

## 2

### Formulação forte de um sistema dinâmico

As duas seções deste capítulo apresentam o que é conhecido como formulação forte de um sistema dinâmico através do desenvolvimento de dois casos: o primeiro de um cabo suspenso, fixo em uma extremidade e livre na outra, e o segundo de uma placa retangular. As propriedades consideradas nos exemplos serão mantidas quando estes mesmos sistemas forem abordados nos capítulos subsequentes. Como referência para este texto foram consultados (Hagedorn (12), Reddy (24) e Soedel (27)).

#### 2.1

##### Formulação forte de um cabo fixo-livre

Cabos não transmitem nem resistem a momento. Na formulação aqui proposta, supõe-se que o movimento é plano, sendo os movimentos longitudinais desconsiderados. Outras importantes hipóteses são:

- Pequenos deslocamentos;
- Pequenas deformações;
- Área da seção transversal constante;
- Propriedades do material constantes ao longo do cabo.

Considere o segmento de  $(x, x + \Delta x)$  de um cabo conforme ilustrado na figura abaixo:

onde,

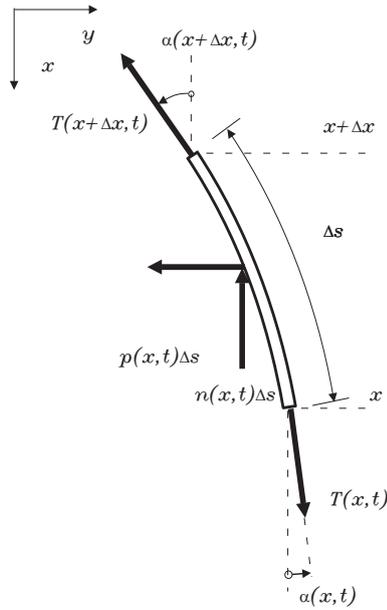


Figura 2.1: Segmento de cabo

- $\Delta s$  = comprimento deformado;
- $T(x, t)$  = força no cabo na posição  $x$  e instante  $t$ ;
- $T(x + \Delta x, t)$  = força no cabo na posição  $(x + \Delta x)$  e instante  $t$ ;
- $p(x, t)$  = força por unidade de comprimento na direção  $y$  (direção do movimento);
- $n(x, t)$  = força por unidade de comprimento na direção  $x$ ;
- $\alpha$  = ângulo entre a tangente ao cabo e o eixo  $x$ ;
- $w(x, t)$  = deslocamento transversal ao comprimento do cabo ( $y$ ), na posição  $x$ , no instante  $t$ ;
- $\Delta m$  = massa do segmento;
- $L$  = comprimento do cabo.

Pode-se escrever o somatório de forças na direção  $x$ , não se levando em conta a inércia nesta direção:

$$T(x + \Delta x, t)\cos[\alpha(x + \Delta x, t)] - T(x, t)\cos[\alpha(x, t)] + n(x, t)\Delta s = 0 \quad (2.1.1)$$

Dividindo-se por  $\Delta x$  e fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}[T(x, t)\cos\alpha(x, t)] = -n(x, t)\frac{ds}{dx} \quad (2.1.2)$$

Da trigonometria obtém-se as seguintes relações:

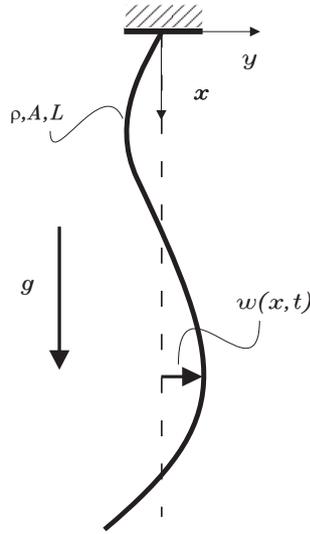


Figura 2.2: Cabo fixo-livre

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} \implies \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad (2.1.3)$$

Substituindo na Eq. (2.1.2) as relações acima e considerando  $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$  (pequenos deslocamentos e deformações), chega-se à equação abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x, t) = -n(x, t) \quad (2.1.4)$$

Considerando-se um cabo na vertical, conforme ilustrado na figura (2.2), há de se tomar em conta a gravidade, isto é,  $n(x, t) = \rho(x)A(x)g$ , onde  $\rho$  é a densidade do cabo,  $A$  é a área da seção transversal em  $x$  e  $g$  a gravidade.

O cabo encontra-se fixo em uma extremidade e livre na outra. Usando a segunda condição tem-se que  $T(L) = 0$  e, considerando  $A$  e  $\rho$  constantes, pode-se levar a Eq. (2.1.4) a:

$$T(x) = \rho Ag(L - x) \quad (2.1.5)$$

Assim como a dinâmica na direção  $x$  do cabo pôde ser estudada, o mesmo pode ser feito para a dinâmica na direção  $y$ . Aplica-se a a segunda lei de Newton para o mesmo segmento de cabo:

$$\Delta m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x + \theta \Delta x, t) = T(x + \Delta x) \text{sen}[\alpha(x + \Delta x, t)] - T(x) \text{sen}[\alpha(x, t) + p(x, t) \Delta s] \quad (2.1.6)$$

onde  $\Delta m$  é a massa do segmento e  $\theta \in [0, 1]$ . Supor novamente  $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$ , fará com que  $\text{sen} \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ . Usando esta consideração na equação acima e

que  $\Delta m = \rho(x)A(x)\Delta s$ , dividindo-a por  $\Delta x$  e levando este a 0, obtém-se:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = p(x, t) \quad (2.1.7)$$

onde  $\rho$  e  $A$  foram considerados constantes ao longo de  $x$  e, conforme baseado em considerações anteriores,  $\frac{ds}{dx} \approx 1$ .

Substituindo a equação (2.1.5) na equação acima, chega-se à equação da dinâmica e o problema do cabo fixo-livre pode ser apresentado:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A g (L - x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = p(x, t) \quad (2.1.8)$$

cujas condições de contorno são:

$$w(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad T(L, t) \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.9)$$

e condições iniciais:

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) \quad (2.1.10)$$

Ao conjunto de equação diferencial da dinâmica, condições de contorno e condições iniciais dá-se o nome de formulação forte do problema.

## 2.2

### Formulação forte de uma placa

Placas possuem espessura muito menor do que o comprimento e a largura. Por resistirem a momento nas duas dimensões, são comparadas a vigas. Este trabalho se interessa por elas dada a sua ampla aplicação em estruturas da engenharia mecânica. Inicialmente, a equação da dinâmica será encontrada através de uma formulação newtoniana, para movimentos transversais de baixa amplitude para uma placa que resiste infinitamente a cisalhamento transversal.

Supõe-se um plano neutro na placa localizado no meio da espessura. Por resistir infinitamente a cisalhamento transversal, ao se deformar a placa, os pontos situadas em uma normal ao plano neutro antes da deformação permanecem em uma normal ao plano neutro deformado. Na teoria de vigas essa hipótese é conhecida como de Euler-Bernoulli, enquanto que na teoria de placas como de Kirchhoff. Com essas considerações, a deformação da linha neutra representará a deformação da placa.

Considere a Fig. (2.3(a)). Ela representa o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de placa, onde o plano neutro encontra-se no plano

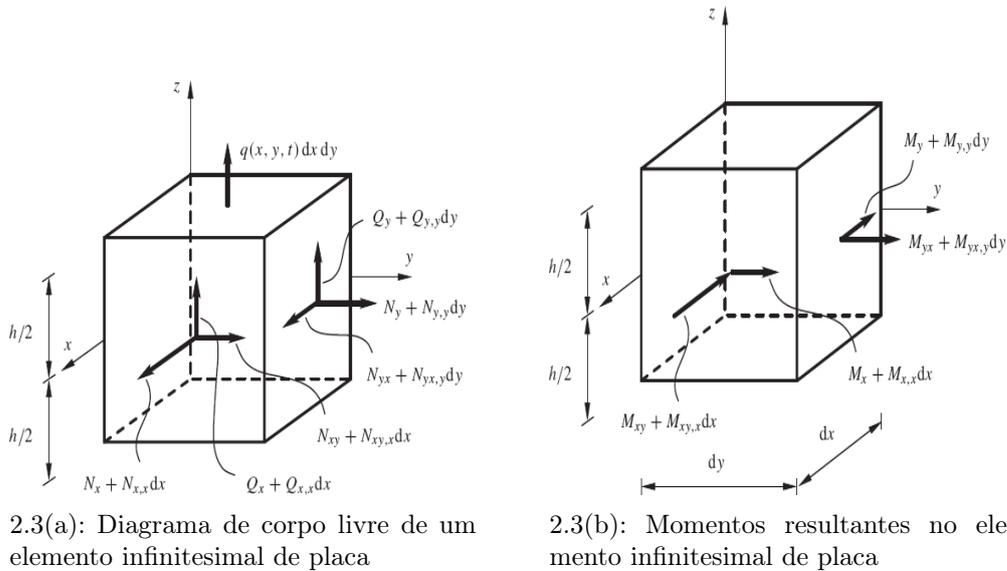


Figura 2.3: Elemento infinitesimal de placa

x-y. Para se trabalhar em apenas duas dimensões, as tensões são integradas ao longo da espessura, como mostrado abaixo:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz, \quad (2.2.1)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz, \quad (2.2.2)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \quad (2.2.3)$$

onde  $N$  é a tensão resultante normal,  $Q$  a tensão resultante de cisalhamento,  $M$  o momento resultante e  $z$  a coordenada em  $z$  do ponto. A tensão e o momento resultante possuem unidade de força por unidade de comprimento e de momento por unidade de comprimento, respectivamente. A tensão  $\sigma_{zz}$  nas superfícies superiores e inferiores é zero e será assim considerada ao longo da espessura, assim como os carregamentos em  $z$  serão pequenos. Os momentos resultantes podem ser visualizados na Fig. (2.3(b)).

Quando não ocorrerem forças no plano, as tensões normais resultantes  $N_x, N_y$  e  $N_{xy}$  serão iguais a zero. As tensões flexionais são então calculadas através da Lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}], \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}], \quad \text{e} \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_{xy} \quad (2.2.4)$$

A tensão resultante de cisalhamento é encontrada pelo balanço de mo-

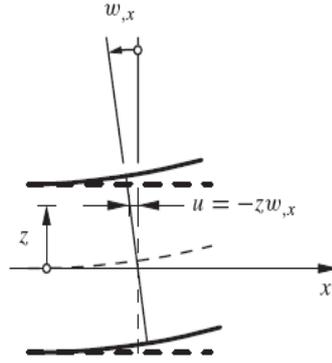


Figura 2.4: Deslocamento no plano ao longo do eixo x

mento, já que conforme descrito, a placa deste modelo resiste infinitamente a cisalhamento transversal e, sendo assim,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  são iguais a zero, não sendo possível obter  $Q_x$  e  $Q_y$  através da teoria da elasticidade.

Em seguida, as deformações são associadas ao campo de deslocamento transversal  $w(x, y, t)$ . Porém antes, da Fig. (2.4) e considerando a mesma representação da figura para o eixo y, pode-se deduzir a relação entre os campos de deslocamento no plano  $u(x, y, z, t)$  e  $v(x, y, z, t)$  conforme abaixo:

$$u(x, y, z, t) = -zw_{,x}(x, y, t) \quad \text{e} \quad v(x, y, z, t) = -zw_{,y}(x, y, t) \quad (2.2.5)$$

onde  $_{,x}$  denota a derivada em relação a  $x$ . Agora sim, pode-se fazer a associação desejada entre as deformação e o campo de deslocamento transversal:

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} = -zw_{,xx}(x, y, t), \quad (2.2.6)$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y} = -zw_{,yy}(x, y, t), \quad (2.2.7)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) = -zw_{,xy}(x, y, t), \quad (2.2.8)$$

$$\epsilon_{xz} = 0, \quad (2.2.9)$$

$$\epsilon_{yz} = 0 \quad (2.2.10)$$

Substituindo-se as equações acima nas equações da Lei de Hooke e o resultado na Eq. (2.2.3) chega-se às expressões que relacionam os momentos aos deslocamentos transversais, dadas abaixo:

$$M_x = -D_E[w_{,xx} + \nu w_{,yy}], \quad (2.2.11)$$

$$M_y = -D_E[w_{,yy} + \nu w_{,xx}], \quad (2.2.12)$$

$$M_{xy} = -D_E(1 - \nu)w_{,xy} \quad (2.2.13)$$

sendo

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.2.14)$$

Aplica-se a segunda Lei de Newton para o movimento transversal, ao que se obtém:

$$\rho h w_{,tt} = Q_{x,x} + Q_{y,y} + q(x, y, t) \quad (2.2.15)$$

onde  $q(x, y, t)$  o carregamento externo no eixo  $z$ . Fazendo o mesmo com os momentos:

$$I w_{,xtt} = -M_{x,x} - M_{xy,y} + Q_x \quad (2.2.16)$$

$$I w_{,ytt} = -M_{y,y} - M_{xy,x} + Q_y \quad (2.2.17)$$

onde  $w_{,xtt}$  e  $w_{,ytt}$  são as acelerações angulares sobre o eixo  $y$  e  $x$ , respectivamente, e  $I$  o momento de inércia por unidade de área da placa, dado por:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \quad (2.2.18)$$

Isolando-se  $Q_x$  e  $Q_y$  na Eqs. (2.2.16) e (2.2.17) e substituindo-se o resultado na Eq. (2.2.15) chega-se a equação:

$$\rho h w_{,tt} - I(w_{,xxtt} + w_{,yytt}) - (M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) = q(x, y, t) \quad (2.2.19)$$

Chega-se finalmente à equação de dinâmica da placa quando as relações entre momento e deslocamento dadas pelas Eqs. (2.2.11)-2.2.13 são substituídas na equação acima:

$$\rho h w_{,tt} - I \nabla^2 w_{,tt} + D_E \nabla^4 w = q(x, y, t) \quad (2.2.20)$$

sendo,

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.2.21)$$

O modelo acima é conhecido como modelo de placa de Kirchhoff-Rayleigh. Caso o termo  $I \nabla^2 w_{,tt}$  seja desconsiderado (o que pode ser feito para placas finas (ver Liew (18))) chega-se ao modelo de placa de Kirchhoff, podendo-se formular o problema:

$$\rho h w_{,tt} + D_E \nabla^4 w = q(x, y, t) \quad (2.2.22)$$

No caso de uma placa simplesmente apoiada de comprimento  $a$  e largura  $b$  as condições de contorno são dadas por:

$$w|_{x=0,a} = 0 \quad w|_{y=0,b} = 0 \quad w_{,xx}|_{x=0,a} = 0 \quad w_{,yy}|_{y=0,b} = 0 \quad (2.2.23)$$

As condições iniciais são:

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) \quad (2.2.24)$$

Quando a placa é engastada em uma de suas extremidades as condições de contorno são:

$$w|_{x=0,a} = 0 \quad w|_{y=0,b} = 0 \quad w_{,y}|_{x=0,a} = 0 \quad w_{,x}|_{y=0,b} = 0 \quad (2.2.25)$$

E, por fim, quando uma das extremidades é livre, por exemplo  $a$ , essas serão descritas por:

$$M_x|_{x=a} = 0 \quad V_x = (Q_x + M_{xy,y})|_{x=a} = 0 \quad (2.2.26)$$