

9

Método da Colocação

Conforme a seção (6.4) introduziu, o Método da Colocação consiste em tornar zero o resíduo da aproximação da solução nos pontos conhecidos como pontos de colocação. Este capítulo tem por objetivo esclarecer conceitos que ajudam a aprimorar o método, indo além do que foi apresentado nessa seção. Para tal, uma revisão de alguns conceitos de análise numérica clássica é necessária, o que é feito na seção a seguir. Para este capítulo foram usados como referência Boyd (4) e Mason (19).

9.1

Interpolação

9.1.1

Interpolação polinomial

A ideia básica de uma interpolação polinomial consiste em aproximar uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por polinômios. Polinômios de interpolação são construídos impondo-lhes determinados valores em pontos específicos (x_k, y_k) , ou seja:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (9.1.1)$$

Dizer que dois pontos definem uma reta é o mesmo que dizer que dois pontos definem um polinômio único de primeiro grau que passa por eles. A mesma ideia se aplica quando são utilizados um maior número de pontos: dados N pontos (x_k, y_k) , em distintos x_k , pode-se definir um polinômio único de grau menor que N .

Ainda que um polinômio de interpolação sejam único para um conjunto de pontos, diversas formas podem ser utilizadas para representá-lo. Uma das mais conhecidas e compactas é a de Lagrange, dada abaixo:

$$p(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k \quad (9.1.2)$$

Outra forma usual de se representar polinômio é através de:

$$p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \quad (9.1.3)$$

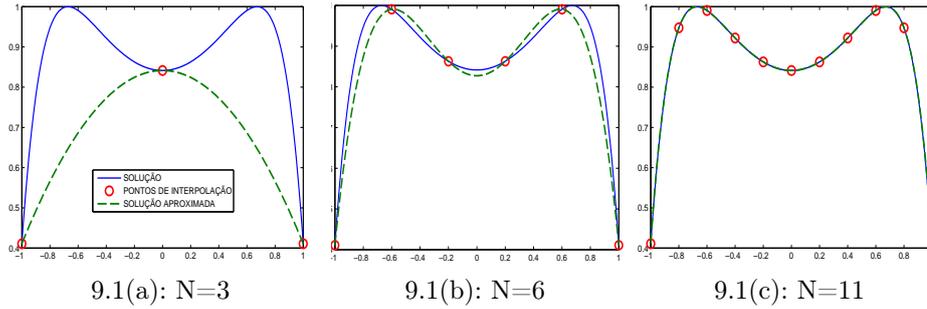


Figura 9.1: Exemplo de interpolação

onde a_i são os coeficientes do polinômio.

Para demonstrar a construção de um polinômio de interpolação para a aproximação de uma função f , toma-se esta como sendo $f = \text{sen}(e^{x^2})$, definida no domínio $[-1, 1]$. As Figs. (9.1) mostram os polinômios de interpolação construídos para diferentes números de pontos. Nota-se que quanto maior o número de pontos mais o polinômio se aproxima para a função aproximada, o que como será visto, nem sempre ocorrerá dependendo dos pontos tomados.

9.1.2 Qualidade da interpolação

Ainda que se consiga obter um polinômio que aproxime uma dada função, como saber se essa aproximação é realmente boa? E por que polinômios? Para responder a essas perguntas, inicia-se com uma restrição ao espaço de funções a serem aproximadas:

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \tag{9.1.4}$$

Essas funções serão aproximadas pelo conjunto de polinômios dados por:

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall x \in [-1, 1], \quad p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \tag{9.1.5}$$

Pode-se demonstrar que \mathbb{P} é um subespaço do espaço $C^0([-1, 1])$ de todas as funções contínuas em $[-1, 1]$, e possui a norma $\|\cdot\|_\infty$, conhecida como norma de Chebyshev ou também como norma máxima, que é definida por:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \tag{9.1.6}$$

A consequência de \mathbb{P} ser um subespaço de C^0 é que para um dado número $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p \in \mathbb{P}$ tal que $\|f - p\|_\infty < \epsilon$. Logo, para uma função contínua em $[-1, 1]$, existe uma sequência de polinômios p_N , onde $N \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente para f , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$, sendo esta uma boa razão para o uso de polinômios na aproximação de funções contínuas.

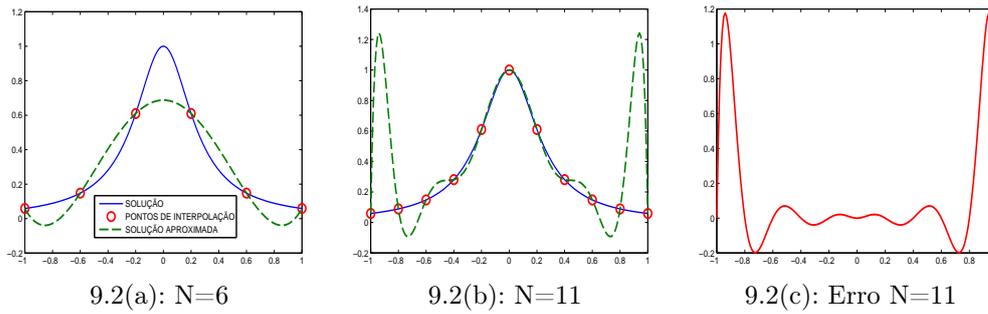


Figura 9.2: Fenômeno de Runge

A comparação entre ϵ com o resultado de $\|f - p_n\|_\infty$ é um dos indicadores do quão boa a aproximação é. Não custa lembrar que outras normas podem ser definidas, e que medirão de outras formas a distância entre a aproximada e a aproximante.

Demonstra-se também que dentre os polinômios de ordem N , um deles, $p_N^*(f) \in \mathbb{P}_N$, melhor aproxima a função f , isto é:

$$\|f - p_N^*(f)\|_\infty = \min\{\|f - p\|_\infty, p \in \mathbb{P}_N\} \quad (9.1.7)$$

9.1.3 Grade de interpolação

Polinômios diferentes de mesma ordem são obtidos quando são escolhidos diferentes pontos de interpolação. Ao conjunto de pontos de interpolação, $X = (x_i)_{0 \leq i \leq N}$ dá-se o nome de grade. Demonstra-se a unicidade do polinômio de ordem N , $I_N^X f$ que aproxima uma dada função $f \in C^0([-1, 1])$ nos pontos de interpolação especificados, isto é:

$$I_N^X f(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (9.1.8)$$

Para se chegar ao polinômio que melhor aproxima, deve-se escolher a grade certa. A escolha inicial lógica é espaçar igualmente os pontos ao longo do domínio da função. Porém, o próximo exemplo é um dos casos que mostra que essa em geral não é a melhor opção.

Dada a função:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2} \quad (9.1.9)$$

Escolhe-se uma grade igualmente espaçada para encontrar o polinômio de interpolação. As Figs. (9.2) mostram a interpolação da função para diferentes ordens de polinômios.

É de se notar que neste exemplo quanto maior a ordem do polinômio maior é o erro nas extremidades, não sendo esta a sequência de polinômios

que leva a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Este é um exemplo do conhecido Fenômeno de Runge.

Então qual seria a melhor grade? Esta pergunta começa a ser respondida pelo Teorema de Cauchy, que diz que para uma função suficientemente suave que tenha derivadas da ordem até $N + 1$ e contínuas, isto é, $f \in C^{N+1}([-1, 1])$, o erro da interpolação pelo polinômio $I_N^X(x)$ no ponto x é:

$$f(x) - I_N^X(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}^X(x) \quad (9.1.10)$$

onde $\xi = \xi(x) \in [-1, 1]$ e $\omega_{N+1}^X(x)$ é o polinômio nodal associado à uma grade X , único, de grau $N + 1$ e coeficiente do termo x^{N+1} igual a 1, dado por:

$$\omega_{N+1}^X(x) = \prod_{i=0}^N (x - x_i) \quad (9.1.11)$$

Ainda que não se possa controlar o primeiro termo dado, pois este vem da função aproximada, o segundo, o polinômio nodal, pode-se diminuí-lo escolhendo uma grade que reduza $\|\omega_{N+1}^X\|_\infty$.

E neste ponto se aplica o Teorema de Mínima Amplitude de Chebyshev que diz que dentre todos os polinômios de grau $N + 1$, único e coeficiente de x^{N+1} igual a 1 aquele que possui a menor norma de Chebyshev em $[-1, 1]$ é o Polinômio de Chebyshev de ordem $N + 1$, T_{N+1} , dividido por 2^N . Como a norma de Chebyshev desse polinômio é $\|T_{N+1}\|_\infty = 1$, a norma do polinômio nodal será:

$$\|\omega_{N+1}^N\|_\infty = \frac{1}{2^N} \quad (9.1.12)$$

quando for escolhida a grade como sendo as raízes de T_{N+1} , sendo esta uma excelente escolha dado que assim $\|\omega_{N+1}^N\|_\infty$ chegará ao seu menor valor possível. Esta grade é conhecida com grade de Chebyshev-Gauss (CG) e é dada pela fórmula abaixo:

$$x_i = \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right] \quad i = 1, \dots, N \quad (9.1.13)$$

Retoma-se o exemplo do Fenômeno de Runge. Aplica-se na mesma função-exemplo a nova grade (CG), não mais a anterior igualmente espaçada. As Figs. (9.3) mostram os novos polinômios de interpolação. É de se notar que em $N = 21$ o erro cai para 0,0055, enquanto que com a primeira malha o erro era de 6,3379, para este mesmo N .

Demonstra-se que, ao preço de uma redução no grau de exatidão, os pontos dos contornos $x = \pm 1$ podem ser incluídos quando a grade for formada pelas raízes da primeira derivada dos polinômios de Chebyshev, sendo esta grade conhecida como de Gauss-Lobatto (GL). Seus pontos são dados por:

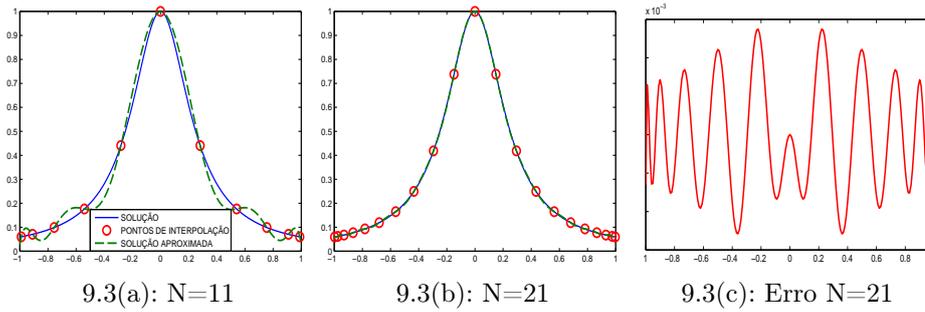


Figura 9.3: Alternativa ao Fenômeno de Runge - Grade de Chebyshev-Gauss

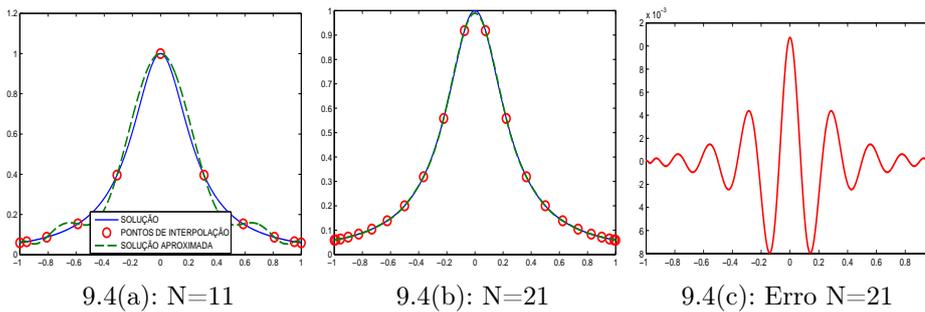


Figura 9.4: Alternativa ao Fenômeno de Runge - Grade de Gauss-Lobatto

$$x_i = \cos \left[\frac{\pi i}{N - 1} \right] \quad i = 0, \dots, N - 1 \quad (9.1.14)$$

Esta grade é bastante utilizada em problemas de valor de contorno, pois as condições de contorno fornecem por si só o valor de dois pontos da grade. Novamente a função $\frac{1}{1+16x^2}$ é utilizada como exemplo. Aqui a grade de Gauss-Lobatto é utilizada. As Figs. (9.4) mostram os polinômios formados utilizando-se a nova grade. Em $N = 21$ o erro foi de 0,0107, maior do que na grade de Chebyshev-Gauss.

9.2 Método da Colocação

O que foi apresentado do Método da Colocação na seção (6.4) será somado à teoria de interpolação descrita até aqui neste capítulo, para que se chegue a uma melhor forma do método.

O Método da Colocação requer que a equação diferencial seja exatamente satisfeita nos pontos conhecidos como pontos de colocação, para que, com essa restrição os coeficientes da aproximação sejam determinados, da mesma forma como é feito na interpolação polinomial onde para a obtenção do polinômio de interpolação exige-se que o polinômio possua o valor da função aproximada em pontos específicos. Não à toa esse método é conhecido como método interpolatório. Esta é uma outra forma de entender o método, diferente da

então abordada na seção (6.4). O simples exemplo a seguir mostrará o método sob o ponto de vista apresentado nesta seção.

Dada a equação diferencial junto às condições de contorno abaixo, quer se conhecer a aproximação pelo Método da Colocação.

$$\epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -1 \quad \text{C.C.: } u(-1) = 0 \text{ e } u(1) = 0 \quad (9.2.1)$$

A solução deste problema é dada por:

$$u(x) = 1 - \cosh(x/\epsilon)/\cosh(1/\epsilon) \quad (9.2.2)$$

Para a aproximação escolhe-se uma função que satisfaça as condições de contorno independentemente dos coeficientes da aproximação. Um exemplo de função deste tipo é:

$$\phi = (1 - x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \quad (9.2.3)$$

Considera-se $\epsilon = 1$ e substitui-se a função aproximante na equação diferencial, ao que se obtém:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \phi = 1 \quad \leftrightarrow \quad -3a_0 + 2a_2 - 7a_1 x + a_0 x^2 - 13a_2 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 \quad (9.2.4)$$

Para a determinação dos 3 coeficientes da aproximação a_0, a_1 e a_2 , 3 pontos, x_0, x_1 e x_2 , são escolhidos, apenas como exemplo, $(-1/2, 0, 1/2)$, gerando o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -11/4 & 27/8 & -19/16 \\ -3 & 0 & 2 \\ -11/4 & -27/8 & -19/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.2.5)$$

Resolvendo o sistema de equações, encontra-se os coeficientes da aproximação que substituídos na Eq. (9.2.3) leva à solução aproximada:

$$(1 - x^2)(0,352 + 0,028x^2) \quad (9.2.6)$$

As Figs. (9.5) mostram a diferença entre a solução e a solução aproximada junto ao erro.

Para uma maior acurácia, da mesma forma como feito nos outros métodos a solução não deverá ser aproximada por apenas uma função e sim pela combinação de várias delas:

$$w^N(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(x)$$

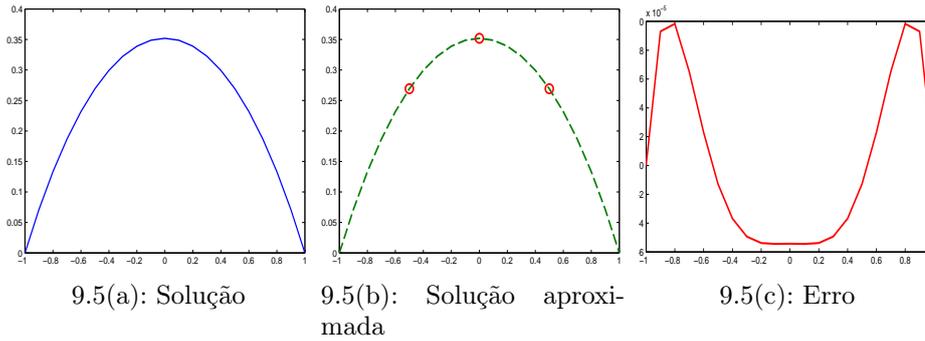


Figura 9.5: Exemplo de aproximação pelo Método da Colocação

Assim como no exemplo, após serem definidos os pontos de colocação, um sistema de equações será obtido e, ao resolvê-lo, encontra-se os coeficientes da aproximação.

Boyd (4) propõe algumas regras para a escolha das funções aproximantes. Considerando propriedades como facilidade de computação e velocidade de convergência, Boyd explicita que, em problemas restritos a intervalos finitos na maior parte das vezes os polinômios de Chebyshev são a melhor escolha.

O polinômio de Chebyshev $T_n(x)$ do primeiro tipo é um polinômio em x de grau n , definido por:

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{quando } x = \cos \theta \quad x \in [-1, 1] \quad (9.2.7)$$

Da equação acima pode-se escrever os primeiros polinômios de Chebyshev:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \dots \quad (9.2.8)$$

Os quais podem ser computados através de:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (9.2.9)$$

Demonstra-se que os polinômios de Chebyshev são ortogonais.

Em problemas de domínio diferente de $x \in [-1, 1]$, pode-se ou fazer uma mudança de coordenadas do polinômio ou mudar as coordenadas do problema. No primeiro caso, em problemas cujo domínio é $s \in [0, L]$, transforma-se as coordenadas do polinômio através da relação:

$$x = \frac{2s - L}{L} \quad (9.2.10)$$

que substituída nos polinômios leva estes a:

$$T_n(s) = T_n\left(\frac{2s - L}{L}\right) \quad (9.2.11)$$

e a Eq. (9.2.9) a:

$$T_n(x) = 2 \left(\frac{2s - L}{L} \right) T_{n-1}(s) - T_{n-2}(s) \quad (9.2.12)$$

Se a opção adotada for mudar as coordenadas do problema, pode-se fazê-lo através da relação:

$$s = \frac{xL + L}{2} \quad (9.2.13)$$

Da qual se obtém:

$$dx = \frac{L}{2} dz \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{2}{L} \frac{d}{dz} \quad (9.2.14)$$

Outra questão a se tratar diz respeito às condições de contorno. Neste trabalho serão mostradas duas estratégias. A primeira consiste em:

- Homogeneizar as condições de contorno não-homogêneas e
- Modificar os polinômios de Chebyshev para que atendam às condições homogêneas.

E a segunda:

- Computar menos pontos de colocação que os termos da expansão, excluindo os pontos com condições de contorno, encontrando-se um sistema com menos equações que variáveis. As equações restantes são obtidas através das condições de contorno.

Na seção a seguir a primeira estratégia é detalhada. A segunda será mostrada com um exemplo na seção (9.2.2).

9.2.1

Homogeneização das condições de contorno e modificação dos polinômios

Dado o problema $Lu = x$, onde L é um operador linear, de condições de contorno não-homogêneas, o primeiro passo para a homogeneização das condições de contorno, é a seleção de uma função B arbitrária que atenda às condições não-homogêneas. A solução será composta da soma de uma variável $v(x)$, que satisfaz as condições homogêneas, com B :

$$u(x) = v(x) + B(x) \quad (9.2.15)$$

assim como a nova função de forçamento será:

$$g(x) = f(x) - LB(x) \quad (9.2.16)$$

E então o problema passará a ser:

$$Lv = g \quad (9.2.17)$$

e condições de contorno:

$$u(-1) = u(1) = 0 \quad (9.2.18)$$

A forma mais prática de se obter B é através de uma interpolação polinomial. Dadas, por exemplo, as condições de contorno abaixo:

$$\frac{du}{dx}(-1) = \gamma \quad \frac{du}{dx}(1) - u(1) = \delta \quad (9.2.19)$$

A escolha mais lógica é interpolar com o menor polinômio que atenda às condições dadas, que neste caso é:

$$B(x) = \Lambda + \Omega x \quad (9.2.20)$$

Os coeficientes são determinados impondo que B obedeça às condições de contorno, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx}(-1) = \gamma &\leftrightarrow \Omega = \gamma \\ \frac{dB}{dx}(1) - B(1) = \delta &\leftrightarrow \Omega - (\Lambda + \Omega) = \delta \rightarrow \Lambda = -\delta \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

O próximo passo consiste na mudança das funções aproximantes para que atendam às novas condições de contorno, já que estas agora são homogêneas e o problema foi modificado. Os polinômios de Chebyshev em especial possuem os seguintes valores nos contornos:

$$\begin{aligned} T_{2n}(\pm 1) &= 1 & n &= 1, 2, \dots \\ T_{2n+1}(\pm 1) &= \pm 1 & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

E para que atendam às condições de contorno é realizada a simples operação abaixo:

$$\begin{aligned} \phi_{2n}(x) &= T_{2n}(x) - 1 & n &= 1, 2, \dots \\ \phi_{2n+1}(x) &= T_{2n+1}(x) - x & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.2.23)$$

Com esses dois procedimentos pode-se aproximar problemas de diferentes

condições de contorno, como será mostrado a seguir.

9.2.1.1

Exemplo de aproximação da solução de uma ODE através do Método da Colocação com polinômios de Chebyshev modificados

Dado o problema:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - (x^6 + 3x^2)u = 0 \quad (9.2.24)$$

e condições de contorno:

$$u(-1) = u(1) = 1 \quad (9.2.25)$$

Quer se aproximar a sua solução usando os procedimentos descritos na seção anterior.

Inicia-se homogeneizando as condições de contorno. A função B que atende às condições não-homogêneas será dada pelo menor polinômio que as satisfaça. Sendo assim:

$$\begin{aligned} B(x) &= \Lambda + \Omega x \implies \\ B(-1) &= 1 \leftrightarrow \Lambda - \Omega = 1 \\ B(1) &= 1 \leftrightarrow \Lambda + \Omega = 1 \implies \\ \Lambda &= 1 \quad \Omega = 0 \\ B(x) &= 1 \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

A nova função de forçamento g do problema, que antes era $f = 0$, agora será:

$$g(x) = f(x) - LB(x) \implies g(x) = 0 - [-(x^6 + 3x^2)1] = (x^6 + 3x^2) \quad (9.2.27)$$

Tendo as condições de contorno sido homogeneizadas, $u(-1) = u(1) = 0$, a solução será aproximada pelas funções dadas pela Eq. (9.2.22), obtidas através da modificação dos polinômios de Chebyshev.

O programa *Cond_cont_col* (ver Apêndice C para o manual de uso) constitui-se de uma adaptação para Matlab do algoritmo proposto por Boyd (4) e pode ser utilizado para resolver problemas do tipo:

$$d_2(x) \frac{d^2u}{dx^2} + d_1(x) \frac{du}{dx} + d_0(x) = f(x) \quad x \in [-1, 1]$$

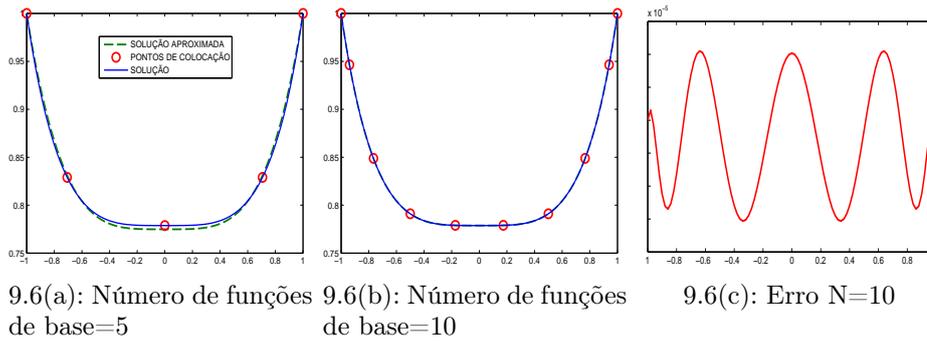


Figura 9.6: Aproximação da solução de um problema de valor de contorno pelo Método da Colocação

$$u(-1) = \alpha \quad u(1) = \beta$$

e segue a mesma metodologia descrita e usa como grade de interpolação os pontos de Gauss-Lobatto. O problema proposto foi aplicado no programa e a aproximação da solução obtida. O gráfico desta é apresentado nas Figs. (9.6), onde pode-se observar o resultado da aproximação comparada com a solução que neste caso é $u(x) = e^{[(x^4-1)/4]}$.

9.2.2

Exemplo de Aplicação do Método da Colocação com Polinômios de Chebyshev: Cabo fixo-livre

Retoma-se a Eq. (6.4.3):

$$\int_0^L A(x)\rho(x)\phi\psi^T dx \ddot{u} - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right] \psi^T dx a - \int_0^L f(x)\psi dx = 0$$

e ainda a condição de contorno dada por:

$$w(0, t) = 0 \tag{9.2.28}$$

Uma das diferenças entre este exemplo e o exemplo do Capítulo 6 é que neste serão usadas como funções aproximantes os polinômios de Chebyshev, na forma:

$$w^N(\xi, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t)T_{j-1}(\xi) \tag{9.2.29}$$

Como os polinômios de Chebyshev que serão usados na aproximação são definidos em $\xi \in [-1, 1]$, transforma-se as coordenadas do problema de $x \in [0, L]$ para $\xi \in [-1, 1]$, levando a equação Eq. (6.4.3) a:

$$\int_{-1}^1 \frac{L}{2} A(\xi) \rho(\xi) T_{j-1}(\xi) \psi^T d\xi \ddot{a} - \int_{-1}^1 A(\xi) \rho(\xi) g L \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi) \frac{\partial T_{j-1}(\xi)}{\partial \xi} \right] \psi d\xi a - \int_{-1}^1 \frac{L}{2} f(\xi) \psi d\xi = 0 \quad (9.2.30)$$

e a condição de contorno a:

$$w(-1, t) = 0 \quad (9.2.31)$$

No Método da Colocação as funções ψ são distribuições Deltas de Dirac posicionadas nos pontos de colocação. Neste exemplo a grade escolhida é a grade de Gauss-Lobatto por incluir os extremos, ainda que o extremo onde a condição de contorno é imposta não seja computado. A grade é dada por:

$$\xi_i = -\cos \left[\frac{\pi i}{N-1} \right] \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (9.2.32)$$

Substituindo ψ por $\delta(\xi - \xi_i)$ nos pontos de colocação na Eq. (9.2.30) obtém-se:

$$M\ddot{a} + Ka = F$$

onde,

$$M = \frac{L}{2} A \rho T_{j-1}(\xi_i) \quad (9.2.33)$$

$$K = A \rho g L \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi_i) \frac{\partial T_{j-1}(\xi_i)}{\partial \xi} \right] \quad (9.2.34)$$

$$F = f(\xi_i) \quad (9.2.35)$$

O objetivo deste exemplo é aproximar os modos e as frequências naturais de um cabo fixo-livre. Para isso propõe-se a solução modal $a(t) = u e^{i\omega t}$, ao que, junto à condição de contorno, chega-se no problema de autovalor:

$$(K - \omega^2 M)u = 0 \quad (9.2.36)$$

A forma de tratar as condições de contorno no Método da Colocação é baseada em Lee e Schultz (16). Conforme comentado, os pontos onde são impostas as condições de contorno não são computados. Logo são formadas menos equações que coeficientes da expansão a serem encontrados. As equações restantes são obtidas através das equações das condições de contorno.

Decompõe-se a Eq. (9.2.36) em:

$$([H]\{u\} + [H^*]\{u^*\}) - \omega^2([S]\{u\} + [S^*]\{u^*\}) = 0 \quad (9.2.37)$$

onde $u = [a_1 \dots a_{N-1}]^T$ e $u^* = [a_N]$. $[H]$ e $[S]$ são matrizes $N-1 \times N-1$ enquanto que $[H^*]$ e $[S^*]$ $N-1 \times 1$. Como são N termos a_j a serem calculados e

apenas $N - 1$ equações, a equação restante será dada pela condição de contorno. Substituindo-se a expansão (9.2.29) na Eq. (9.2.31) obtém-se:

$$\sum_{n=1}^N a_n T_{n-1}(-1) = 0 \quad (9.2.38)$$

Da mesma forma como foi feito na Eq. (9.2.37) a equação acima também será decomposta em:

$$([U]\{u\} + [V]\{u^*\}) = 0 \quad (9.2.39)$$

onde a dimensão de $[U]$ é $1 \times N - 1$ e de $[V]$ é 1×1 . A equação acima pode ser expressa como:

$$\{u^*\} = -[V]^{-1}[U]\{u\} \quad (9.2.40)$$

Substituindo $\{u^*\}$ na Eq. (9.2.37) chega-se a:

$$([H] - [H^*][V]^{-1}[U] - \omega^2([S] - [S^*][V]^{-1}[U]))\{u\} = 0 \quad (9.2.41)$$

Calculando-se os autovetores $\{u\}$, pode-se encontrar $\{u^*\}$ através da Eq. (9.2.40), obtendo-se assim todos os coeficientes da expansão.

O programa *Colocacao_cabo_Chebyshev* utiliza a metodologia apresentada neste exemplo para aproximar os modos e as frequências naturais (ver Apêndice C para o manual de uso). Tomou-se para os dados de entrada do programa um cabo de 10m de comprimento e erro especificado de 1% na última frequência. A Fig. (9.7) mostra a aproximação dos quatro primeiros modos de vibração. O erro encontrado foi de 0,103%. Para a aproximação foram usadas 9 funções, enquanto que o programa *Colocacao_cabo* para o mesmo exemplo, utilizou 16 funções e encontrou um erro de 0,466%.

O gráfico da Fig. (9.8) mostra o erro na aproximação da quarta frequência natural dado o número de funções N usadas na aproximação.

As aproximações das frequências circulares naturais (rd/s) encontradas foram:

$$\omega_1 = 1,2024; \quad \omega_2 = 2,76; \quad \omega_3 = 4,3269; \quad \omega_4 = 5,8983. \quad (9.2.42)$$

9.3

Comparação - Método da Colocação x MEF

Ao longo deste trabalho foram mostradas apenas algumas aproximações iniciais dos modos e das frequências naturais. Quando se tratar da aproximação de sistemas complexos a uma precisão razoável, será utilizado facilmente um

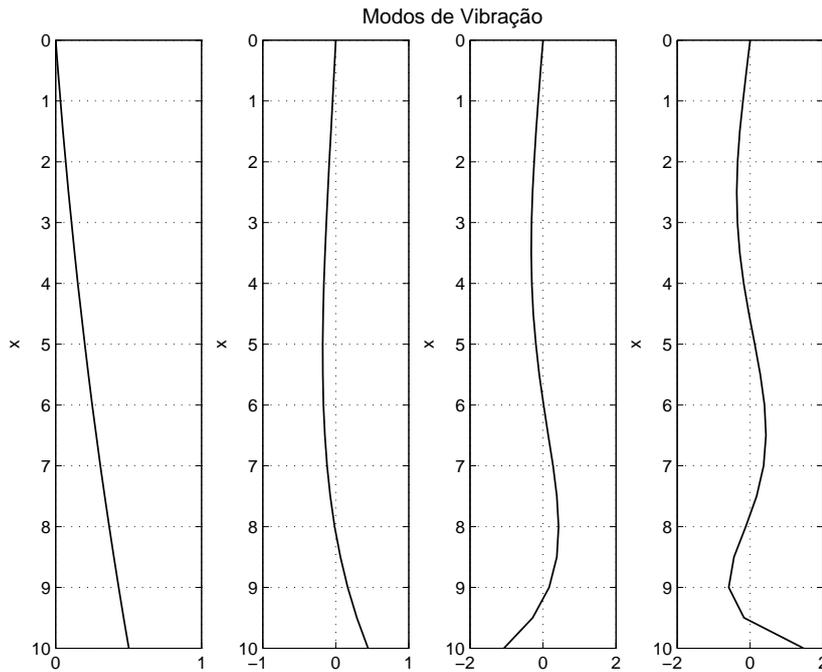


Figura 9.7: Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de um cabo fixo-livre pelo Método da Colocação - Chebyshev

número superior a 100 aproximações dos modos de vibração para a redução do modelo. É por isto que aqui ambos os Métodos, o Método da Colocação e o Método dos Elementos Finitos, são comparados através do cálculo das 100 primeiras aproximações dos modos e o resultado pode ser visto na Tab. (9.1)

Esta comparação não tem por objetivo definir que um método seja melhor que outro, ainda que no exemplo tomado o Método da Colocação se mostrou superior, pois isto dependerá sempre do exemplo onde a comparação for realizada e da forma como o algoritmo que emprega o método é implementado. Pode-se sim, pelo que foi estudado, traçar as principais diferenças entre ambos, como é feito na Tab. (9.2).

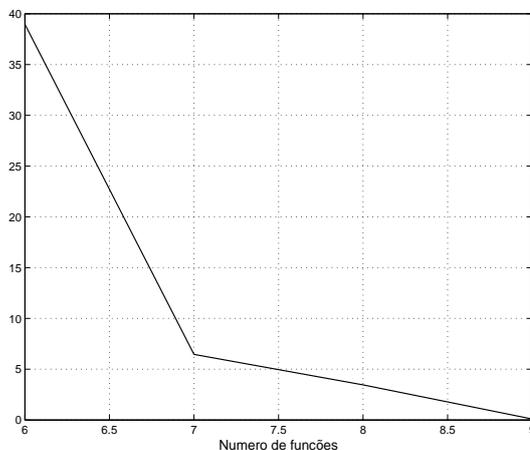


Figura 9.8: Erro da aproximação da quarta frequência natural obtida pelo Método da Colocação x número de funções aproximantes

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

Programa	Col._cabo_Chebyshev	MEF_cabo
Número de modos	100	100
Erro especificado	0,1%	0,1%
Erro obtido entre as aprox.	0,0018%	0,0971%
‡ pontos/el. p/ precisão	171	690
Grau do pol./Função interpol.	170	linear
Tempo	7seg	6min
100ª Frequência Analítica	156,687(rd/s)	156,687(rd/s)
Aprox. Frequência	156,687(rd/s)	165,95(rd/s)
Diff % última freq.	[-]	5,9%

Tabela 9.1: Comparação MEF x Colocação - Aproximação com primeiros modos

Dados de saída			
	Método	MEF	Método da Colocação
1	Principal diferença	O MEF divide o domínio em subintervalos e usa funções não nulas em apenas parte dele. No elemento, são polinômios de baixo grau;	Usa funções que em geral são polinômios de alto grau;
2	Estratégias para aumento da acurácia	<ul style="list-style-type: none"> • Aumentar a acurácia através do aumento do número de elementos na região onde maior acurácia é requerida; • Aumento do grau do polinômio interpolante, porém existe um limite ao aumento; 	Aumento do grau dos polinômios;
3	Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> • As matrizes do MEF são esparsas, o que reduz o custo de computação. Nos métodos espectrais as matrizes são cheias; • Aproximam domínios complexos; 	Alta acurácia comparada ao MEF pelo uso de polinômios de alto grau.
4	Desvantagens	Baixa acurácia no MEF pelo limite ao aumento do grau dos polinômios;	<ul style="list-style-type: none"> • Nos Métodos Espectrais as matrizes são cheias; • Encontra-se dificuldades quando a geometria do problema não é suave e regular.

Tabela 9.2: Principais diferenças entre o MEF e o Método da Colocação