

7

Método dos Elementos Finitos

No capítulo 6 as funções usadas na aproximação são funções relacionadas à dinâmica de estruturas de formulação semelhante a de um cabo. Em problemas de dinâmica os modos de vibração da estrutura são as funções que melhor se aplicam nos métodos diretos, dado que melhor representam o problema com o mesmo número de termos. Porém estes, em geral, não são conhecidas. Por isso, usa-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para aproximá-los. Este método não opera na formulação forte do problema e sim na variacional, sendo a solução aproximada por $w^N(x, t) = \sum a_j(t)\phi_j(x)$. Este método discretiza o problema e usa a estratégia de um dos métodos diretos para encontrar os coeficientes $a_j(t)$ que extremam o funcional do problema. A novidade no MEF está na escolha das funções ϕ_j e na divisão do domínio. Neste método elas são diferentes de zero apenas em uma parte dele. No problema de dinâmica deste trabalho, o MEF será usado para encontrar de forma mais eficiente os modos de vibração de um cabo e o de uma placa. Para este capítulo foram usados como referência Bathe (2), Hughes (13), Meirovitch (21), Strang (29), Touzot (7) e Zienkiewicz (31).

O MEF se inicia pela divisão do domínio em subdomínios que são chamados de elementos finitos. Cada elemento possui uma equação de movimento associada. O conjunto dos elementos finitos é chamado de malha, as funções aproximantes de funções de interpolação (ou de forma) e os pontos onde a solução é aproximada de nós. A visão global de uma função definida em todo o domínio sendo não nula apenas em um determinado trecho é substituída por uma visão local onde, na prática, somente se computa as funções nos intervalos não nulos. Por ser um escalar, o funcional I obtido pelo Princípio de Hamilton pode ser decomposto pela soma da contribuição de cada elemento individualmente:

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + \dots + I^{(n)} \quad (7.0.1)$$

onde o sobrescrito em I notaciona a qual elemento o funcional se refere. Da equação acima, pela aplicação do cálculo variacional:

$$\delta I = \delta I^{(1)} + \delta I^{(2)} + \dots + \delta I^{(n)} \quad (7.0.2)$$

No caso de um domínio unidimensional, a divisão é realizada repartindo-se o domínio L por um número n , onde $h = L/n$ será então o comprimento de cada elemento. Ainda que aqui assim desenvolvido, não há necessidade de o comprimento dos elementos serem iguais. A cada nó e a cada elemento se dá um número.

No MEF trabalha-se elemento por elemento, isto é, adota-se uma abordagem local e depois estes resultados são reagrupados, retornando à abordagem global, conforme será mostrado.

7.1

Funções lineares de interpolação

Conforme visto, ao se formular um sistema de segunda ordem ($2p$) pelo método variacional a ordem da maior derivada das funções aproximantes, aqui chamadas de funções de interpolação, deverá ser um (p).

A função linear mais simples que atende à essas condições é definida no domínio por:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{j-1})}{h_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{(x_{j+1}-x)}{h_j} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{nos outros pontos} \end{cases} \quad (7.1.1)$$

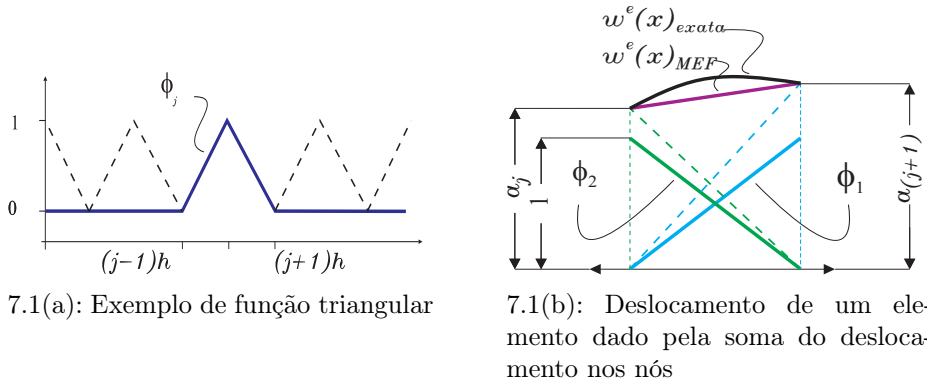
A Fig. (7.1(a)) ilustra uma dessas funções que por seu formato são chamadas de triangulares. O valor máximo dessas funções é um e são não nulas em apenas dois subdomínios. Ao se aproximar a solução por $w^N(x, t) = \sum a_j(t)\phi_j(x)$, onde ϕ_j são funções triangulares, pelo fato de no ponto j somente a função ϕ_j possuir valor não nulo e um, o deslocamento neste ponto terá o valor do coeficiente a_j , que diferente do Método de Ritz, Galerkin e Colocação, no MEF esses coeficientes adquirem um significado físico e não mais representam quantidades abstratas.

O deslocamento w^e de um elemento é expresso pela combinação do deslocamento nos nós. Em um elemento que contenha dois nós, um em cada extremidade, w^e é dado por:

$$w^e(x) = \phi_1(x)a_{j+1} + \phi_2(x)a_j \quad (7.1.2)$$

A Fig. (7.1(b)) ilustra esse fato. Conforme dito, na prática somente os valores não nulos das funções são computados. Será mostrado agora como fazê-lo.

O primeiro passo para facilitar a computação dessas funções consiste em uma transformação de coordenadas. Os pontos não mais serão representados



7.1(a): Exemplo de função triangular

7.1(b): Deslocamento de um elemento dado pela soma do deslocamento nos nós

Figura 7.1: Função triangular e deslocamento do elemento

pelas coordenadas globais x e sim pela coordenadas locais adimensionais ξ . A seguinte relação associa as coordenadas:

$$\xi = \frac{jh - x}{h} = j - \frac{x}{h} \quad (7.1.3)$$

onde j é o número do elemento entre os nós $j-1$ e j . ξ varia de 1 a 0 ao longo do elemento.

O deslocamento w^e de um elemento com dois nós é dado então por:

$$w^e(\xi) = \phi_1(\xi)a_{j-1} + \phi_2(\xi)a_j = \Phi^T a \quad (7.1.4)$$

onde $\Phi(\xi) = [\phi_1(\xi) \ \phi_2(\xi)]^T$ é o vetor das funções de interpolação em termos das coordenadas locais e $a = [a_{j-1} a_j]^T$. Como o interesse está nas funções lineares, cada ϕ é escrito por:

$$\phi_i(\xi) = c_{i1} + c_{i2}\xi, \quad i = 1, 2 \quad (7.1.5)$$

Os c_{i1} e c_{i2} são obtidos considerando que a_{j-1} e a_j devem representar o deslocamento do elemento nos nós $j-1$ e j , respectivamente, isto é:

$$\text{Deslocamento no nó } j-1 \implies w(1) = \phi_1(1)a_{j-1} + \phi_2(1)a_j = a_{j-1}$$

$$\text{Deslocamento no nó } j \implies w(0) = \phi_1(0)a_{j-1} + \phi_2(0)a_j = a_j \quad (7.1.6)$$

Ao que se conclui que os ϕ 's devem satisfazer as seguintes condições:

$$\phi_1(1) = 1, \quad \phi_1(0) = 0, \quad \phi_2(1) = 0, \quad \phi_2(0) = 1. \quad (7.1.7)$$

Substituindo as condições acima nas Eqs. (7.1.5), chega-se aos coeficientes c_i e com eles as funções de interpolação podem ser escritas:

$$\phi_1(\xi) = \xi \quad \text{e} \quad \phi_2(\xi) = 1 - \xi \quad (7.1.8)$$

que são mostrados na Fig. (7.1(b)).

O procedimento para encontrar as funções de interpolação também pode ser escrito sob a forma matricial, forma essa que será usada para os demais elementos descritos neste trabalho. O resultado da substituição da Eq. (7.1.7) na Eq. (7.1.5) pode ser escrito por:

$$Ac_i = e_i \quad (7.1.9)$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 \\ 1 & \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.1.10)$$

$c_i = [c_{i1} \quad c_{i2}]^T$ e e_i são os vetores unitários $e_1 = [1 \quad 0]^T$ e $e_2 = [0 \quad 1]^T$. Ao se resolver o sistema, os valores das constantes c serão encontrados, que no caso unidimensional é, conforme visto:

$$[c_1 \quad c_2] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.1.11)$$

Ainda que no MEF a aproximação ocorra nos nós, as aproximações entre estes podem ser conhecidas através do uso de interpolação usando as funções de forma, que, por esse motivo, são também chamadas de funções de interpolação. Toma-se novamente as funções lineares definidas globalmente pela Eq. (7.1.1). Conforme já descrito pela Eq. (7.1.2) o deslocamento no elemento é dado por:

$$w^e(x) = \phi_1(x)a_{j-1} + \phi_2(x)a_j$$

equação essa que retorna o deslocamento dado um ponto entre os nós. A Fig. (7.2) ilustra esse exemplo de interpolação linear. É de se intuir por ela que, ao se reduzir o tamanho do elemento, melhora-se o resultado da interpolação. Outra forma de melhorar a interpolação consiste na escolha de funções de forma de grau mais elevado, funções essas que serão descritas mais adiante.

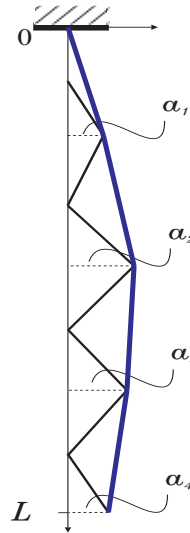


Figura 7.2: Interpolação linear no elemento

7.1.1

Cabo fixo-livre - cálculo das matrizes

O cabo fixo-livre será tomado como exemplo para o cálculo das matrizes de rigidez e massa. As matrizes encontradas no Método de Ritz foram:

$$M = \int_0^L A(x)\rho(x)\phi(x)\phi(x)^T dx \quad \text{e} \quad K = \int_0^L T(x)\phi'(x)\phi'(x)dx \quad (7.1.12)$$

onde $\phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)]^T$. Continuando com o Método de Ritz, porém agora utilizando os procedimentos e funções do MEF, reescreve-se as matrizes de cada elemento. Porém antes, as seguintes relações serão usadas:

$$dx = -h d\xi, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{h} \frac{d}{d\xi} \quad (7.1.13)$$

$$x = jh \rightarrow \xi = 0 \quad x = (j-1)h \rightarrow \xi = 1$$

Iniciando com a matriz elementar k^e :

$$k^e = \int_{\xi_2}^{\xi_1} T(\xi) \left(-\frac{1}{h} \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) \right) \left(-\frac{1}{h} \frac{d}{d\xi} \Phi^T(\xi) \right) (-h) d\xi \quad (7.1.14)$$

onde $\Phi(\xi) = [\phi_1(\xi) \quad \phi_2(\xi)]^T$. Fazendo os devidos cancelamentos e substituições, considerando elementos de comprimento igual, $h = L/n$, e lembrando que:

$$T(x) = A\rho g(L-x) \implies T(\xi) = A\rho g[L - h(j-\xi)] \quad (7.1.15)$$

chega-se em:

$$k^e = -nA\rho g \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{n}(j - \xi)\right] d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.16)$$

Resolvendo a integral ¹:

$$k^e = -nA\rho g \left[1 - \frac{1}{n}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.17)$$

A matriz de massa do elemento é calculada de forma similar:

$$m^e = -\frac{LA\rho}{n} \int_0^1 \Phi(\xi)\Phi(\xi)^T d\xi = -\frac{LA\rho}{n} \int_0^1 \begin{bmatrix} \xi^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & (1-\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (7.1.18)$$

Resolvendo a integral:

$$m^e = -\frac{LA\rho}{n} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (7.1.19)$$

Ainda que o vetor carregamento f^e não seja necessário para o cálculo dos modos, este é construído por:

$$f^e = -h \int_0^1 f(\xi, t)\Phi(\xi)d\xi \quad (7.1.20)$$

7.2

Montagem da matriz global e condições de contorno

Após construídas as matrizes de massa, rigidez e o vetor carregamento de cada elemento, deve-se prosseguir com a montagem de uma matriz/vetor global que combine as informações de todos os elementos. Isso é feito somando-se as posições de interseção dos graus de liberdade de cada elemento. Tomando como exemplo as 3 matrizes de rigidez abaixo:

$$k^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix}; \quad k^2 = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}; \quad k^3 = \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 \end{bmatrix}. \quad (7.2.1)$$

A matriz de rigidez global é montada ao se somar as entradas das matrizes associadas ao mesmo grau de liberdade:

¹ $T(x)$ poderia ser considerado constante ao longo do elemento caso o domínio seja dividido em muitos subdomínios.

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\
 & \boxed{k_{22}^1 + k_{11}^2} & k_{12}^2 & 0 \\
 & \text{simétrica} & \boxed{k_{22}^2 + k_{11}^3} & k_{12}^3 \\
 & & & k_{22}^3
 \end{bmatrix} \quad (7.2.2)$$

O mesmo procedimento é aplicado às matrizes de massa e ao vetor carregamento. É interessante notar o padrão da matriz de rigidez global, padrão este que se repete na matriz de massa global. Ainda que as funções triangulares ϕ_i não sejam todas ortogonais, elas satisfazem a seguinte relação:

$$\int_0^1 \mu(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0 \quad |i - j| > 1, \quad (7.2.3)$$

onde μ é uma função de ponderação. O resultado deste produto interno explica o formato de matriz de banda de M e K (as matrizes de massa e rigidez globais), facilitando a computação de ambas.

Para a simplicidade do MEF, escolhe-se aplicar as condições de contorno diretamente na matriz global. No caso, por exemplo, de uma condição de contorno de deslocamento nulo em $x = 0$, como o primeiro coeficiente a_0 de $w^N(x, t) = \sum a_j(t) \phi_j(x)$ é igual ao deslocamento em $x = 0$, este deve ser nulo. Sendo nulo, a primeira linha e coluna das matrizes M e K e do vetor carregamento F são eliminadas.

No exemplo do cabo, as condições de contorno fixo-mola e fixo-massa foram abordadas. No primeiro caso, a mola na extremidade levou à adição do seguinte termo na matriz de massa obtida pelo Método de Ritz:

$$K = K_{fixo-livre} + K \phi_i(L) \phi_j(L)$$

Utilizando a base de funções do MEF, a equação equivale a uma adição da rigidez da mola K na última posição da matriz global do cabo fixo-livre. Quando foi adicionado não uma mola, mas sim uma massa, à matriz de massa do Método de Ritz somou-se o seguinte termo:

$$M = M_{fixo-livre} + m \phi_i(L) \phi_j(L)$$

que novamente, usando as funções do MEF, equivale a uma adição da massa m na última posição da matriz de massa global M do cabo fixo-livre.

7.3

Exemplo de aproximação das frequências naturais e modos de vibração através do MEF

Conforme anteriormente descrito, as aproximações das frequências naturais e modos de vibração são obtidas através da resolução do problema de autovalor descrito por $(M - \omega^2 K)k = 0$, mais as condições de contorno. O programa *MEF_cabo* (ver Apêndice C para o manual de uso) calcula ambos para um erro especificado e .

Notou-se como principal diferença entre este programa e o anteriormente usado no capítulo 6 onde o método de Ritz foi exemplificado, o tempo de processamento. Enquanto que para obter as 6 primeiras aproximações dos modos de vibração e frequências naturais com erro na frequência $e < 1,1\%$, o primeiro, utilizando 40 elementos, apresentou os resultados imediatamente, com um erro $e = 0,67\%$, o segundo levou um pouco mais de 4 horas para, utilizadas 96 funções, um erro de $e = 1,08\%$.

A Fig. (7.3) mostra a aproximação dos nove primeiros modos de vibração obtidos pelo MEF de um cabo de 10m de comprimento, com um erro especificado na frequência $e < 1\%$.

As aproximações das frequências circulares naturais (rd/s) encontradas foram as seguintes:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1,2024; & \omega_2 &= 2,7605; & \omega_3 &= 4,3308; & \omega_4 &= 5,9096; & \omega_5 &= 7,5006; \\ \omega_6 &= 9,1081 & \omega_7 &= 10,7356; & \omega_8 &= 12,3855; & \omega_9 &= 14,0593. \end{aligned}$$

A Fig. (7.4) reforça a observação feita de que no Método de Ritz a sequência de aproximantes converge monotonicamente e o valor da frequência é uma cota inferior.

7.4

Outras funções de interpolação

Uma desvantagem do aumento do número de elementos para a diminuição do erro é que a taxa de convergência tende a diminuir. Uma das alternativas para a diminuição do erro é o uso não de polinômios de primeiro grau no elemento (funções lineares), mas sim de polinômios de ordem superior.

O primeiro exemplo será o de um polinômio de segundo grau dado por:

$$\phi_i = c_{i1} + c_{i2}\xi + c_{i3}\xi^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.4.1)$$

Conhecer os valores destas funções de interpolação quadráticas em apenas dois pontos não é suficiente para a determinação dos seus coeficientes c . Por esse fato é que um terceiro nó é adicionado no meio dos dois nós das extremidades

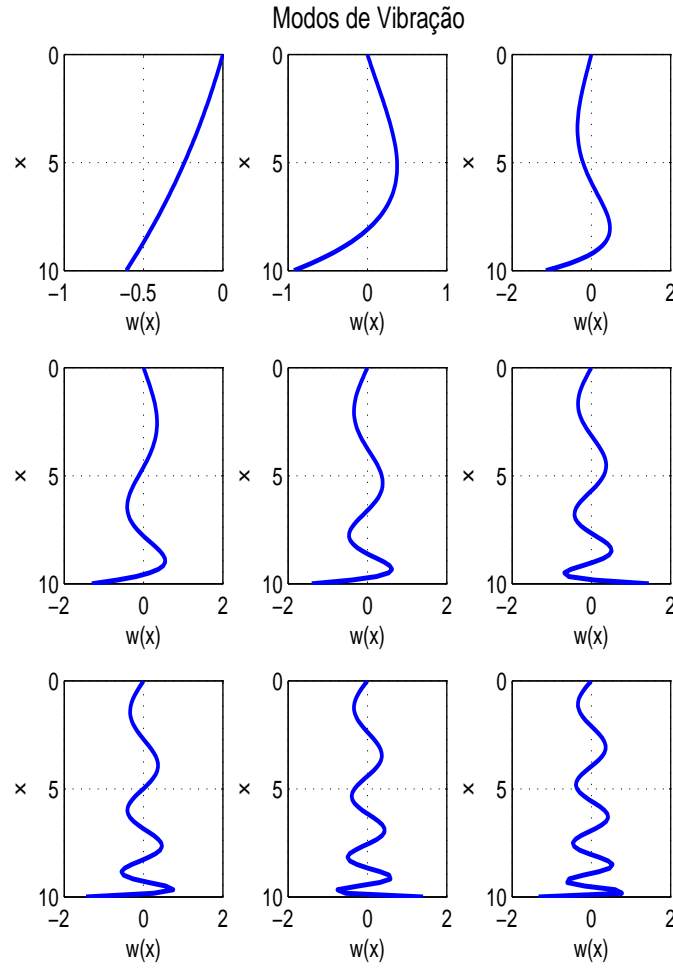


Figura 7.3: Aproximações dos nove primeiros modos de vibração pelo MEF

($\xi_2 = 1/2$). Seguindo o mesmo padrão usado para as funções lineares, em uma das funções o valor neste novo nó será um e nos demais zero. Os coeficientes são obtidos pelo método anteriormente descrito:

$$Ac_i = e_i \implies A = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.2)$$

Ao se resolver o sistema, os vetores c_i são encontrados. Abaixo esses vetores são montados em uma matriz:

$$[c_1 \ c_2 \ c_3] = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.4.3)$$

Conhecendo-se os coeficientes c , as funções de interpolação quadráticas podem ser escritas:

$$\phi_1 = \xi(2\xi - 1), \quad \phi_2 = 4\xi(1 - \xi), \quad \phi_3 = (1 - \xi)(1 - 2\xi) \quad (7.4.4)$$

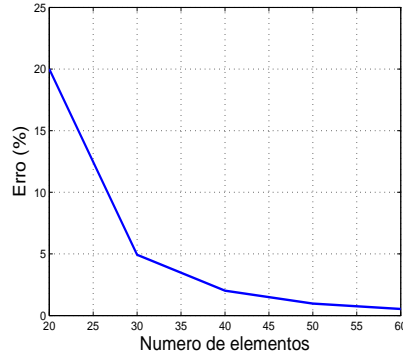


Figura 7.4: Diminuição do erro da aproximação da nona frequência natural através do aumento do número de funções

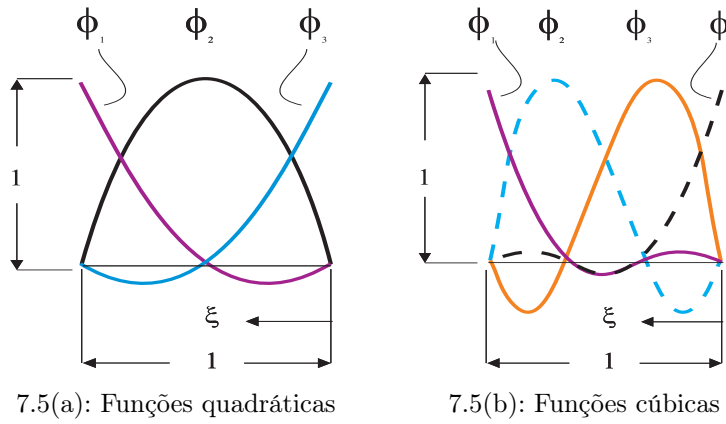


Figura 7.5: Funções de interpolação diferentes das lineares

A Fig. (7.5(a)) representa essas funções.

O grau do polinômio utilizado pode ser aumentado desde que se aumente o número de nós para que os coeficientes do polinômio possam ser determinados. Para uma função de forma cúbica, adiciona-se dois nós entre os nós da extremidade, por simplicidade em $\xi_2 = 2/3$ e $\xi_3 = 1/3$. Utilizando o mesmo método:

$$Ac_i = e_i \implies A = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \\ 1 & \xi_4 & \xi_4^2 & \xi_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & (2/3)^2 & (2/3)^3 \\ 1 & 1/3 & (1/3)^2 & (1/3)^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.5)$$

O sistema é resolvido e a matriz com os coeficientes é montada:

$$[c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -9/2 & 9 & -11/2 \\ -9/2 & 18 & -45/2 & 9 \\ 9/2 & -27/2 & 27/2 & -9/2 \end{bmatrix} \quad (7.4.6)$$

Com os coeficientes em mãos, as funções de interpolação cúbicas podem ser escritas:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(2 - 9 + 9\xi^2), \quad \phi_2 = \frac{9}{2}\xi(1 - 4\xi + 3\xi^2), \quad (7.4.7)$$

$$\phi_3 = \frac{9}{2}\xi(2 - 5\xi + 3\xi^2), \quad \phi_4 = 1 - \frac{11}{2}\xi + 9\xi^2 - \frac{9}{2}\xi^2$$

A Fig. (7.5(b)) ilustra essas funções.

7.4.1

Cabo fixo-livre - MEF com funções quadráticas

Nesta seção será comparada a convergência obtida com o uso de funções lineares com a obtida pelo uso de funções quadráticas. Novamente, as matrizes calculadas no Método de Ritz foram:

$$M = \int_0^L A(x)\rho(x)\phi\phi^T dx \quad \text{e} \quad K = \int_0^L T(x)\phi'(x)\phi'(x)dx$$

onde $\phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)]^T$. Substituindo nas matrizes as funções quadráticas dada pela Eq. (7.4.4), e calculando-as para cada elemento, essas tomam a seguinte forma:

$$k^e = nA\rho g \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{n}(j - \xi) \right] \begin{bmatrix} 4(\xi - 1)^2 & 4(4\xi - 1)(1 - 2\xi) & (4\xi - 1)(4\xi - 3) \\ 4(4\xi - 1)(1 - 2\xi) & 16(1 - 2\xi)^2 & 4(1 - 2\xi)(4\xi - 3) \\ (4\xi - 1)(4\xi - 3) & 4(1 - 2\xi)(4\xi - 3) & (4\xi - 3)^2 \end{bmatrix} \quad (7.4.8)$$

que integrando fica:

$$k^e = nA\rho g \begin{bmatrix} \frac{14j-11}{6n} - \frac{7}{3} & \frac{8j-6}{3n} - \frac{8}{3} & \frac{2j-1}{6n} - \frac{1}{3} \\ \frac{8j-6}{3n} - \frac{8}{3} & \frac{16j-8}{3n} - \frac{16}{3} & \frac{8j-2}{3n} - \frac{8}{3} \\ \frac{2j-1}{6n} - \frac{1}{3} & \frac{8j-2}{3n} - \frac{8}{3} & \frac{14j-3}{6n} - \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad (7.4.9)$$

e

$$m^e = A\rho \int_0^1 \begin{bmatrix} \xi^2(2\xi-1)^2 & 4\xi^2(2\xi-1)(1-\xi) & -\xi(1-\xi)(1-2\xi)^2 \\ 4\xi^2(2\xi-1)(1-\xi) & 16\xi^2(1-\xi)^2 & 4\xi(1-\xi)^2(1-2\xi) \\ -\xi(1-\xi)(1-2\xi)^2 & 4\xi(1-\xi)^2(1-2\xi) & (1-\xi)^2(1-2\xi)^2 \end{bmatrix} \quad (7.4.10)$$

que integrando:

$$m^e = A\rho \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (7.4.11)$$

O programa *modal_cabo_ef2* calcula, para um erro especificado, as frequências naturais e os modos de vibração através do MEF, utilizando funções de interpolação quadráticas, que levam às matrizes apresentadas acima. A Fig. (7.6) mostra a diferença de convergência entre a aproximação da décima frequência usando funções lineares e a aproximação da décima frequência usando funções quadráticas. Como pode ser observado e foi comentado, o erro para um dado número de elementos é menor quando as funções do segundo tipo são usadas, obtendo-se também uma convergência mais rápida com 40 elementos. No primeiro o erro só é atingido quando o número de elementos é 70.

7.5

Elementos Bidimensionais

Ao se tratar problemas bidimensionais novos elementos devem ser formulados. Esta seção se dedicará a dois elementos que são usados em sistemas bidimensionais: os elementos triangulares lineares e os elementos retangulares.

Uma das primeiras questões a se tratar ao se aplicar o MEF em problemas bidimensionais é a aproximação do domínio. Certos tipos de malha tendem a aproximá-lo melhor do que outras. A Fig. (7.7) mostra um domínio D de contorno suave sendo aproximado por dois tipos de malhas. Deve-se escolher uma malha que diminua a diferença entre o domínio e o domínio aproximado

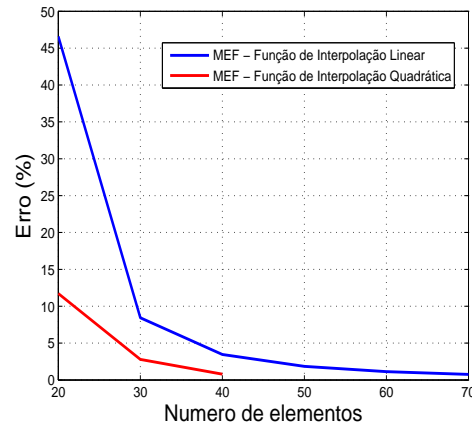


Figura 7.6: Comparação de convergência - função linear x função quadrática

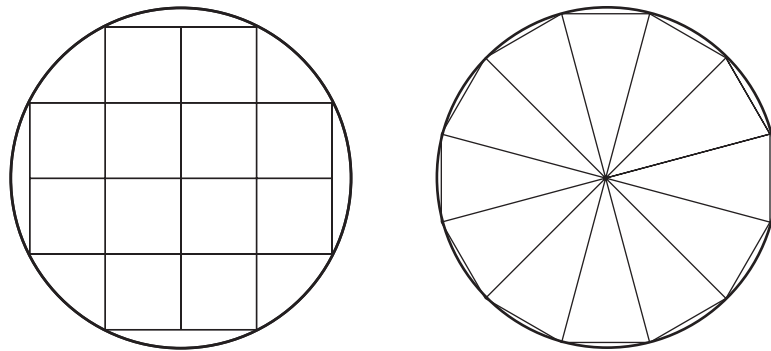


Figura 7.7: Domínio aproximado por diferentes malhas

D^n . Para se melhorar a aproximação é sempre possível diminuir o tamanho dos elementos nos contornos, melhorando-se o preenchimento. Nota-se claramente neste caso que a malha triangular possui menor diferença entre o domínio e sua aproximação do que a malha formada por quadriláteros, o que nem sempre acontece, podendo este último preencher melhor o domínio com um menor número de elementos (como é o caso em placas retangulares).

A numeração dos nós e elementos é um outra questão que, enquanto nos problemas unidimensionais não possuía grande importância dado que os nós e os elementos eram numerados progressivamente de um elemento ao outro, nos problemas bidimensionais um maior cuidado é necessário. Numerações diferentes geram matrizes distintas. A situação ideal é quando matrizes de banda são geradas com o menor número possível de bandas.

7.5.1 Elementos triangulares lineares

A aproximação da solução proposta pelo Método de Ritz é dada conforme a Eq. (7.5.1):

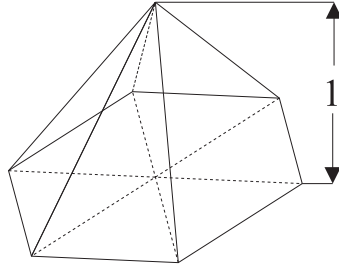
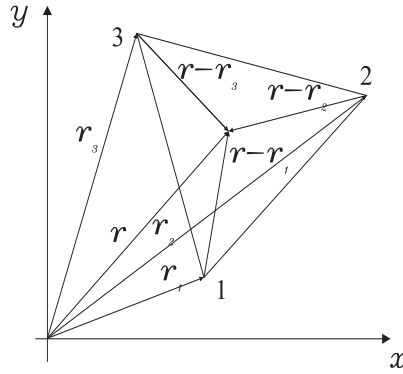
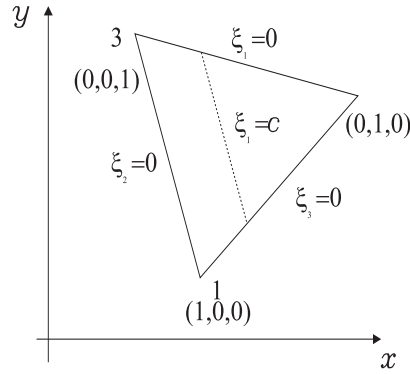


Figura 7.8: Função piramidal



7.9(a): Elemento triangular no plano xy



7.9(b): Coordenadas locais definidas de um elemento triangular

Figura 7.9: Elemento triangular

$$w^n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \phi_j(x, y, t) \quad (7.5.1)$$

A função bidimensional linear ϕ_j que faz com que o valor do coeficiente a_j seja igual ao deslocamento no ponto j é a função piramidal, mostrada na Fig. (7.8), cuja altura é unitária. Esta função é análoga à triangular definida no caso unidimensional.

Seguindo os passos anteriores, as coordenadas locais serão definidas. A Fig. (7.9(a)) mostra um elemento triangular no plano (x,y), cuja posição de seus vértices é dada pelos vetores r_1 , r_2 e r_3 e um ponto $P(x,y)$ dentro do triângulo posicionado pelo vetor r . A posição de P em relação aos vértices do triângulo é dada pelos vetores diferença: $r - r_1$, $r - r_2$ e $r - r_3$. Por estes vetores estarem no mesmo plano, pode-se escrever:

$$c_1(r - r_1) + c_2(r - r_2) + c_3(r - r_3) = 0 \quad (7.5.2)$$

isolando-se r , escreve-se:

$$r = \frac{c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3}{c_1 + c_2 + c_3} = \sum_{i=1}^3 \xi_i r_i \quad (7.5.3)$$

em que,

$$\xi_i = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^3 c_j}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.5.4)$$

Se os vetores forem escritos em termos das coordenadas (x, y) a Eq. (7.5.3) será:

$$\begin{aligned} x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= x \\ y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 &= y \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 1 \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

O sistema é resolvido para ξ_i e as equações que relacionam as coordenadas locais às globais são encontradas:

$$\begin{aligned} \xi_1(x, y) &= \frac{1}{\Delta} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \xi_2(x, y) &= \frac{1}{\Delta} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \xi_3(x, y) &= \frac{1}{\Delta} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

onde,

$$\Delta = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (7.5.7)$$

A Fig. (7.9(b)) mostra os valores que tomam cada vértice nas coordenadas locais. Quando, por exemplo $(x, y) = (x_1, y_1)$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 0, 0)$. O mesmo vale para o segundo e o terceiro vértice, onde $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 1, 0)$ e $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, 1)$.

Por seus valores serem 1 em um dos vértices e 0 nos demais, as Eqs. (7.5.6) também são tomadas como função de interpolação definidas localmente, isto é:

$$\phi_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.5.8)$$

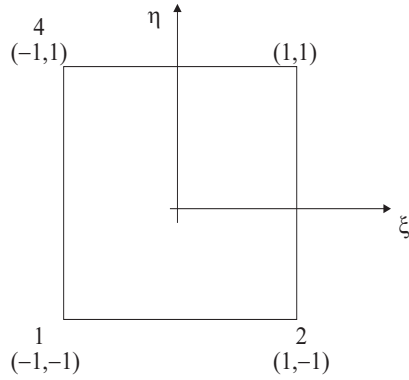
O deslocamento no elemento é aproximado novamente por:

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i = \Phi^T a$$

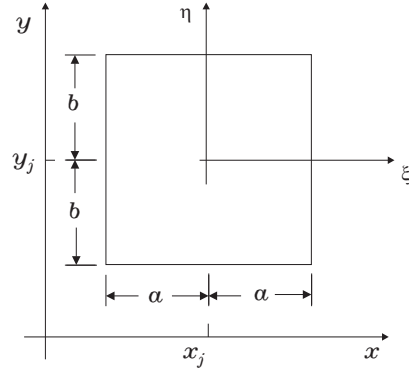
onde $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T$ e $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$.

7.5.2

Elementos quadrilaterais



7.10(a): Coordenadas locais de um elemento retangular



7.10(b): Relação entre as coordenadas locais e globais do elemento cúbico retangular

Figura 7.10: Elemento retangular

7.5.2.1

Elemento Bilinear

O elemento quadrilateral mais simples é formulado pelo polinômio bilinear a saber:

$$\phi_i(\xi, \eta) = c_{i1} + c_{i2}\xi + c_{i3}\eta + c_{i4}\xi\eta, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.5.9)$$

onde as coordenadas locais ξ e η são visualizada na Fig. (7.10(a)). Seguindo os mesmos passos descritos para encontrar as funções de interpolação dos elementos unidimensionais, chega-se às funções de forma desse tipo de elemento:

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad \phi_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (7.5.10)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad \phi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

A seguinte numeração será adotada: os elementos são numerados a partir de $x = 0$ e $y = 0$, com a numeração seguindo coluna por coluna conforme pode ser visto na Fig. (7.11). Na mesma figura pode-se observar que os nós são numerados globalmente da mesma forma, porém localmente inicia-se pelo vértice inferior esquerdo seguindo no sentido anti-horário, sendo o mesmo procedimento repetido para os graus de liberdade.

Outras funções de maior grau podem ser utilizadas para a formulação de elementos quadrilaterais, ou por exigência do próprio modelo a se aproximar, ou por uma escolha, para a melhoria da convergência. É pelo primeiro motivo que nos próximos parágrafos será mostrada a formulação de um elemento de maior ordem, que será usado na aproximação de um problema de uma placa.

7.5.2.2

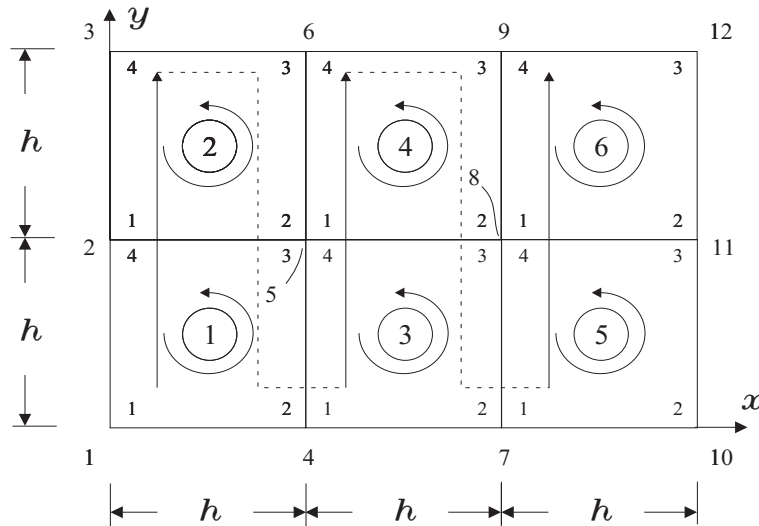


Figura 7.11: Esquema adotado para a numeração de elementos quadrilaterais

Elemento cúbico do tipo Hermite

Conforme pôde ser observado, o operador da formulação forte do problema de placa é constituído pelo operador biarmônico ∇^4 , porém com a formulação variacional a ordem da maior derivada cai para 2. Ainda assim, funções de forma de segunda ordem não podem ser usadas, pois deve-se garantir a continuidade entre os elementos. Para tal, no modelo de placa considerado, não somente o deslocamento de cada nó deverá ser contínuo, mas também a sua derivada em cada dimensão. O vetor dos graus de liberdade é dado logo abaixo:

$$w = [w_1 \quad \theta_{\xi 1} \quad \theta_{\eta 1} \quad w_2 \quad \theta_{\xi 2} \quad \dots \quad \theta_{\eta 4}]^T \quad (7.5.11)$$

onde,

$$\theta_{\xi} = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \theta_{\eta} = -\frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (7.5.12)$$

Um polinômio de quarta ordem possui quinze coeficientes, porém, como são doze os graus de liberdade, alguns termos desse polinômio são descartados de forma a sobrar somente os doze coeficientes necessários, levando a:

$$\begin{aligned} \phi_i(\xi, \eta) = & c_{i1} + c_{i2}\xi + c_{i3}\eta + c_{i4}\xi^2 + c_{i5}\xi\eta + c_{i6}\eta^2 + c_{i7}\xi^3 \\ & + c_{i8}\xi^2\eta + c_{i9}\xi\eta^2 + c_{i10}\eta^3 + c_{i11}\xi^3\eta + c_{i12}\xi\eta^3, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 12. \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

Novamente a aproximação da solução é:

$$w^e(\xi, \eta) = \Phi^T a \quad (7.5.14)$$

onde $a = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{12}]^T$ e $\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{12}]^T$. Seguindo o procedi-

mento adotado, deve-se montar a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (7.5.15)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_k & \eta_k & \xi_k^2 & \xi_k \eta_k & \eta_k^2 & \xi_k^3 & \xi_k^2 \eta_k & \xi_k \eta_k^2 & \eta_k^3 & \xi_k^3 \eta_k & \xi_k \eta_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_k & 2\eta_k & 0 & \xi_k^2 & 2\xi_k \eta_k & 3\eta_k^2 & \xi_k^3 & 3\xi_k \eta_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\xi_k & -\eta_k & 0 & -3\xi_k^2 & -2\xi_k \eta_k & -\eta_k^2 & 0 & -3\xi_k^2 \eta_k & -\eta_k^3 \end{bmatrix} \quad (7.5.16)$$

Como exemplo, a submatriz A_1 é montada substituindo-se os termos da matriz acima pelas coordenadas do nó 1 ($\xi_1 = -1$ e $\eta_1 = -1$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.5.17)$$

Ao se inverter a matriz A formada pelas submatrizes A_j , ($j = 1, 2, 3$ e 4) os coeficientes c dos polinômios são encontrados, podendo-se logo escrevê-los:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{8}(2 - 3\xi - 3\eta + 4\xi\eta + \xi^3 + \eta^3 - \xi^3\eta - \xi\eta^3) \\
\phi_2 &= \frac{1}{8}(1 - \xi - \eta + \xi\eta - \eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3) \\
\phi_3 &= \frac{1}{8}(-1 + \xi + \eta + \xi^2 - \xi\eta - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta) \\
\phi_4 &= \frac{1}{8}(2 + 3\xi - 3\eta - 4\xi\eta - \xi^3 + \eta^3 + \xi^3\eta + \xi\eta^3) \\
\phi_5 &= \frac{1}{8}(1 + \xi - \eta - \xi\eta - \eta^2 - \xi\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^3) \\
\phi_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi - \eta - \xi\eta - \xi^3 + \xi^2\eta + \xi^3\eta) \\
\phi_7 &= \frac{1}{8}(2 + 3\xi + 3\eta + 4\xi\eta - \xi^3 - \eta^3 - \xi^3\eta - \xi\eta^3) \\
\phi_8 &= \frac{1}{8}(-1 - \xi - \eta - \xi\eta + \eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^3) \\
\phi_9 &= \frac{1}{8}(1 + \xi + \eta - \xi^2 + \xi\eta - \xi^3 - \xi^2\eta - \xi^3\eta) \\
\phi_{10} &= \frac{1}{8}(2 - 3\xi + 3\eta - 4\xi\eta + \xi^3 - \eta^3 + \xi^3\eta + \xi\eta^3) \\
\phi_{11} &= \frac{1}{8}(-1 + \xi - \eta + \xi\eta + \eta^2 - \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3) \\
\phi_{12} &= \frac{1}{8}(-1 + \xi - \eta + \xi^2 + \xi\eta - \xi^3 + \xi^2\eta - \xi^3\eta)
\end{aligned} \tag{7.5.18}$$

7.5.2.3

Matrizes do MEF de uma placa utilizando elementos cúbicos bidimensionais

Na seção do Método de Ritz foram obtidas as seguintes matrizes de massa (6.2.36), rigidez (6.2.37) e carregamento (6.2.38):

$$M = \int_D \rho h \phi \phi^T dD$$

$$K = \int_D D_E \left\{ (\nabla^2 \phi)^2 + (1 - \nu) \left[2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial^2 x} \right] \right\} dD$$

$$F = \int_D f(x, y, t) \phi dD$$

onde $\phi_i(x) = [\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)]^T$.

Procede-se com a mudança de coordenadas globais para locais. Uma visualização da relação entre ambas é dada pela Fig. (7.10(b)) e é expressa conforme abaixo:

$$x = x_j + a\xi \quad \text{e} \quad y = y_j + b\eta \quad (7.5.19)$$

onde a é o comprimento da placa e b a largura. Neste exemplo, será adotado $a = b$.

Operando-se a mudança de coordenadas, as matrizes tomam a seguinte forma:

$$m^e = a^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^e h^e \phi \phi^T d\xi d\eta \quad (7.5.20)$$

$$k^e = \frac{1}{a^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D_E^e \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \eta^2} \right) + \right. \\ \left. (1 - \nu) \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial \xi^2} \right) \right] \right\} d\xi d\eta \quad (7.5.21)$$

$$f^e = a^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, t) \phi d\xi d\eta \quad (7.5.22)$$

7.5.3

Aproximação dos modos e frequências naturais de uma placa através do MEF

As matrizes (7.5.20) e (7.5.21) foram implementadas no programa *MEF_placa* (ver Apêndice C para o manual de uso). Em posse destas, o programa aproxima os modos e frequências naturais de uma placa dadas as condições de contorno simplesmente apoiada ou engastada da placa. A Fig. (7.12) mostra as quatro primeiras aproximações modos de vibração de uma placa de aço simplesmente apoiada de largura=1m, comprimento=1m, espessura=0,001m, para um erro especificado na frequência $e < 1\%$. O erro final do programa foi de $e = 0,606\%$ tendo sido utilizados 1024 elementos. As aproximações das frequências circulares naturais (rd/s) encontradas pelo programa foram:

$$\omega_1 = 308,7926; \quad \omega_2 = 771,7419; \quad \omega_3 = 771,7419; \quad \omega_4 = 1233,3; \quad (7.5.23)$$

As diferenças percentuais (*Dif%*) abaixo são entre as aproximações dadas acima e as frequências calculadas pela Eq. (B.0.16):

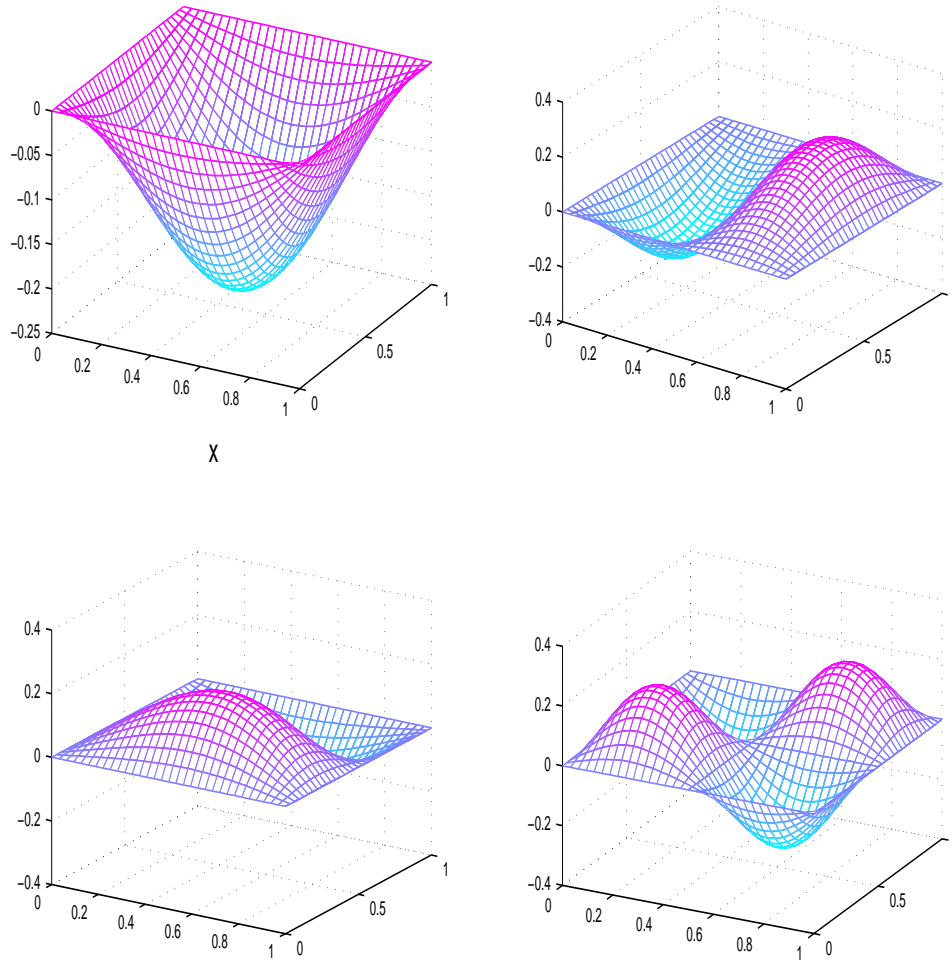


Figura 7.12: Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de uma placa apoiada

$$\begin{aligned} Dif_{\%}\omega_{11} &= 0,05\%; & Dif_{\%}\omega_{12} &= 0,08\%; \\ Dif_{\%}\omega_{21} &= 0,08\%; & Dif_{\%}\omega_{22} &= 0,2\%. \end{aligned} \quad (7.5.24)$$

Já a Fig. (7.13) ilustra os modos da mesma placa, porém com a segunda opção de condição de contorno que é o engastamento das extremidades. Neste caso, para um erro especificado $e = 1\%$, as aproximações das frequências foram:

$$\omega_{11} = 562,6; \quad \omega_{12} = 1147,2; \quad \omega_{21} = 1147,2; \quad \omega_{22} = 1688,5. \quad (7.5.25)$$

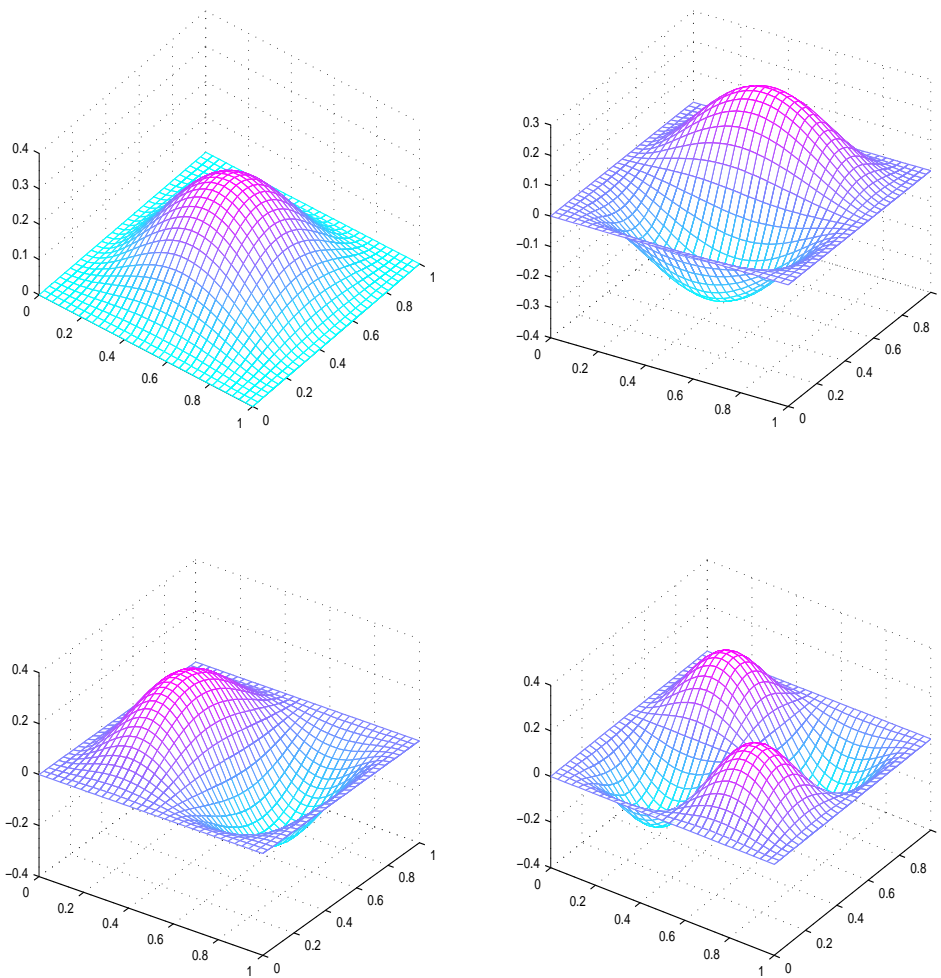


Figura 7.13: Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de uma placa engastada