

Referências Bibliográficas

- [1] BANACH, S. *Mechanics*. Warszawa, 1951.
- [2] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [3] BELLOMO, N., LODS, B., REVELLI, R., AND RIDOLFI, L. *Generalized Collocation Methods: Solutions to Nonlinear Problems*. Birkh 2008.
- [4] BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, Inc, 2000.
- [5] BRUNNER, H. *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] CALFEM. *A Finite Element Toolbox to MATLAB, Version 3.3*. Department of Mechanics and Materials, Lund University, 1999.
- [7] DHATT, G., AND TOUZOT, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Prentice Hall, 1984.
- [8] DONALDSON, B. K. *Introduction to Structural Dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] FELLIPA, C. A. Introduction to finite element methods (asen 5007). *Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder* (2008).
- [10] GOULD, S. H. *Variational Methods for Eigenvalue Problems - An Introduction to The Weinstein Method of Intermediate Problems*. Oxford University Press, 1966.
- [11] GOURGOULHON, E. An introduction to polynomial interpolation. *School on Spectral Methods: Application to General Relativity and Field Theory*, 2005.
- [12] HAGEDORN, P., AND DASGUPTA, A. *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [13] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.

- [14] JOHNSON, S. G. Notes on function spaces, hermitian operators, and fourier series. *MIT Applied Mathematics* (2007).
- [15] KOMZSIK, L. *Applied Calculus of Variations for Engineers*. CRC Press, 2009.
- [16] LEE, J., AND SCHULTZ, W. W. Eigenvalue analysis of timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration* 609-621 (2004).
- [17] LEMONS, D. S. *Perfect Form - Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*. Princeton University Press, 1997.
- [18] LIEW, K. M., WANG, C. M., XIANG, Y., AND KITIPORNCHAI, S. *Vibration of Mindlin Plates*. Elsevier, 1998.
- [19] MASON, J. C., AND HANDSCOMB, D. C. *Chebyshev Polynomials*. Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [20] MEIROVITCH, L. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [21] MEIROVITCH, L. *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, 1997.
- [22] MEIROVITCH, L. *Fundamentals of Vibrations*. McGraw Hill, 2001.
- [23] PRENTER, P. M. *Splines and Variational Methods*. John Wiley & Sons, 1989.
- [24] REDDY, J. N. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [25] RITTO, T. G., AND SAMPAIO, R. Introdução à análise de vibrações de estruturas flexíveis. *Apostila de Aula, PUC-Rio* (2010).
- [26] SAMPAIO, R., AND RITTO, T. G. Short course on dynamics of flexible structures deterministic and stochastic analysis. *Seminar on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling* (2008).
- [27] SOEDEL, W. *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, Inc, 2005.
- [28] STRANG, G. *Linear Algebra and its Applications*. Thomson Learning, Inc, 1988.
- [29] STRANG, G., AND FIX, G. J. *An Analyses of the Finite Element Method*. Prentice Hall, 1973.

- [30] YONG, D. Strings, chains, and ropes. *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2006).
- [31] ZIENKIEWICZ, C. O., AND TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, 2005.

A Básico de Álgebra Linear

A maior parte dos temas estudados neste trabalho utilizam conceitos importantes da Álgebra Linear aplicados a funções. É sabido que a teoria aplicável a vetores e matrizes se estende a essas. Alguns deles serão brevemente discutidos nesta seção.

Produto interno

Um produto interno atende às seguintes propriedades:

1. $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$;
2. $\langle \alpha x_1, x_2 \rangle = \alpha \langle x_1, x_2 \rangle$;
3. $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle$;
4. $\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0$, $\langle x_1, x_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ e/ou $x_2 = 0$

onde $\langle x_1, x_2 \rangle$ define o produto interno entre x_1 e x_2 e α é uma constante arbitrária. Um exemplo de produto interno é dado abaixo:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \mu(x) f(x) g(x) dx \quad (\text{A.0.1})$$

onde $\mu(x)$ é uma função de ponderação. Este produto interno é usado em diversas partes deste trabalho. Um exemplo ainda mais simples seria:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad (\text{A.0.2})$$

Dois vetores ou funções são ortogonais quando um produto interno entre eles é igual a zero.

Norma de uma função

Da definição de produto interno, emerge o conceito de norma de uma função que quantifica o tamanho desta, sendo dada por:

$$\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \quad (\text{A.0.3})$$

Como a definição da Eq. (A.0.2) que foi usada para exemplificar o conceito de norma não é a única que atende às propriedades do produto interno, diversas outras normas poderiam ser enumeradas. Sendo assim, outras normas

também podem ser definidas. A combinação de um espaço vetorial completo e um produto interno é chamada de espaço de Hilbert.

Operador linear

A operação linear $y = Bx$ produz, dado um vetor x , um vetor y no mesmo espaço vetorial, sendo a matriz B chamada de operador linear. O mesmo tipo de operador também pode ser definido para funções. Como exemplo estão as derivadas e integrais. $Af = df/dx = f'$ ou $Af = \int_0^x f'dx'$ produzem novas funções (excluindo alguns casos de funções não diferenciáveis ou integrais que não convergem ou não existem). Para que o operador seja linear requer-se que $A[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha Af_1 + \beta Af_2$.

Adjunto

A definição de adjunto B^H de uma matriz pode ser dada simplesmente como sendo o conjugado complexo de sua transposta. Uma definição mais abrangente deve ser dada para que se incluam os operadores lineares de funções, sendo dada por:

$$f [Ag] = [A^H f] g \quad (\text{A.0.4})$$

Se for tomado como exemplo o operador d/dx , qual seria então o seu adjunto? Da definição acima, escreve-se:

$$\begin{aligned} f \left[\frac{d}{dx} g \right] &= \int_0^1 f g' dx = f g \Big|_0^1 - \int_0^1 f' g dx \\ &= - \int_0^1 f' g dx = \left[-\frac{d}{dx} f \right] g \quad (\text{A.0.5}) \end{aligned}$$

lembrando as condições de contorno $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ e que as funções são reais. Da equação acima e de (A.0.4) conclui-se que o adjunto de d/dx é $-d/dx$. Assim como com as normas, o adjunto também dependerá do produto interno escolhido e ainda do espaço de funções.

Operador autoadjunto

Quando o adjunto do operador é igual ao operador ($A = A^H$), a este dá-se o nome de operador autoadjunto ou hermitiano, que é análogo no caso de matrizes às matrizes simétricas $B = B^T$. Abaixo um exemplo de operador autoadjunto:

$$\begin{aligned}
 f \left[\frac{d^2}{dx^2} g \right] &= \int_0^1 f g'' dx = f g' \Big|_0^1 - \int_0^1 f' g' dx \\
 &= - \int_0^1 f' g dx = -f' g \Big|_0^1 + \int_0^1 f'' g dx \\
 \int_0^1 f'' g dx &= \left[\frac{d^2}{dx^2} f \right] g \quad (\text{A.0.6})
 \end{aligned}$$

ou seja $(d^2/dx)^H = (d^2/dx)$

Autofunção

A definição de autofunção é dada por $Af(x) = \lambda f(x)$. Para o operador autoadjunto como d^2/dx^2 , quer se conhecer f e λ para $f''(x) = \lambda f(x)$, ou seja, qual função possui a segunda derivada igual à uma constante vezes ela mesma. Uma função que satisfaz é:

$$f_n = \text{sen}(n\pi x) \quad \text{sendo que} \quad \lambda_n = -(n\pi)^2 \quad (\text{A.0.7})$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Assim como as matrizes simétricas possuem os autovalores reais, também o possuirão os operadores hermitianos. Uma importante propriedade que se estende à esses operadores, diz respeito às suas autofunções. Observe abaixo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx &= \int_0^1 \frac{\cos[(n-m)\pi x] - \cos[(n+m)\pi x]}{2} dx \\
 &= \left(\frac{\text{sen}[(n-m)\pi x]}{2(n-m)\pi} - \frac{\text{sen}[(n+m)\pi x]}{2(n+m)\pi} \right) \Big|_0^1 = 0 \quad (\text{A.0.8})
 \end{aligned}$$

Não por acaso o produto interno entre as duas autofunções é igual a zero. O produto interno das autofunções de um operador hermitiano será sempre igual a zero, como acontece com as matrizes simétricas. Este é um resultado de grande importância para este trabalho.

B Vibração de uma placa retangular

Considere a equação da placa de Kirchhoff dada abaixo:

$$\rho h w_{,tt} + D_E \nabla^4 w = 0 \quad (\text{B.0.1})$$

Propõe-se a solução modal na forma:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (\text{B.0.2})$$

onde ω é a frequência natural. Substituindo a proposta de solução na Eq. (B.0.1), chega-se à equação abaixo, escrita na forma do operador:

$$(\nabla^4 - \gamma^4)W(x, y) = (\nabla^2 + \gamma^2)(\nabla^2 - \gamma^2)W(x, y) = 0 \quad (\text{B.0.3})$$

onde $\gamma = \omega^2 \rho h / D$. A forma acima permite escrever:

$$(\nabla^2 + \gamma^2)W_1 = 0 \quad (\text{B.0.4})$$

$$(\nabla^2 - \gamma^2)W_2 = 0 \quad (\text{B.0.5})$$

Como γ^2 é constante, demonstra-se que a solução da equação acima e logo da Eq. (B.0.3) é:

$$W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y) \quad (\text{B.0.6})$$

Iniciando pela solução da Eq. (B.0.4), esta é reconhecida como uma equação de Helmholtz, cuja solução é:

$$W_1(x, y) = A_1 \text{sen } \alpha x \text{ sen } \beta y + A_2 \text{sen } \alpha x \text{ cos } \beta y + \\ A_3 \text{cos } \alpha x \text{ sen } \beta y + A_4 \text{cos } \alpha x \text{ cos } \beta y \quad (\text{B.0.7})$$

onde A_i são constantes a serem determinadas e $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Já para solução da Eq. (B.0.5) começa-se assumindo uma solução separável da forma:

$$W_2(x, y) = X(x)Y(y) \quad (\text{B.0.8})$$

que substituindo na Eq. (B.0.5) leva a:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \gamma^2 = 0 \quad (\text{B.0.9})$$

Uma solução não trivial existe se e somente se:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \bar{\alpha}^2 \implies \frac{d^2 X}{dx^2} - \bar{\alpha}^2 X = 0 \quad (\text{B.0.10})$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \bar{\beta}^2 \implies \frac{d^2 Y}{dy^2} - \bar{\beta}^2 Y = 0 \quad (\text{B.0.11})$$

onde $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = \gamma^2$. As soluções das equações acima são dadas por:

$$X(x) = C_1 \sinh \bar{\alpha} x + C_2 \cosh \bar{\alpha} x \quad (\text{B.0.12})$$

$$Y(y) = C_3 \sinh \bar{\beta} y + C_4 \cosh \bar{\beta} y \quad (\text{B.0.13})$$

que substituindo na Eq. (B.0.8) e então na Eq. (B.0.6) leva à solução $W(x, y)$, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y + \\ & A_3 \cos \alpha x \sin \beta y + A_4 \cos \alpha x \cos \beta y + \\ & A_5 \sinh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\beta} y + A_6 \sinh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\beta} y + \\ & A_7 \cosh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\beta} y + A_8 \cosh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\beta} y \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

As constantes A_1 a A_8 são determinadas através das condições iniciais. Por exemplo, placas simplesmente apoiadas com condições de contorno dadas pelas Eqs. (2.2.23) possuem a seguinte solução:

$$W(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{(m,n)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin [t\pi^2 \omega_{(m,n)} + \psi_{(m,n)}] \quad (\text{B.0.15})$$

onde a frequência $\omega_{(m,n)}$ é dada por:

$$\omega_{(m,n)} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D_E}{\rho h}} \quad (\text{B.0.16})$$

e $A_{(m,n)}$ e $\psi_{(m,n)}$ são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais.

Demonstra-se que as autofunções do problema de autovalor de uma placa engastada ou simplesmente apoiada em seus contornos são ortogonais.

C

Manual de utilização dos programas

Este apêndice inclui o manual de utilização dos programas citados neste trabalho:

São eles:

1. *Ritz_Galerkin_cabo*
2. *Colocacao_cabo* e *Colocacao_cabo_Chebyshev*
3. *MEF_cabo*
4. *MEF_placa*
5. *Cond_cont_col*

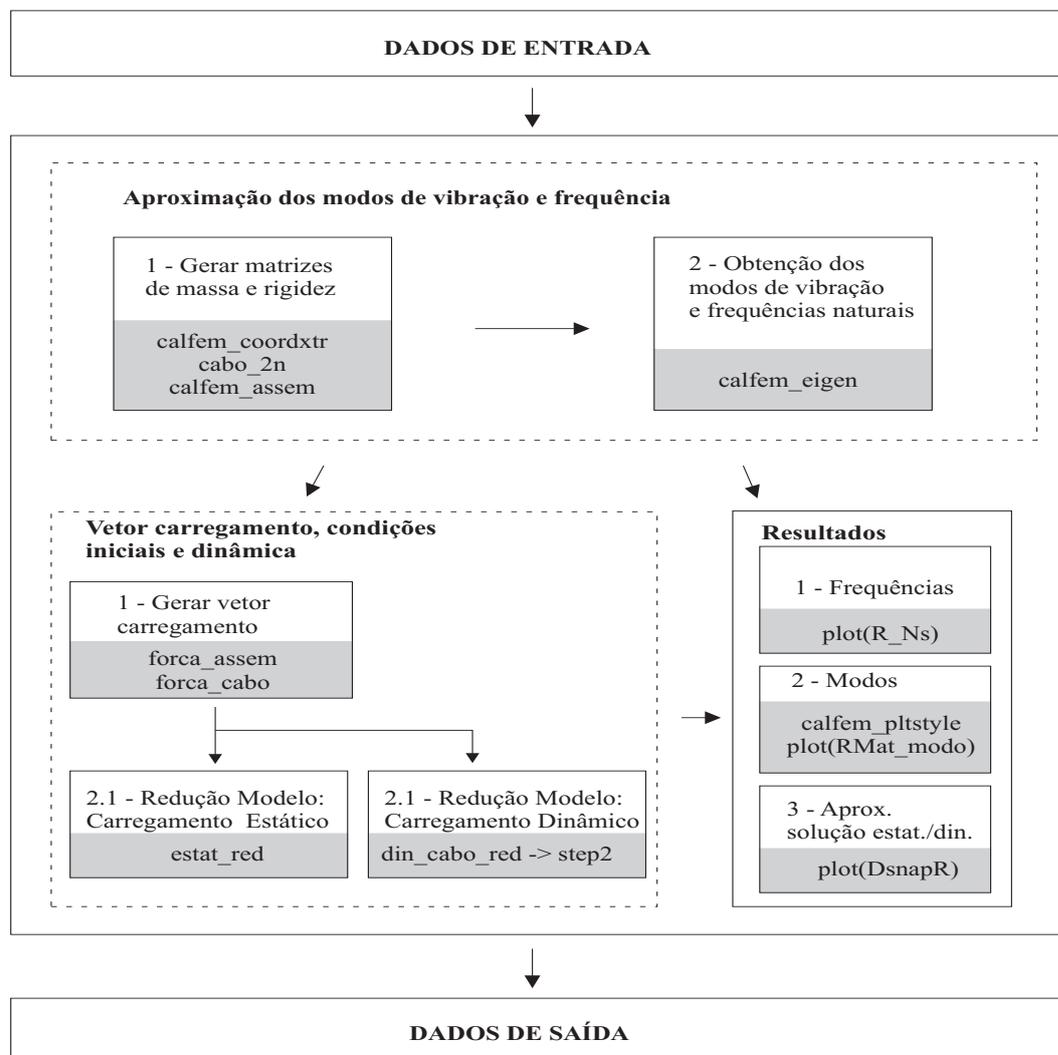
C.1
MEF_cabo

Propósito:

Este programa aproxima os modos de vibração e as frequências naturais de um cabo fixo na vertical através do MEF, para uma precisão especificada.

Através dele a dinâmica de um sistema pode ser aproximada. Isto é feito através do cálculo das matrizes de rigidez e massa e a aproximação do problema de autovalor. Após gerado o vetor carregamento e das condições iniciais, a aproximação dos modos é utilizada para a redução do sistema e posterior aproximação da dinâmica.

Estrutura:



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

Figura C.1: Estrutura do programa MEF_cabo

Exemplo de aplicação:

Ver seção 8.4.

Dados de Saída:

Dados de saída			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	R_Freq	frequências naturais	[Hz]
2	RMat_modo	funções modais aproximadas	[-]
3	NE_prec	número de elementos necessários para a precisão	[-]
4	DsnapR	aproximação da solução	[-]

Dados de Entrada:

Dados de entrada			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	L	Comprimento do cabo	[m]
2	A	Área da seção do cabo	[m ²]
3	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	[-]
4	rho	Densidade linear	[kg/m]
5	e	Precisão especificada da frequência	[%]
6	e_w	Precisão especificada da resposta dinâmica	[%]
Condições de contorno			
7.1	cond=0	cabo fixo-livre	[-]
7.2	cond=1	cabo fixo-mola	[-]
7.3	cond=2	cabo fixo-massa	[-]
7.4	kk	constante elástica da mola	[N/m]
7.5	mm	massa na extremidade	[kg]
Tipo de análise			
8.1	analise=1	aproxima modos e frequência	[-]
8.2	analise=2	aproxima modos, frequência e deslocamento	[-]
8.3	carreg=1	carregamento estático	[-]
8.4	carreg=2	carregamento dinâmico	[-]
8.5	ti	instante de início da análise	[s]
8.6	tf	instante de término da análise	[s]
8.7	dt	passo no tempo	[s]
8.8	w0	função de deslocamento inicial	[-]
8.9	v0	função da velocidade inicial	[-]
Carregamento			
9.1	fx	carregamento ao longo do cabo	[-]
9.2	ft	carregamento variável no tempo ao longo do cabo	[-]
9.3	fcx	carregamento concentrado	[N]
9.4	pax	ponto de aplicação do carregamento concentrado	[m]
9.5	fci	impacto	[N]
9.6	pai	ponto de aplicação do impacto	[m]
9.7	tai	instante de aplicação do impacto	[s]

C.2 MEF_placa

Propósito:

Este programa aproxima os modos de vibração e as frequências naturais de uma placa simplesmente apoiada ou engastada através do MEF, para uma precisão especificada.

Através dele a dinâmica de um sistema pode ser aproximada. Isto é feito através do cálculo das matrizes de rigidez e massa e a aproximação do problema de autovalor. Após gerado o vetor carregamento e das condições iniciais, a aproximação dos modos é utilizada para a redução do sistema e posterior aproximação da dinâmica.

Estrutura:

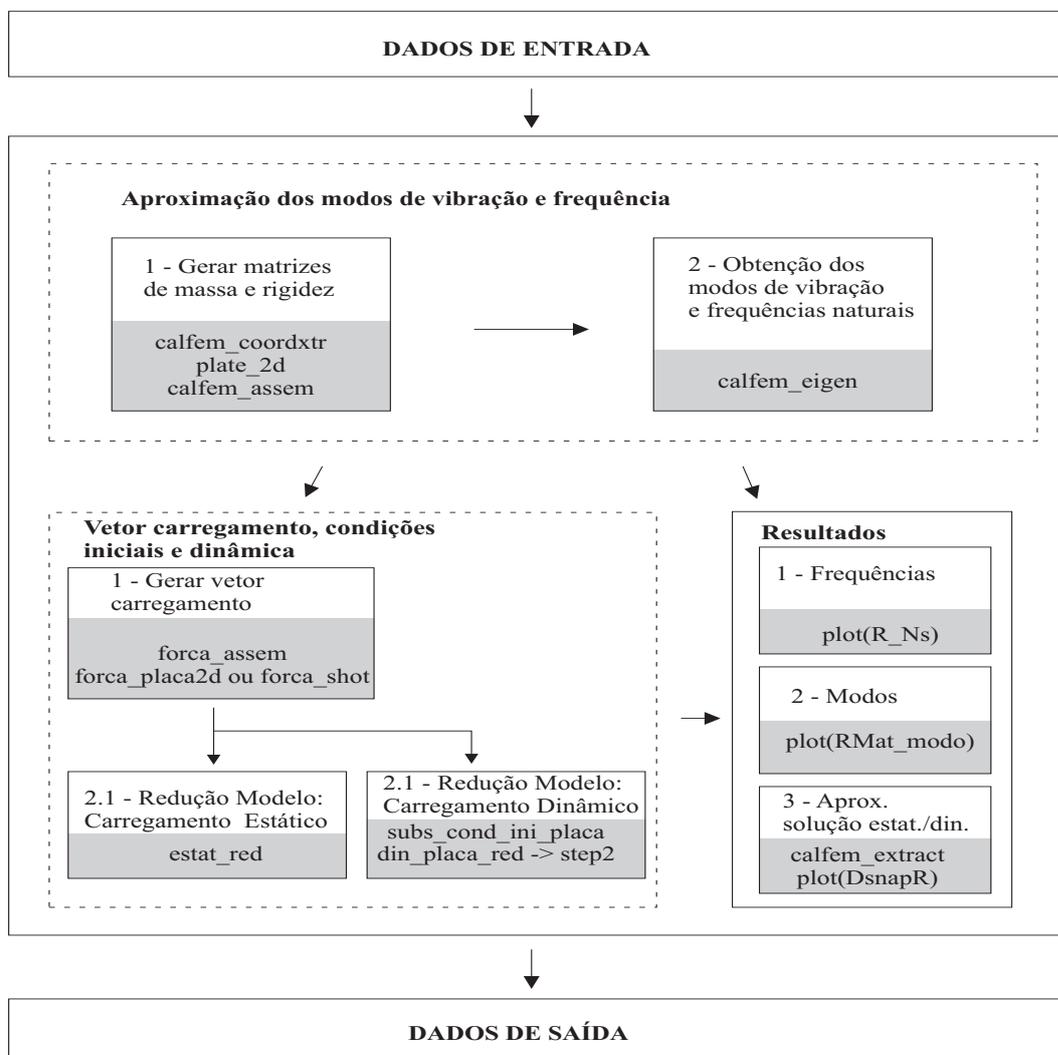


Figura C.2: Estrutura do programa MEF_placa

Exemplo de aplicação:

Ver seção 8.4.

Dados de Saída:

Dados de saída			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	R_Freq	frequências naturais	[Hz]
2	RMat_mod0	aproximação dos modos	[-]
3	NE_prec	número de elementos necessários para a precisão	[-]
4	DsnapR	aproximação da solução	[-]

Dados de Entrada:

Dados de entrada			
	Nome	Descrição	Unidade
1	La	Comprimento da placa	[m]
2	Lb	Largura da placa	[m]
3	h	Espessura da placa	[m]
4	E	Módulo de Elasticidade	[Pa]
5	rho	Densidade	[kg/m ³]
6	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	[-]
7	e	Precisão especificada da frequência	[%]
8	e_w	Precisão especificada da resposta dinâmica	[%]
Condições de contorno			
9.1	cc=0	placa simplesmente apoiada	[-]
9.2	cc=1	placa engastada	[-]
Tipo de análise			
10.1	analise=1	aproxima modos e frequência	[-]
10.2	analise=2	aproxima modos, frequência e deslocamento	[-]
10.3	carreg=1	carregamento estático	[-]
10.4	carreg=2	carregamento dinâmico	[-]
10.5	ti	instante de início da análise	[s]
10.6	tf	instante de término da análise	[s]
10.7	dt	passo no tempo	[s]
10.8	w0	função de deslocamento inicial	[-]
10.9	v0	função da velocidade inicial	[-]
Carregamento			
11.1	op_carreg=1	normal	[-]
11.2	op_carreg=2	jateamento (para aproximação do problema de jateamento de uma placa)	[-]
11.3	fx	função de carregamento	[-]
11.4	ft	função de carregamento variável no tempo	[-]
11.5	fcx	carregamento concentrado constante no tempo	[N]
11.6	pax	ponto de aplicação do carregamento concentrado	[m,m]
11.7	fci	impacto	[N]
11.8	pai	ponto de aplicação do impacto	[m,m]
11.9	tai	instante de aplicação do impacto	[s]
11.10	NE_ini	número de elementos iniciais (número par)	[-]
11.11	NE_ini	passo do número de elementos (número par)	[-]

C.3 Ritz_Galerkin_cabo

Propósito:

Este programa aproxima os modos de vibração e as frequências naturais de um cabo fixo na vertical através do Método de Ritz (que neste caso é equivalente ao Método de Galerkin), para uma precisão especificada.

Estrutura:

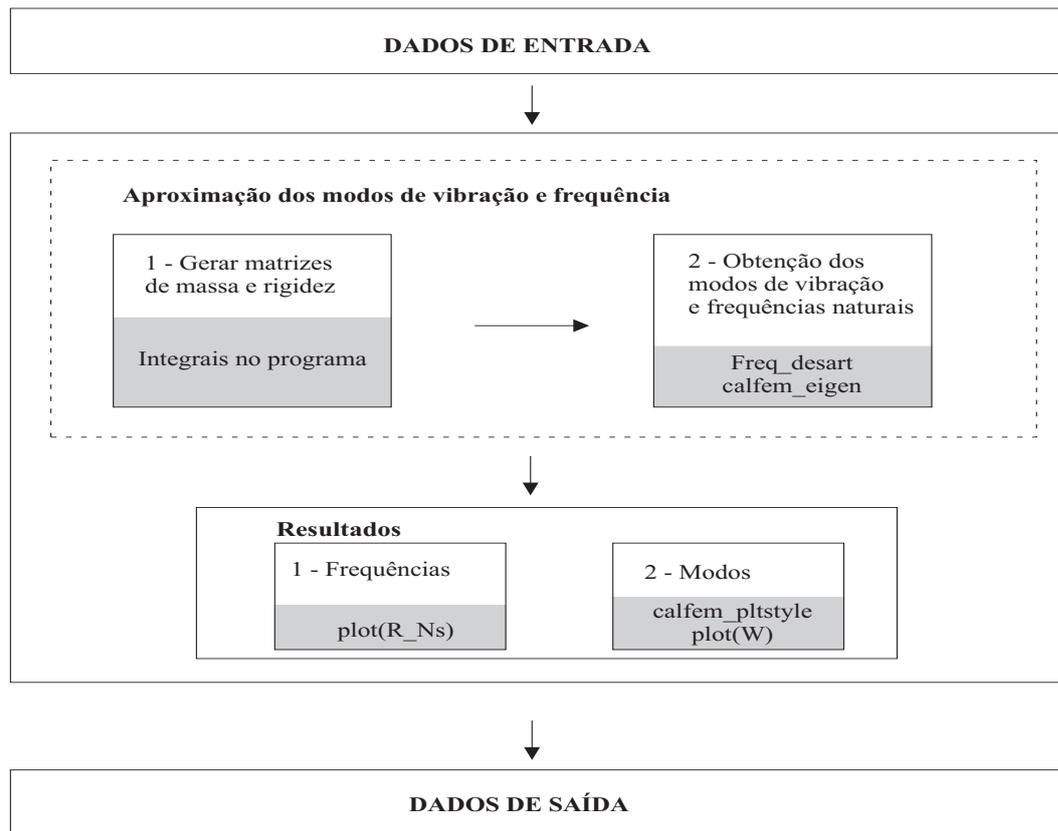


Figura C.3: Estrutura do programa Ritz_Galerkin_cabo

Exemplo de aplicação:

Ver seção 6.2.2.

Dados de Saída:

Dados de saída			
	Nome	Descrição	Unidade
1	R_Freq	frequências naturais	[Hz]
2	W	funções modais aproximadas	[-]
3	NE_prec	número de elementos necessários para a precisão	[-]

Dados de Entrada:

Dados de entrada			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	L	Comprimento do cabo	[m]
2	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	[-]
3	e	Precisão especificada da frequência	[%]
Condições de contorno			
1.1	cond=1	cabo fixo-livre	[-]
1.2	cond=2	cabo fixo-massa	[-]
1.3	cond=3	cabo fixo-mola	[-]
1.4	k_mola	constante elástica da mola	[N/m]
1.5	m_massa	massa na extremidade	[kg]

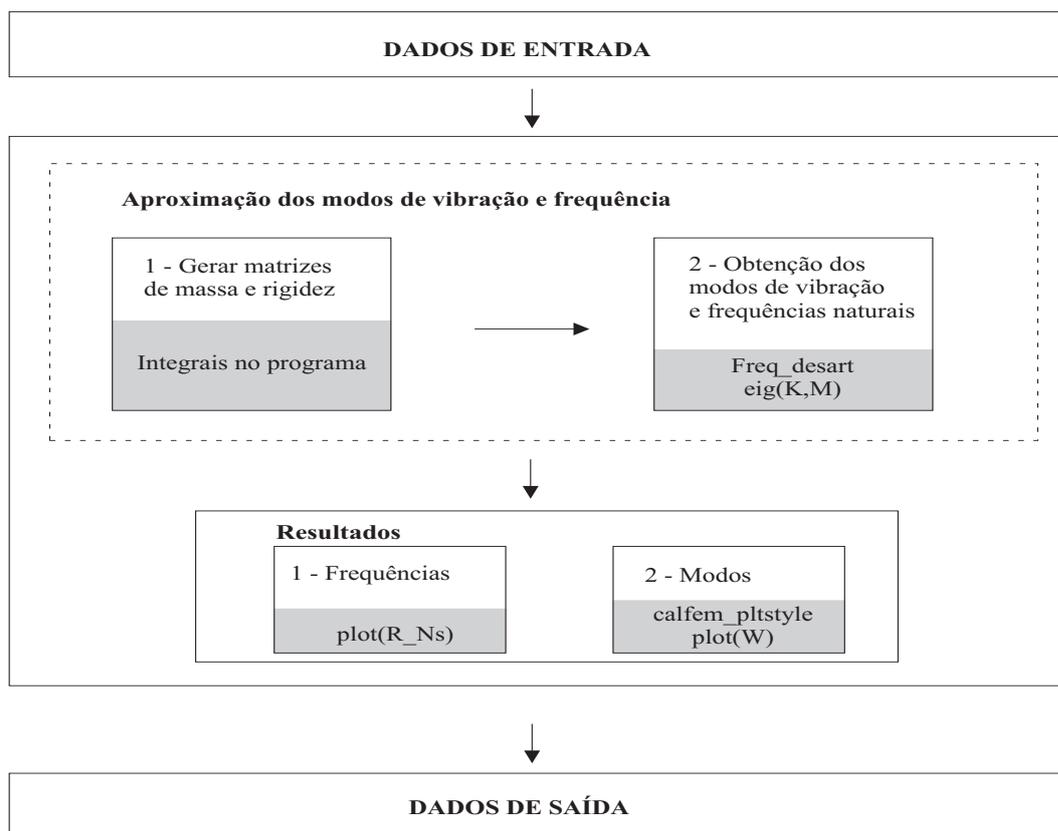
C.4

Colocacao_cabo e Colocacao_cabo_Chebyshev

Propósito:

Este programa aproxima os modos de vibração e as frequências naturais de um cabo fixo na vertical através do Método da Colocação, para uma precisão especificada.

Estrutura:



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

Figura C.4: Estrutura do programa Colocacao_cabo e Colocacao_cabo_Chebyshev

Exemplo de aplicação:

Ver seção 6.4.1.

Dados de Saída:

Dados de saída			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	R_Freq	frequências naturais	[Hz]
2	W	funções modais aproximadas	[-]
3	NE_prec	número de elementos necessários para a precisão	[-]

Dados de Entrada:

Dados de entrada			
	<i>Nome</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade</i>
1	L	Comprimento do cabo	[m]
2	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	[-]
3	e	Precisão especificada da frequência	[%]

C.5**Cond_cont_cont****Propósito:**

Este programa aproxima a solução de um problema de valor de contorno através do método da colocação, usando Polinômios de Chebyshev modificados.

Os problemas são da forma:

$$D2(x)u_{xx} + D1(x)u_x + D0(x) = f(x) \quad x \in] - 1, 1[\quad (\text{C.5.1})$$

$$u(-1) = \alpha \quad u(1) = \beta, \quad (\text{C.5.2})$$

onde D2, D1 e D0 são coeficiente variáveis e f um forçamento.

Estrutura:

O programa se inicia com o cálculo dos pontos de colocação e do novo vetor de forçamento devido à homogeneização das condições de contorno. A função *basis* fornece os polinômios de Chebyshev modificados.

Exemplo de aplicação:

Ver seção 9.2.1.1

Dados de Saída:

Dados de saída			
	Nome	Descrição	Unidade
1	Ux	aproximação da solução	[-]

Dados de Entrada:

Dados de entrada			
	Nome	Descrição	Unidade
1	D0,D1,D2	coeficientes variáveis	[-]
2	F	função de forçamento	[-]
3	alp	condição de contorno em $x = -1$	[-]
4	alp	condição de contorno em $x = 1$	[-]