

# 1

## Introdução

Sejam  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$  e  $a_n(t)$  funções contínuas definidas num intervalo  $[a, b]$  que, inicialmente, podem assumir tanto valores reais quanto valores complexos, isto é,  $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  para  $i = 0, \dots, n$ . Consideraremos uma generalização da equação de Riccati, dada por

$$z'(t) = a_n(t)z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \quad (1-1)$$

com  $n \geq 3$ .

Quando  $n = 2$ , a equação acima é conhecida como Equação de Riccati. A equação de Riccati é bastante estudada. Por exemplo, em [7], supondo que as funções  $a_i$  são periódicas e assumem valores complexos o autor mostra que toda equação possui solução periódica. Em [12], assumindo que as funções  $a_i$  são funções reais e contínuas no intervalo  $[0, 1]$ , é mostrado que a equação de Riccati possui no máximo duas soluções periódicas ou então todas as soluções são periódicas. Outras referências no estudo da equação de Riccati são [10], [16], [15], [18], [22] e [24].

Em [3], [4] e [2] são estudados casos particulares da equação (1-1) quando  $n = 3, 4$  e  $5$  respectivamente.

Nesta tese, vamos supor que  $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a_n \equiv 1$  e também que pelo menos uma função  $a_i$  não é identicamente nula, pois, caso contrário, estaremos com a equação  $z'(t) = z(t)^n$ , que possui solução explícita e é facilmente resolvida.

Suponha que a solução do P.V.I para a equação (1-1) com condição inicial  $z(a) = z_a$  esteja definida no intervalo  $[a, t_a]$ . Vamos denotar por  $\phi(t_a; a, z_a)$  a solução do problema calculada no tempo  $t_a$ . Assim, se a solução  $\phi$  do problema estiver definida em todo intervalo  $[a, b]$ , poderemos definir a Aplicação de Avanço, relativa ao intervalo  $[a, b]$ ,  $T : D \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$T(z_0) = \phi(b; a, z_0)$$

onde  $D$  é um domínio apropriado. Em especial, se os tempos inicial e final forem 0 e 1 respectivamente,  $T$  é conhecida como aplicação de Poincaré. Abusando da linguagem, eventualmente, chamaremos a Aplicação de Avanço de Aplicação de Retorno.

Estaremos interessados nas singularidades da aplicação  $T$  relativa ao intervalo  $[a, b]$ . Ou seja, nas condições iniciais que alcançam infinito em algum tempo  $t \in [a, b]$ . Essas condições iniciais formam o conjunto singular da equação (1-1) para intervalo  $[a, b]$ . O conjunto singular é a união de curvas na esfera de Riemann. Mais ainda, baseados na descrição do conjunto singular podemos obter informações sobre o comportamento da equação. A partir dessa análise, podemos, por exemplo, contar as soluções periódicas.

Assim, no capítulo 2, mostraremos a existência de soluções para problemas de valor inicial com condição inicial infinita, isto é, o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_0) = \infty \end{cases} \quad (1-2)$$

possui solução. Mais precisamente, o problema possui  $(n - 1)^2$  soluções num intervalo  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Tais soluções serão chamadas de *soluções generalizadas*. Além disso, mostraremos a dependência contínua e suave da solução de (1-2) com relação às funções  $a_i$ .

Uma vez que podemos resolver o problema (1-2) num intervalo  $[a, b]$ , estaremos interessados nos pontos  $z_* \in \overline{\mathbb{C}}$  tais que  $\phi(t_*; a, z_*) = \infty$  para algum  $t_* \in [a, b]$ , ou seja, nas singularidades da Aplicação de Retorno (Aplicação de Avanço), assim como nas singularidades de sua inversa, que é definida por  $T^{-1}(z_0) = \phi(a; b, z_0)$ .

Uma *trajetória generalizada* do ponto  $z_*$  é uma curva

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

dada por  $\alpha(t) = \overline{\phi}(t; a, z_*)$ , onde  $\overline{\phi}$  é uma solução generalizada. Assim definiremos os conjuntos singulares como sendo o conjunto dos pontos em que alguma trajetória generalizada alcança infinito pelo menos uma vez, ou seja, os pontos onde a Aplicação de Avanço ou sua inversa não estão definidas.

Baseados na continuidade e suavidade da equação com relação às funções  $a_i$ , mostraremos que os conjuntos singulares, tanto da Aplicação de Retorno quanto de sua inversa, são a união de curvas parametrizadas por aplicações denotadas por  $\Gamma_{2k}$  ou  $\Gamma_{2k-1}$  com  $k = 1, \dots, (n - 1)$ . Essas parametrizações serão contínuas ou suaves dependendo das funções  $a_i$ .

Finalizamos o capítulo 2 interpretando geometricamente as descon- tinuidades da aplicação  $\Gamma_k$ . Suponhamos que  $z$  seja um ponto em que pelo menos uma de suas trajetórias generalizadas alcança infinito, por exemplo, duas vezes. Em outras palavras, existe uma trajetória generalizada de  $z$ ,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , tal que  $\alpha(t_0) = \infty$  e  $\alpha(t_1) = \infty$  com  $t_0 < t_1$ . Nessas condições  $\Gamma_k(t_1)$  não está definida, ou seja,  $\Gamma_k$  é descontínua em  $t = t_1$ . Essa descon- tinuidade é uma autointerseção do conjunto singular.

No capítulo 3, definiremos dois tipos de equações, chamadas *Equações Excepcionais*. O primeiro tipo ocorre quando as parametrizações dos conjuntos singulares não estão definidas num subconjunto aberto do intervalo  $[a, b]$ .

Para entendermos o primeiro tipo de excepcionalidade, definiremos as *equações transversais*. Os conjuntos singulares associados a essas equações pos- suem um número finito de autointerseções. Mostraremos que, sob pequenas perturbações, equações transversais continuam ainda transversais. Em espe- cial, para uma equação excepcional do 1º tipo, deve existir uma sobreposição de conjuntos singulares. Essa sobreposição nos diz que a equação é não tranver- sal. Portanto uma perturbação torna uma equação excepcional numa equação transversal, isto é, com um número finito de autointerseções.

Na seção (3.2) serão apresentados alguns exemplos. Tais exemplos foram gerados baseados no fato de que as equações transversais são genéricas. Ou seja, em geral uma equação possui conjuntos singulares com número finito de autointerseções. Isso justifica as aproximações numéricas utilizadas para obter os conjuntos singulares tanto na seção (3.2) quanto no capítulo 4.

Ainda no terceiro capítulo, supondo agora que as funções  $a_i$  sejam tam- bém periódicas de período 1, definiremos o segundo tipo de excepcionalidade, que ocorre quando a equação possui infinitas soluções periódicas.

Concluimos o capítulo mostrando que existe uma família de equações não autônomas que são excepcionais do segundo tipo, ou seja, a Aplicação de Poincaré é a Identidade em um subconjunto aberto do plano complexo.

O último capítulo é dedicado às soluções periódicas de (1-1). O problema de encontrar soluções periódicas para a equação (1-1) é muito estudado. Em [12], [17], [23] e [20] são tratados os casos estritamente reais, isto é, tanto as funções  $a_i$  quanto a solução  $z(t)$  assumem apenas valores reais. Em [17], A.A. Panov mostra, entre outros resultados, que sob certas condições a equação (1-1) possui no máximo  $n$  soluções. Mostra também que a equação

$$z'(t) = z(t)^{2n+1} + a(t)z(t)^2 + b(t)$$

possui no máximo três soluções periódicas, tudo isso supondo que as funções

$a_i$  sejam periódicas. Em [20], temos que, se  $n = 3$  e as funções  $a_i$  são de classe  $C^3$ , então a equação possui no máximo 3 soluções periódicas. A. Lins Neto mostra em [12], por exemplo, que, se  $n = 4$ , existem equações, com  $a_4 \equiv 1$ , que possuem pelo menos  $k$  soluções periódicas para um inteiro  $k > 0$ .

Em [1], [16] e [18], as funções  $a_i$  ainda assumem valores reais, mas a solução  $z(t)$  pode assumir valores complexos. Em particular, em [18], supondo  $a_i$  periódicas, é mostrado que para  $n = 3$  e  $a_n \equiv 1$  a equação (1-1) não possui mais que 3 soluções periódicas. Já em [16], encontramos um enunciado mais preciso para esse resultado: se  $n = 3$  então a equação possui exatamente 3 soluções periódicas. Também mostraremos esta proposição baseando-nos na forma dos conjunto singulares.

O caso onde as funções  $a_i$  também assumem valores complexos e são periódicas é encontrado em [5] e [6]. Os autores, em [5], mostram através do Grau de Leray-Schauder que, sob certas condições, existe uma cota inferior para o número de soluções periódicas para a equação (1-1).

No nosso caso, especialmente no capítulo 4, vamos assumir  $a_n \equiv 1$ ,  $n = 3$  e  $a_i$  periódicas de período 1, considerando uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  fechada, simples e suficientemente próxima do conjunto singular estável e também sua imagem pela Aplicação de Poincaré,  $T \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Como em [13] é mostrado que o número de pré-imagens de um valor regular é o número de voltas de uma curva em torno do ponto o número de voltas será o número de pontos fixos da Aplicação de Poincaré e portanto o número de soluções periódicas de período 1.

A configuração dos conjuntos singulares nos diversos exemplos será fundamental para a determinação do número de soluções periódicas. Teremos, por exemplo, o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** *Seja  $n = 3$  em (1-1). Suponha que os conjuntos singulares só se interceptem em infinito. Se todos os pontos dos conjuntos singulares são regulares, a equação (1-1) possui exatamente 3 soluções periódicas, contadas a multiplicidade.*