

6 Métodos Diretos

Conforme visto na seção anterior, obter a solução analítica de um problema de autovalor pode não ser tarefa fácil e, na verdade, somente poucos a possuem. Por esse fato é que esta seção se dedica a métodos de aproximação do cálculo variacional, os chamados Métodos Diretos. Meirovitch (21), Prenter (23), Hagedorn (12) e Bathe (2) foram consultados para essa seção.

Todos os métodos apresentados usam combinações de funções para aproximar a solução dos problemas. A principal diferença entre os métodos está na forma com que cada um encontra os coeficientes da combinação. Uma segunda diferença está na forma como o domínio é tratado. O Método dos Elementos Finitos divide o domínio em partes menores, trabalhando em cada subintervalo. Já o Método da Colocação, o Método de Ritz e o Método de Galerkin não dividem o domínio, sendo por esse fato conhecidos por Métodos Espectrais.

6.1 Método de Rayleigh

As ideias deste e do próximo método a ser discutido, o método de Rayleigh-Ritz, servirão de base para um terceiro método, o chamado método de Ritz.

Dado o cabo fixo-livre do exemplo anteriormente tratado, para a construção do seu Lagrangeano L foram usadas as energias cinética e potencial, na forma:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L A(x)\rho(x) \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad \text{e} \quad E_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx$$

Com ambas as energias, também pode-se escrever a energia mecânica total $\mathcal{E} = E_c + E_p$. Em sistemas conservativos a energia total é constante. Supõe-se que o sistema está vibrando em um de seus modos, conseqüentemente a solução pode ser escrita simplesmente por:

$$w(x,t) = W(x)\cos \omega t \tag{6.1.1}$$

sendo W uma autofunção do sistema e ω a frequência modal associada. Ao se substituir a expressão acima na energia mecânica total \mathcal{E} , obtém-se:

$$\mathcal{E} = \left[\frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \rho(x) A(x) W^2 dx \right] \text{sen}^2 \omega_k t + \left[\frac{1}{2} \int_0^L T(x) W'^2 dx \right] \text{cos}^2 \omega_k t \quad (6.1.2)$$

O fato de em sistemas conservativos \mathcal{E} ser constante, implica para uma solução não-trivial que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \rho(x) A(x) W^2 dx \right] &= \left[\frac{1}{2} \int_0^L T(x) W'^2 dx \right] \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{\int_0^L T(x) W'^2 dx}{\int_0^L \rho(x) A(x) W^2 dx} = \mathcal{R}[W] \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

onde $\mathcal{R}[W]$ é conhecido como Quociente de Rayleigh. Dado que se conhece a autofunção, a frequência associada pode ser facilmente encontrada através do quociente. Uma vez que esta não é conhecida demonstra-se (ver Meirovitch (21)) que a frequência pode ser determinada pelo problema de minimização:

$$\omega_1^2 = \min_{\tilde{W} \in \mathcal{U}} \mathcal{R}[\tilde{W}] = \min_{\tilde{W} \in \mathcal{W}} \frac{\int_0^L T(x) W'^2 dx}{\int_0^L \rho(x) A(x) W^2 dx} \quad (6.1.4)$$

onde \mathcal{W} é o conjunto de funções que satisfazem as condições de contorno essenciais do problema e que são diferenciáveis ao menos até a maior ordem da derivada em relação a x presente na equação. Para a resolução, escolhe-se uma função $W = W(x, \alpha)$, onde α é um parâmetro da função e minimiza-se o quociente em relação a esse parâmetro. Encontrando-o, encontra-se a função W , que corresponde à primeira autofunção, e a primeira frequência associada, em geral a mais importante na análise de vibrações.

Apesar de existirem métodos de se obter os modos e as frequências naturais seguintes, outros caminhos foram desenvolvidos de forma a encontrá-los de forma mais eficiente, como é o Método de Rayleigh-Ritz.

6.2 Método de Rayleigh-Ritz

A principal diferença entre o Método de Rayleigh e o Método de Rayleigh-Ritz é que esse expande o modo em termos de funções admissíveis W_i e coeficientes α_i , na forma:

$$W(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i W_i(x) \quad (6.2.1)$$

e prossegue-se a minimização em termos desses coeficientes e não em termos de um parâmetro de uma função. Prosseguindo com o exemplo do cabo, substitui-

se a expansão no quociente (6.1.3):

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j k_{ij}}{\sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j m_{ij}} = \frac{\alpha^T K \alpha}{\alpha^T M \alpha} \quad (6.2.2)$$

sendo que:

$$k_{ij} = \int_0^L T(x) W_i' W_j' dx \quad \text{e} \quad m_{ij} = \int_0^L \rho(x) A(x) W_i W_j dx \quad (6.2.3)$$

Derivando-se o quociente em relação ao coeficiente α e realizando-se as devidas simplificações, chega-se a:

$$(K - \omega^2 M) \alpha = 0 \quad (6.2.4)$$

Ao se resolver o problema de autovalor acima, encontra-se não só as frequências, como também os coeficientes α da expansão das autofunções. Depara-se com este problema em todos os próximos métodos a serem tratados, isto é, deverá se encontrar os coeficientes da expansão das autofunções através de um problema de autovalor.

6.2.1

Método de Ritz

No método de Ritz usa-se a mesma ideia de expansão da solução, porém aplicada no problema básico do cálculo variacional, que é encontrar o extremo de um funcional I , atendendo a condições de contorno impostas. No método, uma determinada variável de estado w do funcional (tal como o deslocamento) é aproximada por:

$$w^N(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(x) \quad (6.2.5)$$

onde $\phi_i = [\phi_1, \dots, \phi_N]$ e $a_i(t) = [a_1, \dots, a_N]$. Após a substituição, quer se encontrar os valores de a_i que tornam I estacionário. Logo, I é derivado parcialmente em função de cada a_i e igualado a zero sendo N equações formadas na forma:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2.6)$$

No método de Ritz as funções de aproximação devem satisfazer somente as condições de contorno essenciais, já que as condições naturais já são incorporadas na formulação variacional, sendo esta facilitação uma grande vantagem.

Dado um sistema qualquer, cuja energia cinética E_c é dada por:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_D m(x) \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dD \quad (6.2.7)$$

e nela substitui-se a Eq. (6.2.5):

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2} \int_D m(x) \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dD \approx \frac{1}{2} \int_D m(x) \left(\frac{\partial w^N(x,t)}{\partial t} \right)^2 dD \\ &= \frac{1}{2} \int_D m(x) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^T \phi(x) \phi^T(x) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right) dD \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^T M \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

onde,

$$M = \int_D m(x) \phi(x) \phi^T(x) dD \quad (6.2.9)$$

O mesmo é realizado com a energia potencial $E_p(t)$:

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{1}{2} (w(x,t), w(x,t)) \approx \frac{1}{2} (w^N(x,t), w^N(x,t)) \\ &= \frac{1}{2} (a^T(t) \phi(x), \phi^T(x) a(t)) = \frac{1}{2} a^T(t) K a(t) \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

onde,

$$K = (\phi(x), \phi^T(x)) \quad (6.2.11)$$

e com o trabalho das forças não-conservativas:

$$\delta W^N = \int_D f(x,t) \delta w^N(x,t) dD = \int_D f(x,t) \phi(x) \delta a(t) dD \quad (6.2.12)$$

Substituindo-se as discretizações na Equação de Lagrange (3.2.40), chega-se ao sistema:

$$M\ddot{a}(t) + K a(t) = F \quad (6.2.13)$$

onde $F = \int_D f(x,t) \phi(x) dx$.

Uma vez que os modos que se quer obter são características intrínsecas do sistema, analisa-se o caso homogêneo ($F = 0$). Propõe-se a solução harmônica $a(t) = e^{i\omega^N t} u$ e, quando esta é substituída nas equações do sistema (6.2.13), porém sem o termo de forçamento, encontra-se:

$$K u = \lambda^N M u \implies (K - \omega^2 M) u = 0 \quad (6.2.14)$$

que coincide com a Eq. (6.2.4). Conforme visto as entradas do autovetor u_j são os coeficientes da expansão das autofunções W_j em termos de funções

aproximantes.

Quanto às condições iniciais, inicia-se a discretização da equação da posição inicial integrando-se ambos os seus lados:

$$\int_D w(x, 0)dx = \int_D w_0(x)dx \quad (6.2.15)$$

e novamente aproxima-se a solução pela Eq. (6.2.5):

$$\int_D \sum_{i=1}^N a_i(0)\phi_i(x)dx = \int_D w_0(x)dx \quad (6.2.16)$$

Por último multiplica-se ambos os lados por ϕ_j

$$\int_D \sum_{i=1}^N a_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_D w_0(x)\phi_j(x)dx \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2.17)$$

Os coeficientes $a_i(0)$ da aproximação da condição inicial são obtidos ao se isolá-los da equação acima, conforme abaixo:

$$a_i(0) = \frac{\int_D w_0(x)\phi_j(x)dx}{\int_D \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\phi_j(x)dx} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2.18)$$

O mesmo procedimento se aplica à velocidade inicial $v_0(x)$, ao que se obtém:

$$\dot{a}_i(0) = \frac{\int_0^L v_0(x)\phi_j(x)dx}{\int_0^L \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\phi_j(x)dx} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2.19)$$

6.2.2

Exemplo de discretização pelo Método de Ritz - Aproximação dos modos e frequências naturais

O Método de Ritz será agora usado para discretizar a formulação variacional de um cabo fixo-livre. Novamente, a energia cinética e potencial no instante t , $E_c(t)$ e $E_p(t)$ respectivamente, são dadas por:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L A(x)\rho(x) \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad \text{e} \quad E_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx$$

Inicia-se pela aproximação da solução por (6.2.5), o que resulta em:

$$\begin{aligned} E_c^N(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L A(x)\rho(x)\dot{a}^T \phi \phi^T \dot{a} dx & \text{e} & \quad E_p^N(t) = \int_0^L T(x)a^T \phi' \phi' dx \\ &\quad \downarrow & & \quad \downarrow \\ E_c^N(t) &= \frac{1}{2} \dot{a}^T(t)M\dot{a}(t) & \text{e} & \quad \frac{1}{2} a^T(t)Ka(t) \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

onde $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$ e,

$$M = \int_0^L A(x)\rho(x)\phi\phi^T dx \quad \text{e} \quad K = \int_0^L T(x)\phi'\phi' dx \quad (6.2.21)$$

O segundo passo consiste em encontrar as coordenadas $a_i(t)$ que extremam o funcional I , isto é:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_{t_1}^{t_2} L^N dt = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_{t_1}^{t_2} (E_c^N - E_p^N) dt = 0 \quad (6.2.22)$$

Analisa-se o sistema homogêneo ($f = 0$). A substituição da equação acima em (3.2.40) leva ao sistema:

$$M\ddot{a}(t) + Ka(t) = 0$$

O próximo passo consiste na escolha de uma função aproximante para que as matrizes M e K sejam efetivamente calculadas. Conforme citado, no método de Ritz essa função deve atender às condições de contorno essenciais somente, que neste caso é dada por $w(0, t) = 0$ e as condições de derivação. Exemplo de funções que atendem a esse requisito são dadas abaixo:

$$\phi_j(x) = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.2.23)$$

Somente para ilustração do exemplo, sem preocupação por ora com a acurácia da resposta, toma-se $N = 3$ e as matrizes M e K são construídas, realizando-se as operações com as funções dadas pela Eq. (6.2.23), o que resulta em:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{25}{12} & \frac{4}{3} \\ \frac{25}{12} & \frac{4}{3} & \frac{7}{8} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{8} & \frac{33}{56} \end{bmatrix}}_M \ddot{a} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & \frac{10}{3} & \frac{55}{24} \\ \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & \frac{23}{12} \\ \frac{55}{24} & \frac{23}{12} & \frac{77}{48} \end{bmatrix}}_K a = 0 \quad (6.2.24)$$

Como o objetivo desta seção é encontrar as aproximações dos modos e das frequências, propõe-se a solução modal $a(t) = ue^{i\omega t}$, ao que se chega no problema de autovalor:

$$(K - \omega^2 M)u = 0$$

Ao resolvê-lo, os seguintes valores são encontrados:

$$\begin{aligned}
 \omega_1^N = 1,202\sqrt{g/L} \quad \text{e} \quad u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -0,766 \\ 0,18 \end{pmatrix} \\
 \omega_2^N = 2,771\sqrt{g/L} \quad \text{e} \quad u_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2,553 \\ 1,477 \end{pmatrix} \\
 \omega_3^N = 5,327\sqrt{g/L} \quad \text{e} \quad u_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3,146 \\ 2,418 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

O resultado é comparado com as frequências ω_k dadas por (5.2.15). O erro percentual calculado por:

$$e_k = \left| \frac{\omega_k - \omega_k^N}{\omega_k} \right| \cdot 100 \tag{6.2.26}$$

foi de:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= 0.033\% \\
 e_2 &= 0.397\% \\
 e_3 &= 23\%
 \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

Observa-se que o maior erro foi o da aproximação da terceira frequência. Não só para este método, mas para todos os métodos de aproximação de sistemas contínuos por discretos, mostra-se que esse erro diminui quando se aumenta o número de funções utilizadas na aproximação. Porém, este aumento de funções, aumenta a dimensão das matrizes, levando a se obter autovalores mais altos com erros significativos. Como em geral o interesse está nos autovalores mais baixos, o erro encontrado nos mais altos não importará, dado que os mais baixos convergirão com o aumento do número de funções. Também demonstra-se (ver Meirovitch (21)) que os autovalores convergem monotonicamente e o valor da frequência é uma cota inferior.

As aproximações das funções modais são obtidas:

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= \phi_i(x)^T u_1 = \frac{x}{L} - 0,766 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 0,18 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \\
W_2(x) &= \phi_i(x)^T u_2 = \frac{x}{L} - 2,553 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 1,477 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \\
W_3(x) &= \phi_i(x)^T u_3 = \frac{x}{L} - 3,146 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 2,418 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \quad (6.2.28)
\end{aligned}$$

O programa *Ritz_Galerkin_cabo* (ver Apêndice C para o manual de uso) calcula pelo método de Ritz as N primeiras aproximações das frequências naturais e as N primeiras aproximações das funções modais para uma precisão especificada. O programa ainda permite que sejam alteradas as condições de contorno para fixo-massa e fixo-mola. Essas condições no Método de Ritz são tratadas na seção (6.3.1).

Este programa calcula o erro comparando a k -ésima aproximação obtida com um número $N - 1$ de funções com a obtida com N funções, na forma:

$$e_k = \left| \frac{\omega_k^N - \omega_k^{N-1}}{\omega_k^N} \right| \cdot 100 \quad (6.2.29)$$

Quando o valor do erro e_k for menor que o erro especificado o programa fornece a resposta.

Na primeira versão do programa, as funções aproximantes do exemplo anterior foram utilizadas. Porém, o algoritmo apresentava uma taxa de convergência muito baixa e um elevado tempo de processamento. As funções foram então substituídas por autofunções de um problema de barra fixa-livre, cuja modelagem é parecida com a do cabo fixo-livre, dadas por:

$$\phi_j(x) = \text{sen} \frac{(2j-1)\pi x}{2L} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.2.30)$$

Estas funções, por estarem mais relacionadas com a dinâmica do problema do que as anteriores, apresentaram uma convergência mais rápida e portanto foram as utilizadas no código.

Pode-se ver na Fig. (6.1) a aproximação dos seis primeiros modos de vibração de uma cabo fixo-livre de 10m de comprimento, e erro especificado de 1,1%. Nota-se a semelhança com a Fig. (5.3).

As aproximações das frequências circulares naturais (rd/s) encontradas foram:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1,2024; & \omega_2 &= 2,7605; & \omega_3 &= 4,3297; \\
\omega_4 &= 5,9051; & \omega_5 &= 7,4880; & \omega_6 &= 9,0802.
\end{aligned} \quad (6.2.31)$$

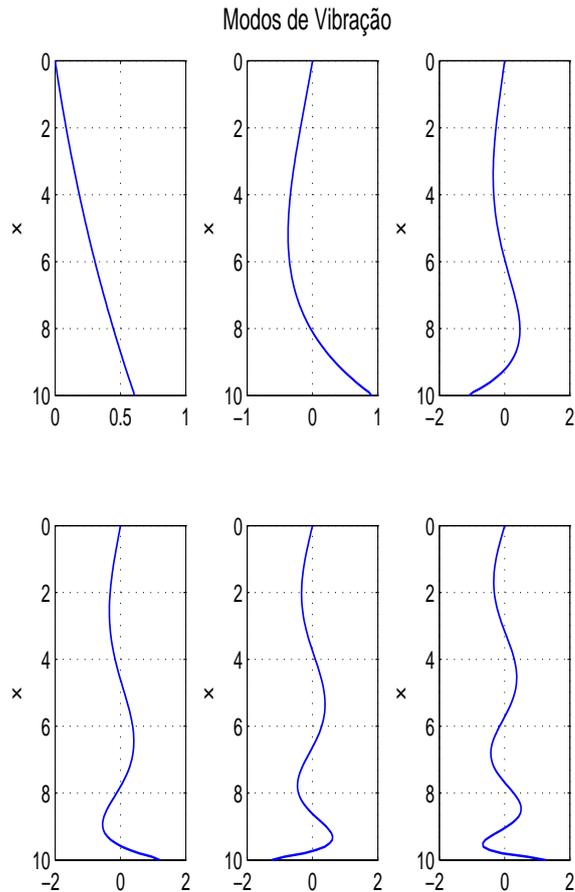


Figura 6.1: Aproximações dos seis primeiros modos de vibração obtida pelo Método de Ritz

O gráfico da Fig. (6.2) mostra o erro na aproximação da sexta frequência natural dado o número de funções N usadas na aproximação. Conforme comentado, nota-se que com o aumento do número de funções o erro é diminuído e que a aproximação dos autovalores converge monotonicamente e o valor da frequência é uma cota inferior.

6.2.3 Aplicação do método no problema de uma placa

A solução do problema de uma placa deve ser aproximada por uma função em termos de duas coordenadas. A aproximação é dada por:

$$w^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t)\phi_i(x, y) \tag{6.2.32}$$

Essa aproximação é substituída nos termos da Eq. (4.2.7), que são reescritos logo abaixo, onde os termos das energias foram novamente separados para uma melhor organização:

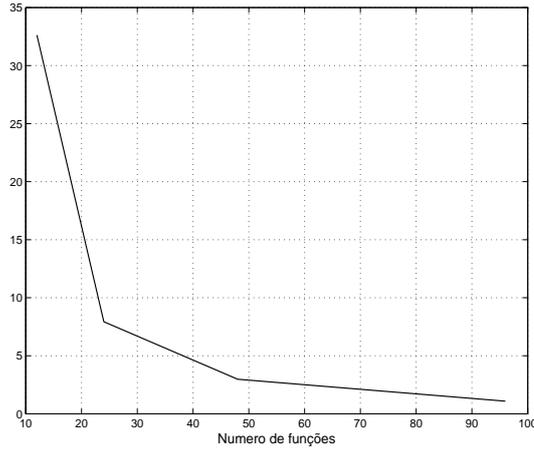


Figura 6.2: Erro da aproximação da sexta frequência natural obtida pelo Método de Ritz x número de funções aproximantes

$$\delta E_p = \int_D D_E \left\{ \nabla^2 \phi a \nabla^2 \phi \delta a + (1 - \nu) \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \delta a - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} a \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta a - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta a \right] \right\} dD$$

que rearranjando fica:

$$\delta E_p = \int_D D_E \left\{ (\nabla^2 \phi)^2 + (1 - \nu) \left[2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \right] \right\} dD a \delta a \tag{6.2.33}$$

e ainda:

$$\delta E_c = \int_D \rho h \phi \phi dD \ddot{a} \delta a \tag{6.2.34}$$

e:

$$\delta W = \int_D f(x, y, t) \phi dD \delta a \tag{6.2.35}$$

Pela aplicação do lema fundamental do cálculo variacional, as equações acima podem então ser escritas na forma do sistema:

$$M\ddot{a} + Ka = F$$

onde $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$ e,

$$M = \int_D \rho h \phi \phi dD \tag{6.2.36}$$

$$K = \int_D D_E \left\{ (\nabla^2 \phi)^2 + (1 - \nu) \left[2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \right] \right\} dD \tag{6.2.37}$$

$$F = \int_D f(x, y, t) \phi dD \quad (6.2.38)$$

As matrizes acima serão guardadas no momento para serem utilizadas no Método dos Elementos Finitos no Capítulo (7)

6.3 Método de Galerkin

Retoma-se a Eq. (4.1.9):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L A\rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \delta w(x, t) dx + \int_0^L A\rho g(L-x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} dx - \int_0^L f(x, t) \delta w(x, t) dx \right\} dt = 0$$

No Método dos Resíduos Ponderados, classe de método a qual pertence o Método de Galerkin, inicia-se pela aproximação de w pela combinação linear das funções ϕ , conforme abaixo:

$$w^N(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(x) = \phi^T a \quad (6.3.1)$$

onde $a = [a_1(t), \dots, a_N(t)]^T$ são os coeficientes da combinação, $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$ funções linearmente independentes e N é a dimensão do espaço gerado pelas funções ϕ_i , sendo necessário encontrar os coeficientes a . Há um erro dado pela diferença entre a solução e a aproximação:

$$w(x) = w^N(x) + \underbrace{\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \phi_i(x)}_{\text{erro}^N} \quad (6.3.2)$$

Este erro tende a zero quando N tender a infinito. Porém, quer se encontrar a aproximação com um número finito N de funções.

Escreve-se também $\delta w(x, t)$ pela combinação linear de funções:

$$w^N(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \psi_i(x) = \psi^T a \quad (6.3.3)$$

onde $a(t) = [a_1(t), \dots, a_N(t)]^T$ e $\psi = [\psi_1, \dots, \psi_N]^T$. Sendo assim:

$$\delta^N w(x, t) = \psi^T \delta a = \delta a^T \psi \quad (6.3.4)$$

Às funções ψ dá-se o nome de funções teste. Substituindo as Eqs. (6.3.4) e (6.3.2) na Eq. (4.1.9):

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L T(x)\phi'\psi'^T dx a - \int_0^L f(x)\psi dx + \int_0^L A(x)\rho(x)erro^N\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L T(x)erro'^N\psi'^T dx \right] \delta a \right\} dt = 0 \quad (6.3.5)$$

No Método dos Resíduos Ponderados faz-se o erro ortogonal ao espaço de funções teste, isto é:

$$\int_0^L A(x)\rho(x)erro^N\psi^T dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^L T(x)erro'^N\psi'^T dx = 0 \quad (6.3.6)$$

Levando a Eq. (6.3.5) a:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L T(x)\phi'\psi'^T dx a - \int_0^L f(x)\psi dx \right] \delta a \right\} dt = 0 \quad (6.3.7)$$

Aplica-se então o lema fundamental do cálculo variacional, podendo-se escrever:

$$\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L T(x)\phi'\psi'^T dx a - \int_0^L f(x)\psi dx = 0 \quad (6.3.8)$$

A escolha das funções teste distingue o Método de Galerkin dos demais Métodos dos Resíduos Ponderados. Nesse $\psi = \phi$, logo:

$$M\ddot{a} + Ka = F \quad (6.3.9)$$

onde,

$$M = \int_0^L A(x)\rho(x)\phi\phi^T dx, \quad K = \int_0^L T(x)\phi'\phi'^T dx, \quad F = \int_0^L f(x)\phi dx \quad (6.3.10)$$

Nota-se que M e K são iguais aos obtidos no Método de Ritz, dados pela Eq. (6.2.21). Demonstra-se que em sistemas autoadjuntos (ver Meirovitch (21)) os métodos são equivalentes.

6.3.1

Aplicação do método de Ritz e de Galerkin em problemas com outras condição de contorno

Dado que ambos os métodos, o de Ritz e o de Galerkin, são equivalentes em sistemas autoadjuntos, nesta seção será feito apenas um desenvolvimento

para ambos através da formulação variacional.

Dois casos além da condição fixo-livre serão tratados: a condição fixo-massa e fixo-mola. Conforme anteriormente visto, essas condições implicam na adição de, no primeiro caso, um termo na variação da energia cinética e no segundo de um termo na energia potencial, a saber:

$$\delta E_c(t) = \dots + m \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t^2} \delta w(L, t) \quad \text{e} \quad \delta E_p(t) = \dots + K w(L, t) \delta w(L, t) \quad (6.3.11)$$

Usando-se a aproximação proposta por ambos os métodos:

$$\delta E_c(t) = \dots + m \phi_i(L) \phi_j(L) \ddot{a} \delta a \quad \text{e} \quad \delta E_p(t) = \dots + K \phi_i(L) \phi_j(L) a \delta a \quad (6.3.12)$$

Logo, as novas matrizes de massa e rigidez serão:

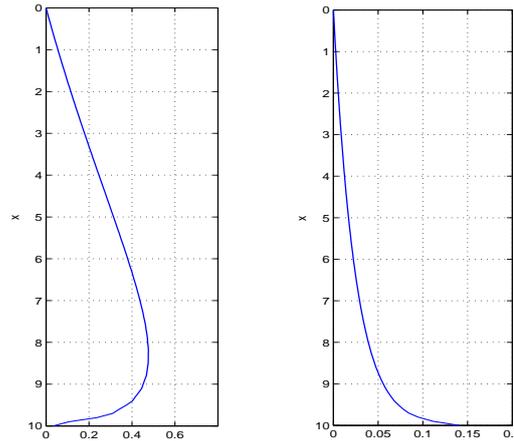
Cabo fixo-massa		Cabo fixo-mola
↓		↓
Matriz de massa		Matriz de rigidez
↓		↓
$M = M_{fixo-livre} + m \phi_i(L) \phi_j(L)$		$K = K_{fixo-livre} + K \phi_i(L) \phi_j(L)$

As figuras (6.3(a)) e (6.3(b)) mostram a aproximação do primeiro modo de vibração de um cabo fixo-mola (sendo a constante elástica da mola de $50N/m$) e a aproximação do primeiro modo de vibração de um cabo fixo-massa (cuja massa é de $50kg$) obtida pelo Método de Ritz, com o uso do programa *Ritz_Galerkin_cabo*. No primeiro caso a aproximação da primeira frequência circular natural foi de $1,5776rd/s$ e no segundo de $0.1833rd/s$, com um erro especificado de $6,5\%$.

6.4 Método da Colocação

Ainda que o Capítulo 9 se dedique somente ao Método da Colocação, esta seção visa tornar clara a relação que este possui com os demais métodos apresentados. Com a finalidade de tornar esta seção mais didática, o método não será aqui apresentado em sua melhor forma, sendo esta tarefa deixada para o Capítulo 9.

O Método da Colocação difere do Método de Galerkin na escolha da base de projeção. Ao invés de utilizar funções teste e aproximantes iguais, o Método da Colocação usa como funções teste distribuições Deltas de Dirac posicionadas em pontos x_i predeterminados na forma:



6.3(a): 1º modo cabo fixo-mola
6.3(b): 1º modo cabo fixo-massa

Figura 6.3: Aproximação do primeiro modo de vibração do cabo fixo-livre em diferentes condições de contorno

$$\psi_i(x) = \delta(x - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{6.4.1}$$

Essa escolha de função aproximante implica em:

$$\int_D \delta(x - x_i) f(x) dD = f(x_i) \tag{6.4.2}$$

No método, impõe-se que nos pontos de colocação o erro da projeção seja zero, para que assim se calcule os coeficientes da combinação linear. Os pontos são impostos nos locais do domínio onde uma maior acurácia de resposta for requerida. No exemplo aqui apresentado, os pontos escolhidos serão igualmente espaçados, porém, como será visto no Capítulo 9, em muitos casos essa não é a melhor escolha.

Este método possui como vantagem a sua simplicidade matemática, por não envolver integrais. As matrizes M e K do método não mais serão simétricas, porém, ainda assim, as aproximações dos autovalores λ de sistemas autoadjuntos se mantêm reais.

6.4.1

Exemplo de discretização pelo Método da Colocação - Aproximação dos modos e frequências naturais

Retoma-se a Eq. (4.1.9):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L A\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx + \int_0^L A\rho g(L-x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x} dx - \int_0^L f(x,t) \delta w(x,t) dx \right\} dt = 0$$

Realizando os mesmos passos adotados no Método de Galerkin e lembrando que neste caso o erro é zero nos pontos de colocação, chega-se novamente à Eq. (6.3.8):

$$\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L T(x)\phi'\psi'^T dx a - \int_0^L f(x)\psi dx = 0$$

Neste ponto ψ deveria ser substituído pelos Deltas nos pontos de colocação, porém para se evitar a derivação ocorrida no segundo termo da equação acima, este termo é integrado por partes, levando a:

$$\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{a} + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right] \psi dx a - \int_0^L f(x)\psi dx = 0 \quad (6.4.3)$$

Os pontos de colocação são fixados em intervalos regulares:

$$x_i = \frac{iL}{n} \quad (6.4.4)$$

Para o exemplo, as seguintes funções serão usadas como aproximantes¹:

$$\phi_i(x) = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.4.5)$$

Substituindo os Deltas em (6.4.3), obtém-se:

$$M\ddot{a} + Ka = f(x_i) \quad (6.4.6)$$

onde,

$$M = \int_0^L A\rho \phi_j(x)\delta(x-x_i)dx = A\rho \phi_j(x_i) = A\rho \frac{x_i}{L} \left(1 - \frac{x_i}{2L} \right)^{j-1} \quad (6.4.7)$$

e,

¹Conforme será visto no Capítulo 9, essas funções serão substituídas por polinômios de Chebyshev

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \right] \delta(x - x_i) dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \right]_{x=x_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[A\rho g(L-x) \left(\frac{-j-1}{L} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right)^j \right]_{x=x_i} \\
 &= 2A\rho g \left[\left(\frac{2L-x}{2L} \right)^j \right] \left[\frac{(2Lx_i - 5x_i j L + 4L^2 j - Lj^2 x_i + x_i^2 j^2)}{(-2L+x_i)^3} \right] \quad (6.4.8)
 \end{aligned}$$

Os elementos m_{ij} e k_{ij} das matrizes M e K são calculados e o sistema sem forçamento é descrito por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{18} & \frac{463}{2000} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{89}{300} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_M \ddot{a} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{17}{12} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_K a = 0 \quad (6.4.9)$$

Utilizando-se a solução modal $a(t) = ue^{i\omega t}$ e as condições de contorno, chega-se no problema de autovalor:

$$(K - \omega^2 M)u = 0$$

Ao resolvê-lo, os seguintes valores são encontrados:

$$\begin{aligned}
 \omega_1^N &= 1,202\sqrt{g/L} & \text{e} & \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,774 \\ 0,187 \end{pmatrix} \\
 \omega_2^N &= 2,815\sqrt{g/L} & \text{e} & \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2,274 \\ 1,735 \end{pmatrix} \\
 \omega_3^N &= 3,773\sqrt{g/L} & \text{e} & \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,13 \\ 2,375 \end{pmatrix} \quad (6.4.10)
 \end{aligned}$$

Usando a Eq. (6.2.26) calcula-se o erro entre a frequência natural e a aproximação, obtendo-se:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,033\% \\ e_2 &= 1,991\% \\ e_3 &= 12,8\% \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Como era de se esperar o maior erro foi o da aproximação da terceira frequência. As aproximações das funções modais são obtidas por:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \phi_i(x)^T u_1 = \frac{x}{L} - 0,774 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 0,187 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \\ W_2(x) &= \phi_i(x)^T u_2 = \frac{x}{L} - 2,274 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 1,735 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \\ W_3(x) &= \phi_i(x)^T u_3 = \frac{x}{L} - 3,13 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + 2,375 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

O programa *Colocacao_cabo* (ver Apêndice C para o manual de uso) calcula pelo Método da Colocação aproximações das N primeiras frequências e as aproximações das N primeiras funções modais para uma precisão especificada.

Pode-se ver na Fig. (6.4) as aproximações dos três primeiros modos de vibração de uma cabo fixo-livre de 10m de comprimento e erro especificado de 2%.

As aproximações das frequências (rd/s) foram:

$$\omega_1 = 1,2024; \quad \omega_2 = 2,76; \quad \omega_3 = 4,32. \quad (6.4.13)$$

O gráfico da Fig. (6.5) mostra o erro na aproximação da terceira frequência natural dado o número de funções usadas na aproximação.

6.5

Carregamento nos Métodos Diretos

Em geral, nos Métodos Diretos apresentados o termo de carregamento é integrado e multiplicado por funções conforme abaixo:

$$F(t) = \int_0^L f(x,t) \psi_i(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.5.1)$$

onde, ψ é o vetor das funções aproximantes de dimensão N .

A seguir alguns exemplos de carregamentos.

- Carregamento concentrado:

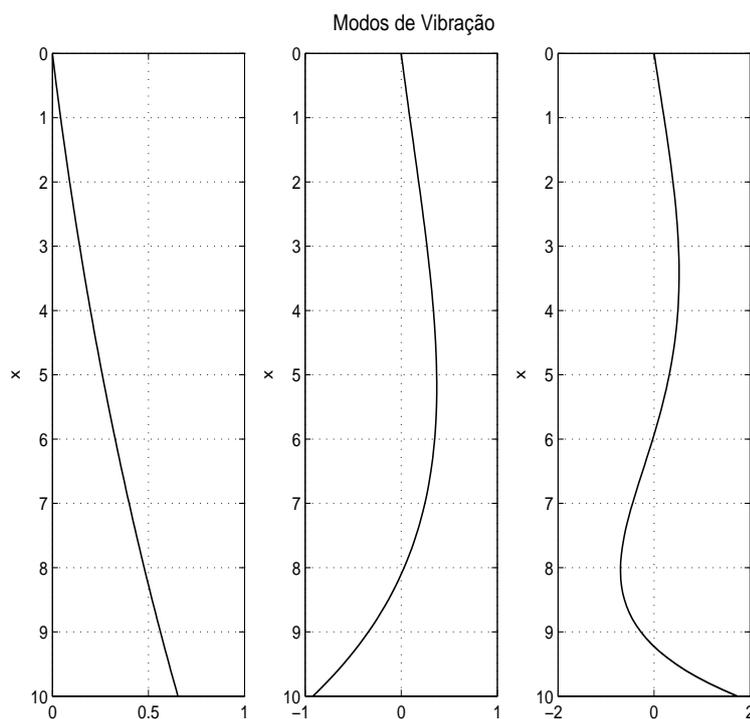


Figura 6.4: Aproximações dos três primeiros modos de vibração pelo Método da Colocação

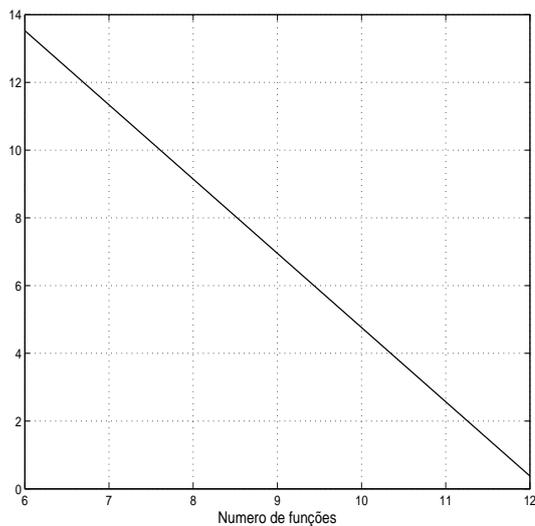


Figura 6.5: Erro da aproximação da terceira frequência natural pelo Método da Colocação x número de funções aproximantes

A representação deste tipo de carregamento, Fig. (6.6(a)), é feita através das distribuições Delta de Dirac: $f(x, t) = f(t)\delta(x - x_1)$, onde $f(t)$ é a intensidade da força no instante t . O termo de carregamento é:

$$F(t) = f(t)\psi_j(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.5.2)$$

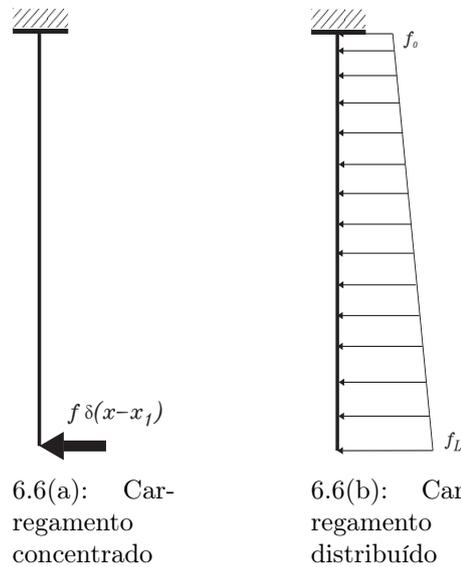


Figura 6.6: Exemplos de carregamento no cabo fixo-livre

- Carregamento distribuído:

Os carregamentos distribuídos e que variam uniformemente ao longo dos pontos de aplicação, conforme Fig. (6.6(b)), podem ser representados por:

$$f(x, t) = \left(\frac{f_L(t) - f_0(t)}{L} \right) x + f_0(t) \quad (6.5.3)$$

onde $f_0(t)$ e $f_L(t)$ são as forças em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, no instante t . Aplicando a Eq. 6.5.1:

$$F(t) = \int_0^L \left[\left(\frac{f_L(t) - f_0(t)}{L} \right) x + f_0(t) \right] \psi(x) dx \quad (6.5.4)$$