{2}{n-1}} + \dots + a_1u + a_0u^{\frac{n}{n-1}}) ds.$$

Para mostrarmos que o problema (2-7) possui única solução, basta ver que F é uma $\frac{1}{2}$ - contração, isto é, $\|F(u_2) - F(u_1)\| \leq \frac{1}{2}\|u_2 - u_1\|$ e que $F(X) \subset X$. Antes de vermos que F é uma contração, consideraremos funções auxiliares v_i definidas por $u_i = ctv_i$, $i = 1, 2$ e $u_i \in X$. Uma vez que $|u_i(t) - ct| < \tilde{c}t$ temos $|v_i - 1| < \frac{\tilde{c}}{|c|} < 1$. Assim, omitindo a dependência de t ,

$$\begin{aligned} |F(u_2) - F(u_1)| &\leq |c| \int_0^t (|a_{n-1}| |u_2^{\frac{1}{n-1}} - u_1^{\frac{1}{n-1}}| + \dots + |a_0| |u_2^{\frac{n}{n-1}} - u_1^{\frac{n}{n-1}}|) ds \\ &\leq |c| \int_0^t (|a_{n-1}| |(csv_2)^{\frac{1}{n-1}} - (csv_1)^{\frac{1}{n-1}}| + \dots + \\ &\quad + |a_0| |(csv_2)^{\frac{n}{n-1}} - (csv_1)^{\frac{n}{n-1}}|) ds. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 1, 2, \dots, n$ denotaremos $c_\alpha = c^{\frac{\alpha}{(n-1)}}$, K_α a constante de Lipschitz de $f(v) = v^{\frac{\alpha}{n-1}}$, onde os pontos v do domínio satisfazem $|v - 1| \leq \frac{\tilde{c}}{|c|} < 1$ e

$M_\alpha = |c_\alpha|K_\alpha$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& |F(u_2)(t) - F(u_1)(t)| \leq \\
& |c| \int_0^t (|a_{n-1}| |c_1| |s|^{\frac{1}{n-1}} K_1 |v_2 - v_1| + \dots + |a_0| |c_n| |s|^{\frac{n}{n-1}} K_n |v_2 - v_1|) ds \leq \\
& \int_0^t (|a_{n-1}| |s|^{\frac{1}{n-1}-1} M_1 |u_2 - u_1| + \dots + |a_0| |s|^{\frac{n}{n-1}-1} M_n |u_2 - u_1|) ds \leq \\
& M_1 |a_{n-1}| \|u_2 - u_1\| \int_0^t s^{\frac{2-n}{n-1}} ds + \dots + M_n |a_0| \|u_2 - u_1\| \int_0^t s^{\frac{1}{n-1}} ds \leq \\
& \|u_2 - u_1\| \left[M_1 |a_{n-1}| (n-1) \epsilon^{\frac{1}{(n-1)}} + \dots + M_n |a_0| \frac{(n-1)}{n} \epsilon^{\frac{n}{(n-1)}} \right] \leq \\
& \|u_2 - u_1\| \left[M_1 |a_{n-1}| (n-1) + \dots + M_n |a_0| \frac{(n-1)}{n} \right] \epsilon^{\frac{1}{(n-1)}} \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \|u_2 - u_1\|.
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que $F(X) \subset X$. Primeiro veremos que se $|u(t)| \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=1}^n \|a_i\|} \right)^{n-1}$ então $|F(u)(t)| \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=1}^n \|a_i\|} \right)^{n-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|F(u)(t)| &= |c| \left| \int_0^t (1 + a_{n-1} u^{\frac{1}{n-1}} + a_{n-2} u^{\frac{2}{n-1}} + \dots + a_1 u + a_0 u^{\frac{n}{n-1}}) ds \right| \\
&\leq |c| \int_0^t (1 + |a_{n-1}| |u|^{\frac{1}{n-1}} + |a_{n-2}| |u|^{\frac{2}{n-1}} + \dots + |a_1| |u| + |a_0| |u|^{\frac{n}{n-1}}) ds \\
&\leq |c| \int_0^t (1 + (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|) |u|^{\frac{1}{n-1}}) ds \\
&\leq |c| (1 + \tilde{c}) \epsilon \\
&\leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=1}^n \|a_i\|} \right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

E, por último, queremos mostrar que $|F(u)(t) - ct| \leq \tilde{c}t$ desde que $|u(t) - ct| \leq \tilde{c}t$. Assim precisamos apenas ver que

$$|F(u)(t) - ct| = \left| \int_0^t (a_{n-1} u^{\frac{1}{n-1}} + a_{n-2} u^{\frac{2}{n-1}} + \dots + a_1 u + a_0 u^{\frac{n}{n-1}}) ds \right| \leq \tilde{c}t.$$

Uma vez que $|u(t)| \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=1}^n \|a_i\|} \right)^{n-1}$, a expressão acima pode ser facilmente verificada fazendo

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t (a_{n-1} u^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_0 u^{\frac{n}{n-1}}) ds \right| &\leq \int_0^t (|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) |u|^{\frac{1}{n-1}} ds \\
&\leq \tilde{c}t.
\end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que existem pelo menos $(n-1)$ soluções

generalizadas no intervalo $[t_0 - \epsilon, t_0]$. ■

Para entender o comportamento da equação associada ao problema (2-3) numa vizinhança da origem, escrevemos

$$\begin{aligned} u(t_0 - \epsilon^{n-1}) &= -(n-1) \int_{t_0}^{t_0 - \epsilon^{n-1}} (1 + a_{n-1}(s)u(s)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_0(s)u(s)^{\frac{n}{n-1}}) ds \\ &= (n-1) \int_{t_0 - \epsilon^{n-1}}^{t_0} (1 + a_{n-1}(s)u(s)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_0(s)u(s)^{\frac{n}{n-1}}) ds \\ &\approx (n-1)\epsilon^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim

$$w(t_0 - \epsilon^{n-1}) \approx (n-1)^{\frac{1}{n-1}} \xi^k \epsilon$$

para algum k fixo entre $1, \dots, (n-1)$, onde ξ é raiz n -ésima da unidade.

Denotando por $\bar{\phi}_k(t)$ uma das soluções generalizadas de (2-3), devemos ter

$$\arg[\bar{\phi}_k(t_0 - \epsilon^{n-1})] \approx \frac{2k\pi}{n-1}.$$

Analogamente, para $\tilde{k} = 1, \dots, (n-1)$, podemos ver que para o intervalo $[t_0, t_0 + \epsilon^{n-1}]$ teremos

$$\arg[\bar{\phi}_{\tilde{k}}(t_0 + \epsilon^{n-1})] \approx \frac{(2\tilde{k} - 1)\pi}{n-1}.$$

Poderiam ainda existir outras soluções generalizadas além das previstas. Tais soluções que não estariam contidas no conjunto X . O próximo lema mostra que não existem tais soluções.

Lema 2.4 *Para ϵ suficientemente pequeno, o problema (2-2) possui exatamente $(n-1)$ soluções generalizadas em $[t_0, t_0 + \epsilon]$.*

Prova. Suponha $t_0 = 0$. Mostraremos que qualquer solução $u(t)$ de (2-7) deverá estar contida no conjunto X definido no lema (2.3).

Utilizando a notação dada, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$|u(t)| \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right)^{n-1} \tag{2-8}$$

para t em $[0, \epsilon]$, pois, se $u(t)$ é solução, $u(0) = 0$. Ora, mas por (2-8), assim como no lema (2.3), devemos ter

$$\begin{aligned}
|u(t) - ct| &\leq t\|a_{n-1}\| \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right) + \dots + t\|a_0\| \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right)^n \\
&\leq t\|a_{n-1}\| \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right) + \dots + t\|a_0\| \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right) \\
&\leq t\tilde{c}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $u(t)$ é solução, necessariamente ela deve estar contida em X e, a menos de escolha de ramos, deve ser única. ■

Exemplo 2.5 As figuras (2.1) e (2.2) mostram como é o comportamento da equação

$$z'(t) = z(t)^4$$

numa vizinhança de infinito nos sistemas de coordenadas z e $w = \frac{1}{z}$.

Em coordenadas z podemos observar 6 trajetórias alcançando ou deixando infinito, sendo que duas delas coincidem com o eixo x . Observamos também que as trajetórias de soluções clássicas se aproximam e depois se afastando de infinito acompanhando alguma solução generalizada, figura (2.1).

No sistema w , figura (2.2), podemos observar o mesmo comportamento. Aqui fica mais claro, visualmente, que as soluções clássicas acompanham as soluções generalizadas.

Assim, numa vizinhança de infinito, a equação $z'(t) = z(t)$ é uma aproximação para o comportamento de

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t). \quad (2-9)$$

Agora mostraremos que a solução do problema (2-2) depende continuamente das funções a_i . Isto é, se u e \tilde{u} são soluções de problemas como (2-7) com funções a_i e \tilde{a}_i , respectivamente, queremos ver que se $a_i \rightarrow \tilde{a}_i$ então $u \rightarrow \tilde{u}$. Mais precisamente temos o seguinte lema.

Lema 2.6 *A solução do problema (2-7) depende continuamente das funções a_i na topologia C^0 .*

Prova. Primeiramente vamos supor que $t_0 = 0$. Usaremos a notação do lema (2.3), isto é, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C^0}$. Para vermos a dependência contínua, considere dois operadores, análogos ao operador do lema (2.3), $F : X \rightarrow X$ dado por

$$F(u)(t) = c \int_0^t (1 + a_{n-1}u^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_0u^{\frac{n}{n-1}}) ds.$$

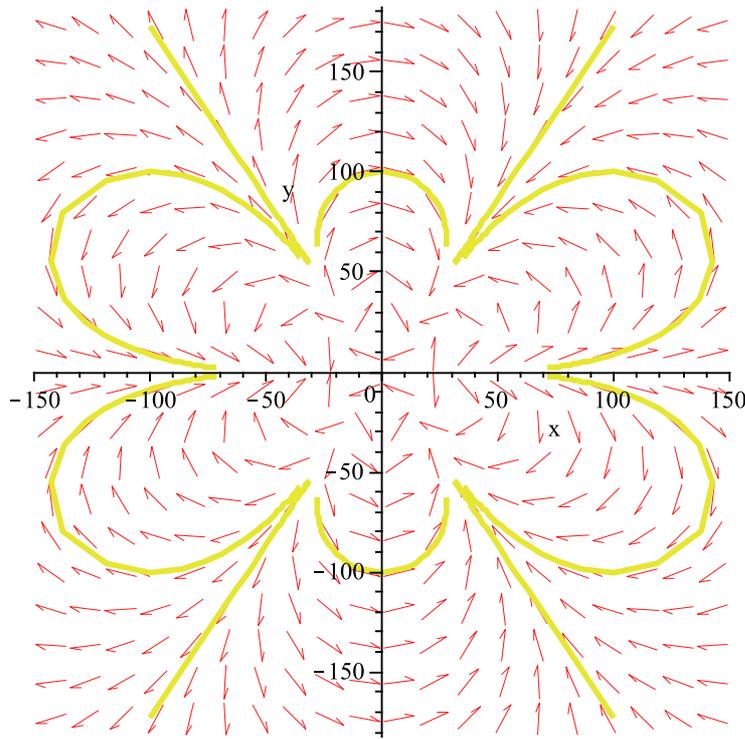


Figura 2.1: Comportamento $z' = z^4$ numa vizinhança de infinito em coordenadas z

onde

$$X = \left\{ u \in C^0([0, \epsilon]; \mathbb{C}) : |u(t) - ct| \leq \tilde{c}t \text{ e } |u(t)| \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|a_i\|} \right)^{n-1} \right\}$$

e $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ dado por

$$\tilde{F}(u)(t) = c \int_0^t (1 + \tilde{a}_{n-1} u^{\frac{1}{n-1}} + \dots + \tilde{a}_0 u^{\frac{n}{n-1}}) ds.$$

onde

$$\tilde{X} = \left\{ u \in C^0([0, \tilde{\epsilon}]; \mathbb{C}) : |u(t) - ct| \leq \tilde{k}t \text{ e } |u(t)| \leq \left(\frac{\tilde{k}}{\sum_{i=0}^{n-1} \|\tilde{a}_i\|} \right)^{n-1} \right\}.$$

Sejam u e \tilde{u} pontos fixos dos operadores F e \tilde{F} respectivamente. Queremos mostrar que

$$\|u - \tilde{u}\| \rightarrow 0 \text{ se } \|a_i - \tilde{a}_i\| \rightarrow 0$$

para $i = 1, \dots, n-1$. Primeiramente note que \tilde{k} e \tilde{c} devem ser menores que

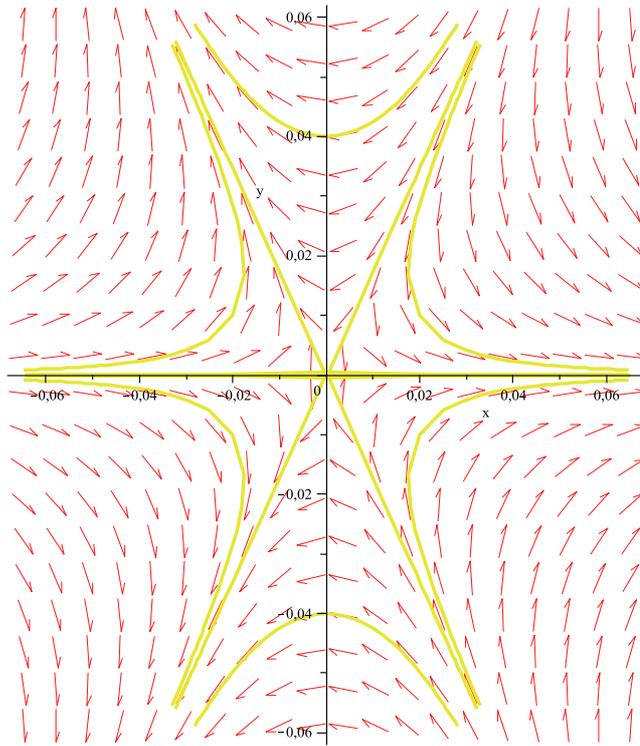


Figura 2.2: Comportamento $z' = z^4$ numa vizinhança de infinito em coordenadas $w = \frac{1}{z}$

certas constantes para podermos aplicar o lema da contração; assim sendo, escolhemos $\tilde{c} < \tilde{k}$ de forma que $u \in \tilde{X}$. Portanto,

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \|u - \tilde{F}(u)\| + \|\tilde{F}(u) - \tilde{u}\|.$$

Uma vez que \tilde{F} é uma $\frac{1}{2}$ -contração e \tilde{u} é seu ponto fixo, temos

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\| &\leq \|u - \tilde{F}(u)\| + \|\tilde{F}(u) - \tilde{u}\| \\ &\leq \|u - \tilde{F}(u)\| + \frac{1}{2}\|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

e, portanto, $\|u - \tilde{u}\| \leq 2\|u - \tilde{F}(u)\|$. Assim, basta mostrar que $\|u - \tilde{F}(u)\| \rightarrow 0$ quando $\|a_i - \tilde{a}_i\| \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{F}(u)\| &\leq \int_0^t (|a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1}| |u|^{\frac{1}{n-1}} + \dots + |a_0 - \tilde{a}_0|) |u|^{\frac{n}{n-1}} ds \\ &\leq (|a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1}| + \dots + |a_0 - \tilde{a}_0|) M \int_0^t ds, \end{aligned}$$

onde M é tal que $|u|^{\frac{\alpha}{n-1}} < M$ para $\alpha = 1, \dots, n$. Assim, se $\|a_i - \tilde{a}_i\| \rightarrow 0$,

temos $\|u - \tilde{F}(u)\| \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $\|u - \tilde{u}\| \rightarrow 0$ ■

Agora mostraremos que a solução u de (2-7) depende de forma C^1 das funções a_i desde que essas sejam C^1 . Para isso, veremos que as derivadas direcionais existem e são contínuas. Para fixar a notação, considere, omitindo a dependência da variável t das funções a_i e b_i , o seguinte problema,

$$\begin{cases} u'(t; h) = c(1 + (a_{n-1} + hb_{n-1})u(t; h)^{\frac{1}{n-1}} + \\ + \dots + (a_0 + hb_0)u(t; h)^{\frac{n}{n-1}}) \\ u(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2-10)$$

cuja solução vamos denotar por $u(t; h)$ e $u'(t; h) = \frac{d}{dt}u(t; h)$. Vamos supor agora que as funções a_i e b_i sejam suaves. Queremos mostrar que existe $\frac{\partial u}{\partial h}(t; 0)$ tal que

$$u(t; h) - u(t; 0) = \frac{\partial u}{\partial h}(t; 0) \cdot h + O(h)$$

com $\frac{O(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Antes, suponha que a solução de (2-10) dependa de maneira suave das funções a_i . Vamos exibir uma expressão para a derivada direcional $\frac{\partial u}{\partial h}(t; 0)$.

Derivando a equação relativa ao problema (2-10) com relação à segunda variável, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h}u'(t; h) &= c(b_{n-1}u(t; h)^{\frac{1}{n-1}} + (a_{n-1} + hb_{n-1})\frac{1}{n-1}u(t; h)^{\frac{2-n}{n-1}}\frac{\partial}{\partial h}u(t; h) + \\ &+ \dots + b_0u(t; h)^{\frac{n}{n-1}} + (a_0 + hb_0)\frac{n}{n-1}u(t; h)^{\frac{1}{n-1}}\frac{\partial}{\partial h}u(t; h). \end{aligned}$$

Defina $v(t; h) := \frac{\partial}{\partial h}u(t; h)$. Derivando $v(t; h)$ com relação à variável t , teremos $v'(t; h) = (\frac{\partial}{\partial h}u(t; h))' = \frac{\partial}{\partial h}u'(t; h)$. Portanto, a derivada da solução u do problema (2-10) com relação a h quando $h = 0$ é a solução do problema

$$\begin{aligned} v'(t; 0) &= c \left(a_{n-1}(t)\frac{1}{n-1}u(t; 0)^{\frac{2-n}{n-1}} + \dots + a_0(t)\frac{n}{n-1}u(t; 0)^{\frac{1}{n-1}} \right) v(t; 0) \\ &+ c \left(b_{n-1}u(t; 0)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + b_0u(t; 0)^{\frac{n}{n-1}} \right) \end{aligned}$$

com $v(t_0; 0) = v'(t_0; 0) = 0$ pois $u(t_0) = 0$ e $u'(t_0) = -(n-1)$. Observe que $u(t)^{\frac{2-n}{n-1}}$ e outros coeficientes são descontínuos em $t = 0$, mas, mesmo assim, ainda podemos integrar. Dessa forma a solução $v(t; 0)$ está definida continuamente.

A notação $v(t; 0)$ será utilizada na demonstração do próximo lema.

Lema 2.7 *A solução do problema (2-7) depende suavemente das funções a_i desde que elas sejam suaves. Mais precisamente, para uma família a um parâmetro de soluções $u(t; h)$ de (2-10), $\frac{\partial u}{\partial h}(t; 0)$ existe e é contínua.*

Prova. Antes de mais nada, para facilitar a notação, chamaremos $u(t; 0) = u_0(t)$, $u(t; h) = u_h(t)$ e omitiremos a dependência da variável t em $a_i(t)$, $b_i(t)$, $u_0(t)$, $u_h(t)$ e $v(t)$.

Vamos ver agora que a função v , obtida acima, é de fato a derivada $\frac{\partial u}{\partial h}(t; 0)$. Para $h \approx 0$, mostraremos que $[u_0 + hv]$ é uma aproximação para uma solução de (2-10). A aproximação para a condição inicial é facilmente verificada já que $u(t_0; 0) - v(t_0) = 0$. Veremos agora que

$$\begin{aligned} [u_0 + hv]' &= c(1 + (a_{n-1} + hb_{n-1})[u_0 + hv]^{\frac{1}{n-1}} + \\ &\dots + (a_0 + hb_0)[u_0 + hv]^{\frac{n}{n-1}}) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2-11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} &c \left[1 + (a_{n-1} + hb_{n-1})[u_0 + hv]^{\frac{1}{n-1}} + \dots + (a_0 + b_0)[u_0 + hv]^{\frac{n}{n-1}} \right] = \\ &c \left[1 + a_{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}} + a_{n-1}\frac{1}{n-1}u_0^{\frac{2-n}{n-1}}hv + hb_{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}} + O(h^2) + \dots + \right. \\ &\left. + a_0u_0^{\frac{n}{n-1}} + a_0\frac{n}{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}}hv + hb_0u_0^{\frac{n}{n-1}} + O(h^2) \right] = \\ &\left[1 + a_{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_0u_0^{\frac{n}{n-1}} \right] + \\ &+ h \left[c \left[a_{n-1}\frac{1}{n-1}u_0^{\frac{2-n}{n-1}} + \dots + a_0\frac{n}{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}} \right] v + \right. \\ &\left. + c \left[b_{n-1}u_0^{\frac{1}{n-1}} + \dots + b_0u_0^{\frac{n}{n-1}} \right] \right] + O(h^2) \\ &= u_0' + hv' + O(h^2). \end{aligned}$$

Isso mostra a estimativa (2-11). Ainda precisamos ver que $[u(t; 0) + hv(t)]$ é uma aproximação para uma solução de (2-10).

Considere a $\frac{1}{2}$ -contração

$$F_h(\tilde{u})(t) = c \int_0^t (1 + [a_{n-1} + hb_{n-1}]\tilde{u}^{\frac{1}{n-1}} + \dots + [a_0 + hb_0]\tilde{u}^{\frac{n}{n-1}}) ds,$$

definida como no lema (2.3), assim se u_h é ponto fixo de F_h então $\|\tilde{u} - u_h\| \leq$

$2\|\tilde{u} - F_h(\tilde{u})\|$. Seja $\tilde{u} = u_0 + hv$, então

$$\begin{aligned}\tilde{u} - F_h(\tilde{u}) &= \tilde{u} - c \int_0^t (1 + [a_{n-1} + hb_{n-1}]\tilde{u}^{\frac{1}{n-1}} + \dots + [a_0 + hb_0]\tilde{u}^{\frac{n}{n-1}}) ds \\ &= \int_0^t [(\tilde{u})' - c[1 + [a_{n-1} + hb_{n-1}]\tilde{u}^{\frac{1}{n-1}} + \dots + [a_0 + hb_0]\tilde{u}^{\frac{n}{n-1}}]] ds \\ &= \int_0^t O(h^2) = O(h^2)\end{aligned}$$

pela estimativa (2-11).

Portanto $\|\tilde{u} - u_h\| \leq 2\|\tilde{u} - F_h(\tilde{u})\| \leq O(h^2)$, ou seja,

$$u(t; 0) + hv(t) = u(t; h) - O(h^2).$$

Pela definição de derivada direcional, temos que $v(t) = \frac{\partial u}{\partial h}(t; 0)$. Uma vez que $v(t)$ depende continuamente de h , é sabido que a função deve ser suave. Portanto, as soluções de (2-2) dependem de maneira C^1 das funções a_i . ■

2.2

Conjuntos singulares

Uma vez que o problema (2-2) possui soluções generalizadas, nesta seção vamos definir os conjuntos singulares. No próximo exemplo encontraremos os conjuntos singulares da Aplicação de Poincaré para a equação $z'(t) = z(t)^3$.

Exemplo 2.8 Considere a equação $z'(t) = z(t)^3$. Resolvendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2-12)$$

encontramos a solução

$$z(t) = \frac{z_0}{\sqrt{-2tz_0^2 + 1}}. \quad (2-13)$$

Podemos ver pela solução (2-13) que $T(z_0)$ não está definido se, e somente se,

$$2tz_0^2 - 1 = 0$$

para algum $t \in [0, 1]$, ou seja, as condições iniciais que alcançam infinito para a solução do problema (2-12) são da forma

$$z_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2t}}. \quad (2-14)$$

para $t \in [0, 1]$. A igualdade (2-14) nos mostra que o conjunto dos pontos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ que não estão no domínio de T é da forma

$$\left\{ z : y = 0, x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \cup \left\{ z : y = 0, x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad (2-15)$$

De maneira análoga, podemos resolver

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 \\ z(1) = z_0 \end{cases}$$

e encontrar as condições iniciais tais que a inversa T^{-1} não esteja definida. Nesse caso, o conjunto dos pontos z fora do domínio de T^{-1} é dado por

$$\left\{ z : x = 0, y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \cup \left\{ z : x = 0, y \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \quad (2-16)$$

Os conjuntos (2-15) e (2-16) podem ser vistos como subconjuntos da esfera de Riemann, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A figura (2.3) mostra os conjuntos singulares da equação $z'(t) = z(t)^3$ em coordenadas w , ou seja, a origem do sistema de coordenadas representa o infinito em coordenadas z .

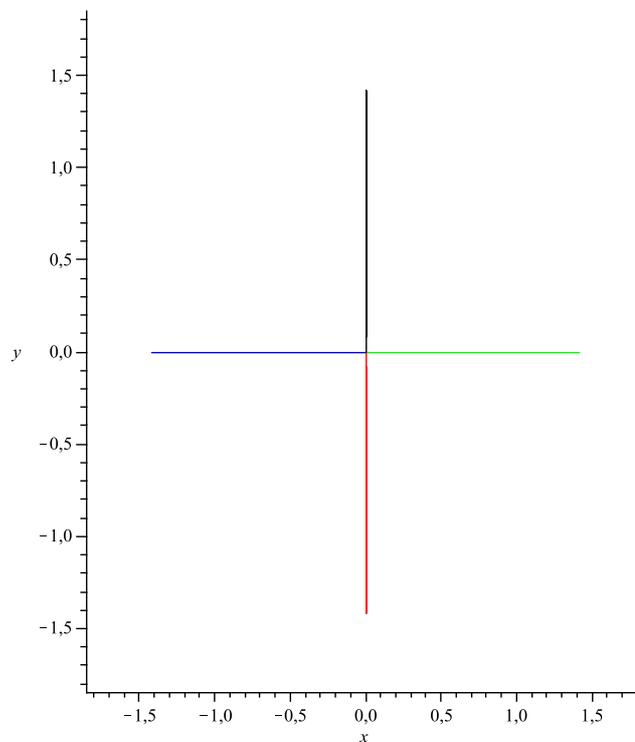


Figura 2.3: Conjuntos singulares da equação $z'(t) = z(t)^3$.

Estaremos interessados agora nos pontos $z_* \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que $\overline{\phi}(t_*; a, z_*) = \infty$ para algum $t_* \in [a, b]$.

Uma *trajetória generalizada* do ponto z_* é uma curva

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

dada por $\alpha(t) = \overline{\phi}(t; a, z_*)$, onde $\overline{\phi}$ é uma solução generalizada.

Definição 2.9 Considere a equação (2-9) definida no intervalo $[a, b]$. O conjunto **singular estável**, denotado por S^e , é o conjunto dos pontos $z_* \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que

$$\alpha(t_*) = \overline{\phi}(t_*; a, z_*) = \infty,$$

para algum $t_* \in [a, b]$ e alguma trajetória generalizada α . Analogamente, o conjunto **singular instável**, denotado por S^i , são os pontos $z_* \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que

$$\alpha(t_*) = \overline{\phi}(t_*; b, z_*) = \infty,$$

para algum $t_* \in [a, b]$ e alguma uma trajetória generalizada α .

Observe que os conjuntos singulares estão relacionados com a Aplicação de Avanço e sua inversa, isto é, o conjunto singular estável são as singularidades da aplicação T , enquanto o conjunto singular instável são as singularidades da aplicação T^{-1} .

A partir do momento em que uma trajetória generalizada alcança infinito, pelo lema (2.3), podemos escolher entre $(n - 1)$ soluções generalizadas para continuar descrevendo uma das trajetórias generalizadas de um determinado ponto.

Veremos, mais tarde, que uma trajetória generalizada pode alcançar infinito mais de uma vez. Nesse caso, os conjunto singulares apresentarão autointerseções. Em particular, essas autointerseções interferem no número de pontos fixos da Aplicação de Poincaré associadas à equação (2-9).

A próxima proposição apresenta uma parametrização para um trecho do conjunto singular estável. A parametrização para o conjunto singular instável é feita de maneira análoga.

Proposição 2.10 Considere o problema (2-3). Suponha que exista uma solução generalizada $\overline{\phi}_k : [a, t_0] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que se $t \in [a, t_0)$ então $\overline{\phi}_k(t) \neq 0$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\Gamma_k : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tais que, para todo $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $\overline{\phi}_k(t_1; a, \Gamma_k(t_1)) = 0$, $\overline{\phi}_k(t; a, \Gamma_k(t_1)) \neq 0$ para $t \in [a, t_1)$ com $\arg(\overline{\phi}_k(t_1 - \tilde{\epsilon}; a, \Gamma_k(t_1))) \approx \frac{2k\pi}{n-1}$ para $\tilde{\epsilon}$ suficientemente pequeno. Além disso, a parametrização Γ_k é contínua quando estiver definida.

Prova. Considere o problema (2-3) escrito na forma

$$\begin{cases} u'(t) = c[1 + a_{n-1}(t)u(t)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_1(t)u(t) + a_0(t)u(t)^{\frac{n}{n-1}}] \\ u(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2-17)$$

com solução $u(t; t_0)$. Por hipótese, temos que $u(t; t_0) \neq 0$ em $[a, t_0)$, portanto, devemos ter $\Gamma_k(t_0) = \overline{\phi}_k(a; t_0, 0)$, com $\overline{\phi}_k$ uma solução generalizada fixada.

Primeiro mostraremos que Γ_k está definida numa vizinhança de t_0 . Ou seja, a solução de

$$\begin{cases} u'(t) = c[1 + a_{n-1}(t)u(t)^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_1(t)u(t) + a_0(t)u(t)^{\frac{n}{n-1}}] \\ u(s) = 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

dada por $u(t; s)$ é diferente de zero no intervalo $[a, s)$ desde que $s \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ para algum ϵ .

Seja $a_i(t; s) := a_i(t + s - t_0)$, para $i = 1, \dots, (n - 1)$, e considere, omitindo a dependência de t de $u(t)$, o problema

$$\begin{cases} u' = c[1 + a_{n-1}(t; s)u^{\frac{1}{n-1}} + \dots + a_1(t; s)u + a_0(t; s)u^{\frac{n}{n-1}}] \\ u(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

com solução $u_s(t; t_0)$ (e solução $\bar{\phi}_{k,s}(t)(t, t_0, 0)$ no sistema de coordenadas $w = \frac{1}{z}$). Note que $u_{t_0}(t; s)$ é solução de (2-18) e $u_{t_0}(t; t_0)$ solução de (2-17). Pela continuidade nas funções a_i , lema (2.6), dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|s - t_0| < \delta_1$ então $|u_s(t; t_0) - u_{t_0}(t; t_0)| < \epsilon_1$ em $[a, t_0]$. Assim, temos $u_s(t; t_0) \neq 0$ em $[a, t_0)$.

Observe que a solução de (2-19) é a solução de (2-18) com variável t transladada. Ou seja,

$$u_s(t; t_0) = u_{t_0}(t - t_0 + t_1; t_1). \quad (2-20)$$

Uma vez que $u_s(t; t_0) \neq 0$ em $[a, t_0)$, queremos mostrar que $u_{t_0}(t; s) \neq 0$ em $[a, s)$. De fato, seja $\tilde{t} < s$ então $\tilde{t} - s + t_0 < t_0$. Por (2-20) temos $u_{t_0}(\tilde{t}; s) = u_s(\tilde{t} - s + t_0; t_0) \neq 0$ para $\tilde{t} \in [a, s)$. Assim, se $\epsilon = \delta_1$, Γ_k está bem definida em $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Para ver que $\arg(\bar{\phi}_k(t_1 - \tilde{\epsilon}; a, \Gamma_k(t_1))) \approx \frac{2k\pi}{n-1}$, basta observar o raciocínio sobre o comportamento da solução de (2-3), que foi feito após o lema (2.3).

Agora vamos ver que Γ_k é contínua. Para $s \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, temos, com abuso de notação, $\Gamma_k(s) = u_{t_0}(a; s)$, pois vimos que Γ_k está bem definida numa vizinhança de t_0 . Então,

$$\begin{aligned} |\Gamma_k(s) - \Gamma_k(t_0)| &= |u_{t_0}(a; s) - u_{t_0}(a; t_0)| \\ &\leq |u_{t_0}(a; s) - u_s(a; t_0)| + |u_s(a; t_0) - u_{t_0}(a; t_0)| \\ &= |u_{t_0}(a; s) - u_{t_0}(a - t_0 + s; s)| + |u_s(a; t_0) - u_{t_0}(a; t_0)|. \end{aligned}$$

Na primeira parcela, temos $|u_{t_0}(a; s) - u_{t_0}(a - t_0 + s; s)| \xrightarrow{s \rightarrow t_0} 0$ pela continuidade da solução e pela continuidade da solução com relação às funções a_i ; na segunda

parcela, temos $|u_s(a; t_0) - u_{t_0}(a; t_0)| \xrightarrow{s \rightarrow t_0} 0$. Portanto, Γ_k é uma parametrização contínua. ■

Observação 2.11 A parametrização do conjunto singular instável é dada por Γ_k tal que $\bar{\phi}_k(t_1; b, \Gamma_k(t_1)) = \infty$ com $\arg(\bar{\phi}_k(t_1 + \tilde{\epsilon}; b, \Gamma_k(t_1))) \approx \frac{(2k+1)\pi}{n-1}$.

O próximo corolário não é bem uma consequência do lema anterior mas sim da equação (2-20).

Corolário 2.12 *Se as funções a_i são suaves, as aplicações Γ_k são suaves em seus domínios.*

Prova. Vamos usar a notação do lema anterior. Pela equação (2-20) temos

$$\bar{\phi}_{k,s}(t; t_0, 0) = \bar{\phi}_{k,t_0}(t - t_0 + s; s, 0).$$

Desde que Γ_k esteja definida, podemos escrever

$$\Gamma_k(s) = \bar{\phi}_{k,t_0}(a; s, 0) = \bar{\phi}_{k,s}(a + t_0 - s; t_0, 0).$$

Pelo lema (2.7), podemos derivar $\bar{\phi}_{k,s}$ com relação ao parâmetro s . Assim, derivando a expressão acima, temos

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{\phi}_{k,s}(a + t_0 - s; t_0, 0) = \frac{\partial}{\partial s} \bar{\phi}_{k,t_0}(a; s, 0) = \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_k(s).$$

Portanto, Γ_k é suave e tem a classe de diferenciabilidade de $\bar{\phi}_{k,s}$ com relação às funções a_i . ■

Observação 2.13 Claramente a aplicação Γ_k depende do sistema de coordenadas que estaremos utilizando. Em geral, estaremos usando a notação Γ_k para o sistema de coordenadas $w = \frac{1}{z}$, mas, eventualmente, a notação será usada em qualquer sistema sem maiores preocupações. Da mesma forma, usaremos a notação $\bar{\phi}(t)$ para soluções generalizadas tanto pra a equação na variável z quanto para a equação na variável $w = \frac{1}{z}$.

Definição 2.14 *Dizemos que o conjunto singular, estável ou instável, se auto-intercepta se existe pelo menos um ponto $z \in \bar{\mathbb{C}}$ cuja trajetória generalizada $\alpha : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ alcança infinito pelo menos duas vezes, isto é, existem pelo menos dois valores $t_1, t_2 \in [a, b]$ tais que $\alpha(t_1) = \bar{\phi}(t_1; a; z) = \infty$ e $\alpha(t_2) = \bar{\phi}(t_2; a; z) = \infty$. Um ponto $z \in S^e$, ou em S^i , é **regular** se todas suas trajetórias generalizadas alcançam infinito uma única vez.*

Antes de interpretarmos a definição acima, vamos fixar algumas notações. Denotaremos $\theta_{2k} = \frac{2k\pi}{n-1}$ para $k = 0, \dots, (n-2)$. Uma vez que a trajetória generalizada de uma condição inicial $w_0 = \frac{1}{z_0}$, que alcança zero em algum $t \in [a, b]$, tem argumento se aproximando de θ_{2k} , denotaremos por $X_{2k} \subset [a, b]$ o conjunto onde a aplicação Γ_{2k} está definida. O conjunto dos pontos que alcançam zero com argumento se aproximando de θ_{2k} será chamado de θ_{2k} -perna do conjunto singular estável. Analogamente, para $\theta_{2k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}$ com $k = 0, \dots, (n-2)$, definimos as θ_{2k+1} -pernas do conjunto singular instável com suas respectivas parametrizações $\Gamma_{2k+1} : X_{2k+1} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Suponha que, para algum k entre $0, \dots, (n-2)$, Γ_{2k} seja uma curva contínua que se auto-intercepte, ou seja, existem pelo menos dois valores de t , digamos t_1 e t_2 , em $[a, b]$ tais que $\Gamma_{2k}(t_1) = \Gamma_{2k}(t_2) = \tilde{w}$ em tempos $t_1 < t_2$. Pela definição, a parametrização $\Gamma_{2k} : X_{2k} \rightarrow S^e$ da θ_{2k} -perna do conjunto singular estável pode ser interpretada da seguinte maneira:

$$\Gamma_{2k}(t_2) = \tilde{w}$$

se, e somente se, a solução, $w(t)$, de

$$\begin{cases} w'(t) = -(w(t)^{2-n} + a_{n-1}(t)w(t)^{3-n} + \dots + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2) \\ w(t_2) = 0, \end{cases}$$

com $w(t_2 - \epsilon^{n-1}) \approx (n-1)\frac{1}{n-1}\xi^k\epsilon$ e $w(t) \neq 0$ em $[a, t_2)$, onde ξ é raiz n -ésima da unidade. Ora, mas devemos ter também $w(t_1) = 0$ pois $\Gamma_{2k}(t_1) = \tilde{w}$. Isso nos dá que, se o conjunto singular se auto-intercepta, Γ_{2k} não está definida em $t = t_1$ e, portanto, não pode ser contínua.

Agora, se não existir uma autointerseção, todos os pontos do conjunto singular são regulares. Nesse caso, a aplicação Γ_{2k} está definida em todo intervalo $[a, b]$ e, portanto, é contínua no intervalo.

O próximo exemplo não satisfaz as hipóteses que estamos assumindo, isto é, as funções a_i são descontínuas. Optamos por apresentá-lo, pois ele ilustra bem o conceito de autointerseção dos conjuntos singulares.

A conveniência do exemplo está no fato de que a equação pode ser resolvida explicitamente e, conseqüentemente, podemos exibir o conjunto singular por meio de fórmulas.

Exemplo 2.15 Considere a equação $z'(t) = (z(t) + \eta)^3$, onde

$$\eta = \begin{cases} 2i; & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2; & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observe que em $t = \frac{1}{2}$ a equação não está definida. Vamos assumir que a equação tem duas soluções, uma para cada η em tempo $\frac{1}{2}$. Conforme for conveniente.

Para uma condição inicial $z(0) = z_0$, a solução geral do problema é

$$z(t) = \frac{z_0 + \eta}{\sqrt{-2t(z_0 + \eta)^2 + 1}} - \eta. \quad (2-21)$$

Primeiro vamos determinar todas as condições iniciais que alcançam infinito para $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Procedendo como no exemplo (2.8), vemos que o conjunto das condições iniciais que alcançam infinito é dado por

$$S_1 = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : z = \pm \sqrt{\frac{1}{2t}} - 2i; t \in [0, \frac{1}{2}] \right\}.$$

Observe que, até agora, o conjunto singular é formado por dois segmentos de retas com coordenada $y = -2i$. O próximo passo para determinar o conjunto singular é encontrar os pontos que alcançam infinito partindo do tempo $t = \frac{1}{2}$. Assim, para

$$\begin{cases} z'(t) = (z(t) + 2)^3 \\ z(\frac{1}{2}) = z_0, \end{cases}$$

a solução é

$$z(t) = \frac{z_0 + 2}{\sqrt{(1 - 2t)(z_0 + 2)^2 + 1}} - 2$$

e, portanto, o conjunto das condições iniciais que alcançam infinito, partindo de $t = \frac{1}{2}$, é dado por

$$S_{aux} = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : z = \pm \sqrt{\frac{1}{2t - 1}} - 2; t \in [\frac{1}{2}, 1] \right\}.$$

O que precisamos agora é saber quais condições iniciais $z(0) = z_0$ pertencem ao conjunto S_{aux} exatamente quando $t = \frac{1}{2}$. Isso nos dará os pontos que alcançam infinito em tempo entre $[\frac{1}{2}, 1]$. Podemos dividir o conjunto S_{aux} em três subconjuntos

$$\begin{aligned} S_{aux,1} &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}, \\ S_{aux,2} &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \infty\}, \\ S_{aux,3} &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty \leq x \leq -3\}. \end{aligned}$$

Seja $\xi_1 \in S_{aux,1}$ então $\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2t-1}} - 2$ para $t \in [\frac{5}{8}, 1]$. Agora precisamos saber quais pontos estão em $S_{aux,1}$ quando $t = \frac{1}{2}$. Sabemos que, para uma condição inicial $z(0) = z_0$, a equação tem solução dada por (2-21) com $\eta = 2i$. Então, queremos $z(\frac{1}{2}) = \xi_1$. Isso nos dá

$$z_0 = \pm \sqrt{\frac{(\xi_1 + 2i)^2}{1 + (\xi_1 + 2i)^2}} - 2i. \quad (2-22)$$

Para encontrarmos as condições iniciais que alcançam infinito no intervalo $[\frac{5}{8}, 1]$, ou seja, os pontos tais que $z(\frac{1}{2}) = \xi_1$, variamos t no intervalo $[\frac{5}{8}, 1]$, obtemos ξ_1 a partir de $\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2t-1}} - 2$, e depois, por (2-22), obtemos as condições iniciais procuradas.

Em particular, se $t \rightarrow \frac{5}{8}$, então $\xi_1 \rightarrow 0$, e escolhendo o sinal “+”, temos $z_0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$, ou seja, como o conjunto singular é fechado, $z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$ alcança infinito em tempo $t = \frac{5}{8}$. Mas $z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$ também alcança infinito em tempo $t = \frac{3}{8}$, portanto, duas vezes.

Agora precisamos mostrar que o conjunto singular se autointercepta. Para isso, vamos descrever os pontos em \mathbb{C} que pertencem à $S_{aux,2}$ quando $t = \frac{1}{2}$. Assim, se $\xi_2 \in S_{aux,2}$, então $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{2t-1}} - 2$ para $t \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$. Nesse caso, os pontos tais que $z(\frac{1}{2}) = \xi_2$ são da forma

$$z_0 = \pm \sqrt{\frac{(\xi_2 + 2i)^2}{1 + (\xi_2 + 2i)^2}} - 2i. \quad (2-23)$$

Assim, se $t \rightarrow \frac{5}{8}$, então $\xi_2 \rightarrow 0$, e escolhendo o sinal “+”, temos $z_0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$, e, se $t \rightarrow \frac{1}{2}$, então $\xi_2 \rightarrow \infty$, e escolhendo o sinal “+”, temos $z_0 \rightarrow 1 - 2i$, ou seja, a curva, no parâmetro t , dada por (2-23) com $t \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ intercepta o conjunto singular em S_1 no ponto $\frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$, que é um ponto cuja trajetória generalizada alcança infinito duas vezes.

Na figura (2.4), podemos ver um esboço do conjunto singular estável, no sistema de coordenadas z , associado à equação.

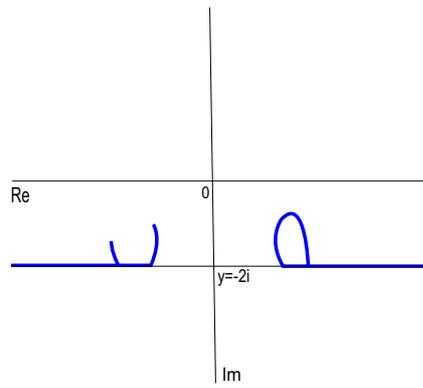


Figura 2.4: No exemplo 2.15, o conjunto singular se auto-intercepta.