

## 5

### Análise Modal

#### 5.1

##### Solução modal

Conceitos importantes para a análise da dinâmica de sistemas tais como os modelados nas seções anteriores serão aqui apresentados, sendo para tal utilizados como referência Hagedorn (12) e Meirovitch (21). Para se chegar até esses conceitos, inicia-se com a solução de um problema através do método conhecido como Método de Bernoulli. Toma-se a equação:

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathcal{K}w = 0, \quad x \in ]0, L[ \quad (5.1.1)$$

Ao se supor:

$$\mu(x) = 1, \quad \mathcal{K} = -c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \implies \text{onde } c = \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad (5.1.2)$$

e ao se definir as condições de contorno e iniciais, chega-se ao problema de um cabo fixo em ambas as extremidades na horizontal:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x \in ]0, L[ \quad (5.1.3)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$w(0, t) = 0, \quad \text{e} \quad w(L, t) = 0 \quad (5.1.4)$$

E condições iniciais:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (5.1.5)$$

Quer se propor uma solução:

$$w(x, t) = T(t)W(x) \quad (5.1.6)$$

Substituindo a solução proposta na Eq. (5.1.3) obtém-se:

$$\frac{\ddot{T}}{T} - c^2 \frac{W'''}{W} = 0 \implies \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{W'''}{W} \quad (5.1.7)$$

Nota-se que cada lado da equação depende de uma variável. Ora, a igualdade só pode ser válida se ambos os lados forem iguais a uma constante, a mesma constante, que será chamada de  $\omega^2$ . Sendo assim, pode-se escrever:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (5.1.8)$$

e

$$W'' + \frac{\omega^2}{c^2} W = 0 \quad (5.1.9)$$

As soluções das equações podem ser escritas da seguinte forma:

$$T(t) = C \cos \omega t + S \sin \omega t \quad (5.1.10)$$

e

$$W(x) = D \cos \frac{\omega x}{c} + H \sin \frac{\omega x}{c} \quad (5.1.11)$$

Sendo  $C, S, D$ , e  $H$  constantes arbitrárias. Começando pela solução de  $W(x)$ , aplica-se as condições de contorno, o que resulta em:

$$D + 0.H = 0 \quad \text{e} \quad \left( \cos \frac{\omega L}{c} \right) D + \left( \sin \frac{\omega L}{c} \right) H = 0$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \frac{\omega L}{c} & \sin \frac{\omega L}{c} \end{bmatrix} \quad (5.1.12)$$

Para se obter uma solução não-trivial o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero, o que gera:

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (5.1.13)$$

que é satisfeita quando  $\omega$ , possui os seguintes valores:

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{L}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (5.1.14)$$

Diz-se que  $\omega_k$  é a  $k$ -ésima frequência circular natural do sistema. Como existem infinitas frequências, existem infinitas soluções  $W$ . Como nota-se que  $D = 0$ ,  $W$  adquire a seguinte forma:

$$W_k(x) = H_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.1.15)$$

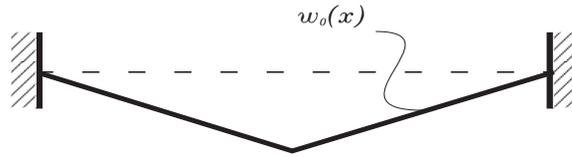


Figura 5.1: Exemplo de condição inicial que não pode ser representada por apenas um modo  $W_k$

e  $k = 0$  é solução trivial, não sendo de interesse por possuir nenhum autovetor associado. Aplicando a mesma metodologia para  $T$  e substituindo  $W_k$  e  $T_k$  na solução proposta obtém-se:

$$w_k(x, t) = (C_k \cos \omega_k t + S_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.1.16)$$

onde foi suposto que  $H_k = 1$  sem perda de generalidade. Logo, o sistema pode vibrar segundo uma das formas dadas pelas Eqs. (5.1.16). Todos os pontos do sistema oscilam com a mesma frequência circular natural  $\omega_k$ . À solução  $w_k$  dá-se o nome de solução modal. Nela o sistema executa movimentos síncronos, onde cada ponto realizam movimentos com a mesma frequência angular. A função  $W_k$  é chamada de  $k$ -ésima autofunção ou função de forma modal e a frequência circular natural  $\omega_k$  de frequência circular modal.

Sejam consideradas as condições iniciais dadas pela Eq. (5.1.5). A Fig. (5.1) mostra um exemplo de condição inicial. É de se notar que um modo  $W_k$  não pode representar isoladamente a condição proposta na figura, porém sendo a equação da onda uma equação linear e as condições de contorno homogêneas, a superposição das  $k$  soluções também formam uma solução. A equação abaixo mostra o resultado da superposição:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) W_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos \omega_k t + S_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (5.1.17)$$

Aplicando-se as condições iniciais na superposição das soluções, as constantes  $C_k$  e  $S_k$  podem ser determinadas.

## 5.2

### Problema de autovalor com coeficientes variáveis

Retoma-se a Eq. (5.1.1):

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathcal{K}w = 0, \quad x \in ]0, L[$$

Porém agora considera-se um operador  $\mathcal{K}$  com coeficientes variáveis na forma:

$$\mathcal{K} = -\rho Ag \frac{\partial}{\partial x} \left[ (L-x) \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (5.2.1)$$

e ainda  $\mu(x) = \rho A$ . Esta é a equação da dinâmica de um cabo fixo-livre, deduzida na seção (2.1). O problema de um cabo fixo-livre é novamente apresentado:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho Ag(L-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.2.2)$$

cujas condições de contorno são:

$$w(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad T(L, t) \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.2.3)$$

e condições iniciais:

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) \quad (5.2.4)$$

onde o coeficiente variável é dado por  $T(x) = A\rho g(L-x)$ .

A solução modal da Eq. (5.1.17) pode ser reescrita na forma (ver Hagedorn (12)):

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (5.2.5)$$

Substituindo-se a solução proposta na Eq. (5.2.5) na equação da dinâmica do problema, obtém-se:

$$\omega^2 W + \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(L-x) \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.2.6)$$

que, junto às condições de contorno impostas, constitui um problema de autovalor. Ao resolvê-lo as funções modais e as frequências modais são encontradas.

Para tal, apresenta-se a função:

$$s(x) = 2\omega \sqrt{\left( \frac{L-x}{g} \right)} \quad (5.2.7)$$

onde  $\tilde{W}(s(x)) = W(x)$ . Das regras de diferenciação:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{d\tilde{W}}{ds} \frac{ds}{dx} = -\tilde{W}' \frac{\omega}{\sqrt{g(L-x)}} \\ \frac{d^2W}{dx^2} &= \frac{d^2\tilde{W}}{ds^2} \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 + \frac{d\tilde{W}}{ds} \frac{d^2s}{dx^2} \\ &= \tilde{W}'' \frac{\omega^2}{g(L-x)} - \tilde{W}' \frac{\omega}{2\sqrt{g(L-x)^3}} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

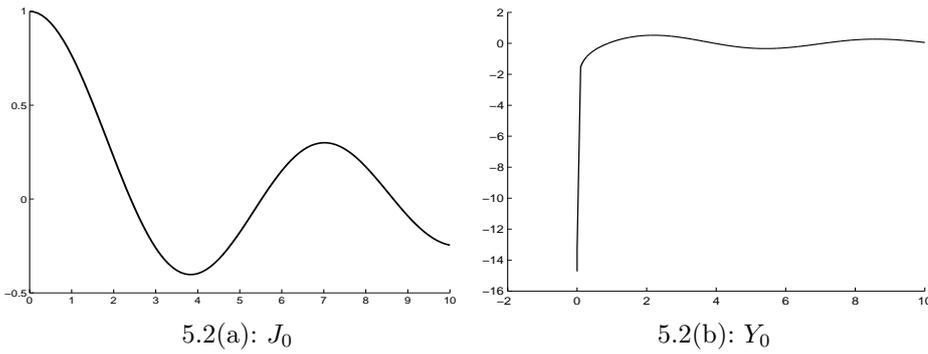


Figura 5.2: Funções de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipo

Usando o resultado acima na Eq. (5.2.6) e simplificando chega-se a:

$$\tilde{W}'' + \frac{1}{s}\tilde{W}' + \tilde{W} = 0, \quad s \in ]0, 2\omega\sqrt{L/g}[ \quad (5.2.9)$$

e:

$$\tilde{W} \left( 2\omega\sqrt{\frac{L}{g}} \right) = 0 \quad (5.2.10)$$

A equação diferencial (5.2.9) é um caso especial da equação de Bessel:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (5.2.11)$$

quando  $n = 0$ . A proposta de solução para este tipo de equação é dada por:

$$\tilde{W}(s) = DJ_0(s) + EY_0(s) \quad (5.2.12)$$

$J_0$  e  $Y_0$  são as funções de Bessel de ordem zero do primeiro e do segundo tipo, respectivamente, e  $D$  e  $E$  são constantes arbitrárias a serem definidas pelas condições de contorno. Ao se observar a função  $Y_0$  na Fig. (5.2(b)), pode-se notar que quando  $s \rightarrow 0$ ,  $Y_0 \rightarrow -\infty$ . Ao se compor a solução utilizando-se  $Y_0$  esta também tenderia a  $-\infty$  na extremidade  $L$  do cabo. Aqui impõe-se um deslocamento finito na extremidade  $x = L$ , obrigando a constante  $E_0$  a ser zero, levando a proposta de solução a:

$$\tilde{W}(s) = DJ_0(s) \quad (5.2.13)$$

Deve-se ainda atender à condição de cabo fixo na extremidade  $W(s(0)) = 0$ , o que leva a:

$$J_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{L}{g}} \right) = 0 \quad (5.2.14)$$

Encontrando-se as raízes da equação acima, que serão notadas por  $\gamma_k$ , encontra-se as frequências circulares naturais:

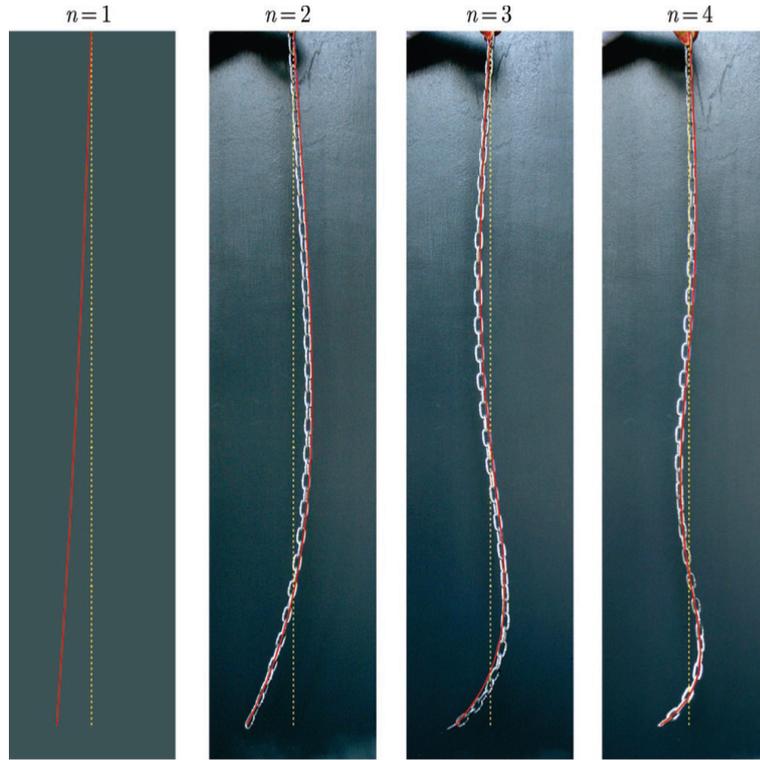


Figura 5.3: Quatro primeiros modos de vibração de uma corrente suspensa. Fotos retiradas do artigo Strings, Chains, and Ropes, de Yong. Ver (30)

$$\omega_k = \frac{\gamma_k}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \implies \begin{cases} \gamma_1 \approx 2,4048 \rightarrow \omega_1 \approx 1.20240 \sqrt{g/L} \\ \gamma_2 \approx 5,5201 \rightarrow \omega_2 \approx 2.76005 \sqrt{g/L} \\ \gamma_3 \approx 8,6537 \rightarrow \omega_3 \approx 4.32685 \sqrt{g/L} \\ \vdots \end{cases} \quad (5.2.15)$$

O  $k$ -ésimo modo em função de  $x$  é dado por:

$$W_k(x) = J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right) \quad (5.2.16)$$

A Fig. (5.3) mostra os quatro primeiros modos de uma corrente fixa-livre. É interessante notar a semelhança entre a figura e as aproximações dos modos obtidas através dos métodos apresentados nos Capítulos (6), (7) e (9).

Conhecendo-se os modos, pode-se escrever:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (C_k \cos \omega_k t + S_k \sin \omega_k t) J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right) \right] \quad (5.2.17)$$

onde as constantes  $C_k$  e  $S_k$  são obtidas pelas condições iniciais, conforme mostrado no exemplo do cabo fixo-fixo na horizontal. Após encontrados  $C_k$  e  $S_k$  chega-se à solução.

O Apêndice B traz as soluções do problema de autovalor de uma placa.

### 5.3 Propriedades dos problemas de autovalor

Para esta seção foram usados como referência Meirovitch (22) e Gould (10).

O problema de autovalor pode ser generalizado. Um operador linear  $L$  aplicado a uma função  $w$  na forma:

$$Lw = A_0(x)w + A_1(x)\frac{dw}{dx} + \dots + A_{2p}(x)\frac{d^{2p}w}{dx^{2p}} \quad (5.3.1)$$

sendo  $A_0, \dots, A_{2p}$  funções, combina linearmente a função  $w$  e suas derivadas até a ordem  $2p$ . Define-se um segundo operador linear  $M$ , similar a  $L$ , porém de ordem  $q < p$ . O problema de autovalor é dado por:

$$Lw = \lambda Mw \quad (5.3.2)$$

Com condições de contorno:

$$B_i w = \lambda C_i w \quad i = 1, \dots, p \quad x = 0 \quad (5.3.3)$$

$$D_i w = \lambda E_i w \quad i = 1, \dots, p \quad x = L \quad (5.3.4)$$

onde  $B_i, C_i, D_i,$  e  $E_i$  são, assim como  $L$  e  $M$ , operadores lineares cuja ordem máxima é  $p - 1$  e  $q - 1$ , respectivamente.

Este problema é resolvido encontrando-se autovalores  $\lambda$  para os quais existem soluções não-triviais  $w$  que satisfaçam a equação diferencial (5.3.2) e as condições de contorno (5.3.3) e (5.3.4). Essas soluções não-triviais são chamadas de autofunções.

Antes de discutir algumas propriedades deste problema, alguns conceitos serão lembrados. Duas funções são ditas ortogonais quando o resultado de um produto interno entre elas (ver Apêndice A para a definição de produto interno) é igual a zero. Um conjunto de funções ortogonais é também um conjunto linearmente independente. Dada a igualdade:

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_n\phi_n = 0 \quad (5.3.5)$$

onde  $\phi_1, \dots, \phi_n$  são as funções de um conjunto e  $c_1, \dots, c_n$  coeficientes, ela somente será verdadeira para um conjunto linearmente independente quando todos os coeficientes forem iguais a zero. Ainda que um conjunto de funções ortogonais seja linearmente independente, a recíproca não é verdadeira.

Dado o conjunto de funções ortogonais  $\phi_1, \phi_2, \dots$  e uma função qualquer  $f$ . Um coeficiente  $a_r$  é obtido para cada uma das operações abaixo:

$$a_r = (f, \phi_r) = \int_0^L f \phi_r dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.3.6)$$

Os coeficientes são conhecidos como os componentes de  $f$  com respeito ao conjunto ortogonal  $\phi_1, \phi_2, \dots$ .

Quer-se medir a distância entre uma função  $f$  e uma aproximação desta por uma combinação linear do subespaço  $\phi_1, \dots, \phi_n$ . Essa medida é dada conforme abaixo:

$$\left\| f - \sum_{r=1}^n a_r \phi_r \right\|^2 = \int_0^L \left( f - \sum_{r=1}^n a_r \phi_r \right)^2 dx \geq 0 \quad (5.3.7)$$

e é chamada de erro quadrático médio. Expandindo a integral:

$$\int_0^L f^2 dx - 2 \sum_{r=1}^n a_r \int_0^L f \phi_r dx + \sum_{r=1}^n a_r^2 = \|f\|^2 - \sum_{r=1}^n a_r^2 \geq 0 \quad (5.3.8)$$

Pode-se concluir que:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{r=1}^n a_r^2 \quad (5.3.9)$$

sendo este resultado conhecido como inequação de Bessel. Como  $\|f\|^2$  independe do número  $r$ :

$$\|f\|^2 \geq \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 \quad (5.3.10)$$

Dentre as aproximações pela combinação linear de um conjunto ortogonal de funções existe a que melhor aproxima a função  $f$ . Essa é aquela que minimiza o erro quadrático médio. Ao se crescer o número  $n$  de funções do espaço utilizado para aproximar a função  $f$ , pode-se tornar o erro menor que um número pequeno e arbitrário qualquer  $\epsilon$ , sendo este espaço então chamado de completo, lembrando que para sê-lo não é necessário que as funções sejam ortogonais. Quando  $n$  tender a infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad (5.3.11)$$

As funções do espaço de solução do problema definido pelas Eqs. (5.3.2-5.3.4) devem possuir derivada de ordem 0 até  $2p$  e atender às condições de contorno impostas. Neste trabalho, esse espaço é notado por  $\mathcal{H}_C^{2p}$ , sendo o sobrescrito para indicar a ordem da derivada da função que deve possuir energia finita e o subscrito  $C$  indicando que as funções pertencentes a esse espaço atendem às condições de contorno. Às funções pertencentes a esse espaço dá-se o nome de funções comparação, ainda que não sejam todas autofunções do problema de autovalor. A definição de energia finita da derivada de ordem  $p$  é dada por:

$$\int_0^L \left( \frac{d^p f}{dx^p} \right)^2 dx < \infty \quad (5.3.12)$$

As condições impostas ao problema são divididas em geométricas e naturais. As condições geométricas (também conhecidas como essenciais ou cinemáticas) são aquelas de derivadas de ordem até  $p - 1$ . São conhecidas como tal por em problemas de mecânica estrutural imporem restrições no deslocamento e nas rotações. Às de derivadas de ordem  $p$  a  $2p - 1$  dá-se o nome de condições naturais (também conhecidas por de força ou dinâmica) e são assim denominadas por em problemas de mecânica estrutural corresponderem a restrições nas forças e nos momentos.

Espaços que, além de atenderem aos requisitos de energia finita, atendem somente às condições de contorno essenciais serão aqui notados por  $\mathcal{H}_E$ .

Voltando ao problema de autovalores, para que a exposição do que virá seja facilitada, toma-se um problema de autovalor menos geral e mais simplificado dado abaixo:

$$Lw = \lambda mw, \quad 0 < x < L \quad (5.3.13)$$

e condições de contorno:

$$B_i w = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad x = 0 \quad (5.3.14)$$

$$C_i w = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad x = L \quad (5.3.15)$$

sendo  $m$  uma constante qualquer.

Dado o produto interno:

$$(u, Lv) = \int_0^L uLv dx \quad (5.3.16)$$

O operador é dito autoadjunto quando (ver Apêndice A):

$$(u, Lv) = (Lu, v) \quad (5.3.17)$$

A classe dos operadores autoadjuntos possui importantes propriedades. Talvez a mais importante delas seja a ortogonalidade das autofunções, que pela sua importância será provada. Considere duas soluções para o problema de autovalor dado pelas Eqs. (5.3.13-5.3.15), que serão diferenciadas por  $(W_j, \lambda_j)$

e  $(W_k, \lambda_k)$  conforme abaixo:

$$LW_j = \lambda_j mW_j \quad (5.3.18)$$

$$LW_k = \lambda_k mW_k \quad (5.3.19)$$

Multiplicando-se a primeira equação por  $W_k$ , a segunda por  $W_j$  e integrando-se ambas, obtém-se:

$$\int_0^L W_k LW_j dx = \lambda_j \int_0^L mW_j W_k dx \quad (5.3.20)$$

$$\int_0^L W_j LW_k dx = \lambda_k \int_0^L mW_j W_k dx \quad (5.3.21)$$

e, ao se subtrair uma da outra:

$$\int_0^L W_k LW_j dx - \int_0^L W_j LW_k dx = (\lambda_j - \lambda_k) \int_0^L mW_j W_k dx \quad (5.3.22)$$

Pela definição de sistemas autoadjuntos dada pela Eq. (5.3.17) o lado esquerdo da equação é então zero e, supondo que os autovalores  $\lambda_j$  e  $\lambda_k$  sejam distintos, então:

$$\int_0^L mW_j W_k dx = 0 \quad (5.3.23)$$

Por ser a equação acima um produto interno na forma  $(f, g) = \int_D mfgdD$  e sendo o resultado deste produto interno 0, fica provada a ortogonalidade de duas autofunções correspondentes a autovalores distintos de sistemas autoadjuntos. Pode-se afirmar que o conjunto de autofunções formam um espaço completo. Sendo completo, pode-se expandir qualquer função  $w$ , com  $Lw$  contínuo por:

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} a_j W_j \quad (5.3.24)$$

sendo os coeficientes dados por:

$$a_j = \int_0^L mwW_j dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.3.25)$$

este é o conhecido Teorema da Expansão, que será mostrado na próxima seção.

Ainda que se possa expandir a solução em termos das autofunções, outro conjunto de funções ortogonais também poderiam ser usado. A importância de as autofunções serem ortogonais será entendida no Capítulo (8) sobre redução de modelos.

Problemas de autovalor como o do cabo fixo-livre pertencem a uma classe de problemas conhecidos como Problema de autovalor de Sturm-Liouville, que

é definido pelo problema:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0 \quad (5.3.26)$$

e condições de contorno:

$$\alpha_1\phi(a) + \alpha_2 \frac{d\phi}{dx}(a) = 0 \quad (5.3.27)$$

$$\beta_1\phi(b) + \beta_2 \frac{d\phi}{dx}(b) = 0 \quad (5.3.28)$$

sendo  $p$ ,  $\sigma$  e  $q$  funções contínuas e  $p(x) > 0$  e  $q(x) > 0$  no domínio  $x \in [a, b]$  e

$\alpha_i$  e  $\beta_i$  parâmetros constante. Uma outra forma de se escrever a Eq. (5.3.26) e que torna mais evidente o problema de autovalor é:

$$L\phi = -\lambda\phi \quad (5.3.29)$$

onde,

$$L = \sigma^{-1} \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right] \quad (5.3.30)$$

A principal característica deste problema está no fato de o operador  $L$  ser autoadjunto, o que leva a:

- Autovalores reais;
- Uma autofunção está associada a somente um autovalor;
- Ortogonalidade das autofunções;
- Autofunções formam um espaço completo.

Como último lembrete, ainda que o problema de autovalor tenha sido aqui apresentado no caso unidimensional, as mesmas propriedades se aplicam a problemas de outras dimensões.

## 5.4

### Teorema da expansão

Sendo então que as autofunções de um sistema autoadjunto são ortogonais e conseqüentemente o produto interno entre autovetores distintos é igual a zero, conforme o produto interno:

$$\langle \mu W_j, W_k \rangle = \int_0^L \mu W_j W_k dx = 0 \quad (5.4.1)$$

onde  $\mu$  é uma função de ponderação. Ao se ortonormalizar os autovetores, a relação vira:

$$\int_0^L \mu(x) W_j W_k = \delta_{jk} \quad (5.4.2)$$

já que o produto interno entre autovetores iguais e normalizados é igual a um, sendo  $\delta_{jk}$  o Delta de Kronecker. Substituindo o resultado acima na equação do problema de autovalor:

$$-\omega^2 \mu(x)W(x) + \mathcal{K}[W(x)] = 0 \quad (5.4.3)$$

e lembrando que ( $\omega^2 = \lambda$ ), obtém-se:

$$\int_0^L W_k L[W_j] dx = \lambda_j \delta_{jk} \quad (5.4.4)$$

Com esse resultado, uma nova forma de solução é apresentada. Propõe-se uma solução do tipo:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k(t)W_k(x) \quad (5.4.5)$$

que é uma expansão em termos das autofunções  $W_k$  e as coordenadas modais  $a_k$ . Ao se substituir essa solução na equação diferencial (5.2.2), utilizando-se da Eq. (5.4.3) e considerando o fato de  $L$  ser um operador linear, a seguinte expressão é obtida:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} [\ddot{a}_k(t) + \omega_k^2 a_k(t)] \mu(x)W_k(x) = 0 \quad (5.4.6)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação por  $W_j$  e integrando no domínio, a ortogonalidade entre as autofunções leva a:

$$\ddot{a}_j(t) + \omega_j^2 a_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.4.7)$$

As soluções do conjunto de equações acima podem ser representadas por:

$$a_j(t) = C_j \cos \omega_j t + S_j \sin \omega_j t \quad (5.4.8)$$

que substituindo na solução proposta leva finalmente a:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_j \cos \omega_j t + S_j \sin \omega_j t) W_k(x) \quad (5.4.9)$$

Essa solução coincide com a primeira obtida neste trabalho pelo método de Bernoulli. O teorema da expansão estabelece que a solução pode ser escrita como uma expansão em termos das autofunções obtidas pela resolução do problema de autovalor, ou seja, essas autofunções servem de base para o espaço das soluções.