



**Euler Botelho Antunes**

**Modelagem e Simulação de Estruturas  
Flexíveis: cabos e placas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Rubens Sampaio Filho

Rio de Janeiro  
Outubro de 2010



**Euler Botelho Antunes**

**Modelagem e Simulação de Estruturas  
Flexíveis: cabos e placas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Rubens Sampaio Filho**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

**Prof. Fernando Alves Rochinha**

Examinador

Departamento de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ

**Prof. Hans Ingo Weber**

Examinador

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio

**Prof. Thiago Gamboa Ritto**

Examinador

Departamento de Engenharia Mecânica, UFF

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de Outubro de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Euler Botelho Antunes**

Euler Botelho Antunes graduado em Engenharia de Produção em 2005 pelo CEFET-RJ (Rio de Janeiro - RJ)

#### Ficha Catalográfica

Antunes, Euler B.

Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis: cabos e placas / Euler Botelho Antunes; orientador: Rubens Sampaio Filho. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2010.

v., 145 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Tese. 2. estruturas flexíveis. 3. dinâmica. 4. redução de modelos. 5. métodos diretos. 6. modelagem. I. Sampaio Filho, Rubens. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

A Deus por todo o Seu amor; À minha mãe Solange e ao meu pai Sérgio por serem pontes tão importantes de chegada de todo esse amor até mim; Ao Professor Rubens por sua inestimável contribuição ao meu processo de aprendizagem, por sua presença constante e por sua dedicação a seus alunos; À minha futura esposa Maria, por entender a importância deste trabalho e por não cobrar em momento algum mais atenção, embora merecida; À PUC pelo corpo docente de excelência e pela isenção concedida; À minha grande e unida família, em especial aos meus irmãos; À Huisman do Brasil pelo tempo cedido, em especial a Johan Zondervan.

## Resumo

Antunes, Euler B.; Sampaio Filho, Rubens. **Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis: cabos e placas**. Rio de Janeiro, 2010. 145p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este texto pode ser dividido em duas partes: a primeira trata da modelagem de sistemas dinâmicos, passando da chamada formulação forte ao conceito de formulação variacional, sem antes deixar de apresentar ferramentas básicas do cálculo variacional e o Princípio de Hamilton. Os conceitos são exemplificados por duas estruturas que acompanham todo o texto: um cabo unidimensional e uma placa. Ainda na primeira parte, é apresentado o problema de autovalor de sistemas contínuos e são mostradas as propriedades dos operadores autoadjuntos. Ao longo desta etapa e no apêndice, soluções analíticas para o problema de autovalor são desenvolvidas. Por ser a obtenção das soluções analíticas dos problemas por demais engenhosas ou até mesmo impossíveis, um outro caminho é proposto: a aproximação de soluções, sendo este o tema da segunda parte deste texto. Ela é iniciada pela apresentação de métodos de discretização dos sistemas contínuos sem deixar de exemplificá-los. Os métodos são usados como ferramentas de aproximação dos modos de vibração. São abordados os Métodos de Ritz, de Galerkin e o da Colocação. As funções usadas no primeiro e no segundo são geradas pelo Método dos Elementos Finitos e as aproximações dos modos por este método são usadas na redução de sistemas, para então se obter a resposta dinâmica dado um carregamento. Toda a teoria é reforçada ao final com dois problemas práticos: um cabo durante uma operação de abastecimento de uma plataforma de petróleo e o outro de uma placa durante uma operação de jateamento. Por último, mas não menos importante, um capítulo é dedicado ao Método da Colocação, onde polinômios de ordem superior, os polinômios de Chebyshev, são usados para a aproximação com o uso de diferentes grades de interpolação, a grade de Chebyshev-Gauss e a grade de Gauss-Lobatto.

## Palavras-chave

estruturas flexíveis; dinâmica; redução de modelos; métodos diretos; modelagem;

## Abstract

Antunes, Euler B.; Sampaio Filho, Rubens(Advisor) . **Modeling and Simulation of Flexible Structures: cables and plates.** Rio de Janeiro, 2010. 145p. MSc Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This text can be divided into two parts: the first deals with modeling of dynamic systems, passing through the so-called strong formulation to the concept of variational formulation, considering the basic tools of variational calculus and the Hamilton Principle. The concepts are exemplified by two structures that follows the whole text: a unidimensional cable and a plate. Still in the first part, the eigenvalue problem of continuous systems is presented and the properties of self-adjoint operators are shown. Throughout this stage and at the appendix, analytical solutions to the eigenvalue problem are developed. As to get the problems analytical solutions may be too ingenious or even impossible, another way is proposed: the use of approximate solutions, which is the theme of the second part of this text. It starts by presenting methods of discretization of continuous systems, exemplifying them. The methods are used as tools for approximation of the vibration modes. The Ritz, Galerkin and Collocation methods are exposed. The functions used at the first and at the second are generated by the Finite Element Method and the modes approximated by this method are used to reduce the systems to then obtain the dynamic response to a given dynamic loading. The whole theory is reinforced with two practical problems at the end: one is about a cable during a supplying operation of an oil rig and the other is about a plate during a shot blasting operation. Last but not least, a chapter is devoted to the Collocation Method, where higher-order polynomials, the Chebyshev polynomials, are used to the approximation using different interpolation grids, the Chebyshev-Gauss and the Gauss-Lobatto grid.

## Keywords

flexible structures; dynamics; model reduction; direct methods; modeling;

# Sumário

1	Introdução	13
2	Formulação forte de um sistema dinâmico	15
2.1	Formulação forte de um cabo fixo-livre	15
2.2	Formulação forte de uma placa	18
3	Cálculo Variacional	23
3.1	Introdução ao Cálculo de Variações	23
3.2	Dinâmica entre dois instantes	25
3.2.1	Deslocamentos virtuais	25
3.2.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais	26
3.2.3	Movimento real	28
3.2.4	Movimento comparativo	29
3.2.5	Princípio de Hamilton	29
3.2.6	Equações de Lagrange	31
4	Formulação Variacional - Aplicando o Princípio de Hamilton	33
4.1	Formulação Variacional de um Cabo Fixo-livre	33
4.1.1	Cabo fixo-mola	36
4.1.2	Cabo fixo-massa	37
4.2	Formulação Variacional de uma placa	38
5	Análise Modal	40
5.1	Solução modal	40
5.2	Problema de autovalor com coeficientes variáveis	42
5.3	Propriedades dos problemas de autovalor	46
5.4	Teorema da expansão	50
6	Métodos Diretos	52
6.1	Método de Rayleigh	52
6.2	Método de Rayleigh-Ritz	53
6.2.1	Método de Ritz	54
6.2.2	Exemplo de discretização pelo Método de Ritz - Aproximação dos modos e frequências naturais	56
6.2.3	Aplicação do método no problema de uma placa	60
6.3	Método de Galerkin	62
6.3.1	Aplicação do método de Ritz e de Galerkin em problemas com outras condição de contorno	63
6.4	Método da Colocação	64
6.4.1	Exemplo de discretização pelo Método da Colocação - Aproximação dos modos e frequências naturais	65
6.5	Carregamento nos Métodos Diretos	68
7	Método dos Elementos Finitos	71
7.1	Funções lineares de interpolação	72

7.1.1	Cabo fixo-livre - cálculo das matrizes	75
7.2	Montagem da matriz global e condições de contorno	76
7.3	Exemplo de aproximação das frequências naturais e modos de vibração através do MEF	78
7.4	Outras funções de interpolação	78
7.4.1	Cabo fixo-livre - MEF com funções quadráticas	81
7.5	Elementos Bidimensionais	82
7.5.1	Elementos triangulares lineares	83
7.5.2	Elementos quadrilaterais	85
7.5.3	Aproximação dos modos e frequências naturais de uma placa através do MEF	90
8	Redução de modelos	<b>93</b>
8.1	Introdução	93
8.2	Redução modal	95
8.3	Redução das condições iniciais no espaço gerado pela base modal	96
8.4	Exemplos de aplicação	98
8.4.1	Exemplo 1 - Abastecimento de uma plataforma	99
8.4.2	Exemplo 2 - Jateamento de uma placa	104
9	Método da Colocação	<b>108</b>
9.1	Interpolação	108
9.1.1	Interpolação polinomial	108
9.1.2	Qualidade da interpolação	109
9.1.3	Grade de interpolação	110
9.2	Método da Colocação	112
9.2.1	Homogeneização das condições de contorno e modificação dos polinômios	115
9.2.2	Exemplo de Aplicação do Método da Colocação com Polinômios de Chebyshev: Cabo fixo-livre	118
9.3	Comparação - Método da Colocação x MEF	120
10	Conclusões e trabalhos futuros	<b>124</b>
A	Básico de Álgebra Linear	<b>129</b>
B	Vibração de uma placa retangular	<b>132</b>
C	Manual de utilização dos programas	<b>134</b>
C.1	MEF_cabo	135
C.2	MEF_placa	138
C.3	Ritz_Galerkin_cabo	141
C.4	Colocacao_cabo e Colocacao_cabo_Chebyshev	143
C.5	Cond_cont_cont	145

## Lista de figuras

2.1	Segmento de cabo	16
2.2	Cabo fixo-livre	17
2.3	Elemento infinitesimal de placa	19
2.4	Deslocamento no plano ao longo do eixo $x$	20
3.1	Problema da braquistócrona. Qual função extrema o tempo $T$ ?	24
4.1	Cabo fixo com mola na extremidade	36
4.2	Cabo fixo com massa na extremidade	37
5.1	Exemplo de condição inicial que não pode ser representada por apenas um modo $W_k$	42
5.2	Funções de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipo	44
5.3	Quatro primeiros modos de vibração de uma corrente suspensa. Fotos retiradas do artigo Strings, Chains, and Ropes, de Yong. Ver (30)	45
6.1	Aproximações dos seis primeiros modos de vibração obtida pelo Método de Ritz	60
6.2	Erro da aproximação da sexta frequência natural obtida pelo Método de Ritz x número de funções aproximantes	61
6.3	Aproximação do primeiro modo de vibração do cabo fixo-livre em diferentes condições de contorno	65
6.4	Aproximações dos três primeiros modos de vibração pelo Método da Colocação	69
6.5	Erro da aproximação da terceira frequência natural pelo Método da Colocação x número de funções aproximantes	69
6.6	Exemplos de carregamento no cabo fixo-livre	70
7.1	Função triangular e deslocamento do elemento	73
7.2	Interpolação linear no elemento	75
7.3	Aproximações dos nove primeiros modos de vibração pelo MEF	79
7.4	Diminuição do erro da aproximação da nona frequência natural através do aumento do número de funções	80
7.5	Funções de interpolação diferentes das lineares	80
7.6	Comparação de convergência - função linear x função quadrática	83
7.7	Domínio aproximado por diferentes malhas	83
7.8	Função piramidal	84
7.9	Elemento triangular	84
7.10	Elemento retangular	86
7.11	Esquema adotado para a numeração de elementos quadrilaterais	87
7.12	Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de uma placa apoiada	91
7.13	Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de uma placa engastada	92

8.1	Etapas para a aproximação da dinâmica	94
8.2	Erro ortogonal ao espaço coluna	97
8.3	Condição inicial do cabo fixo-livre	98
8.4	Cabo suspenso transportando uma carga	101
8.5	Posição do cabo em 4 instantes	102
8.6	Deslocamento do contêiner nos primeiros 2000 segundos	102
8.7	Deslocamento do contêiner nos primeiros 2000 segundos	103
8.8	Deslocamento de dois pontos do cabo	104
8.9	Placa na operação de jateamento	105
8.10	Posição da placa em 4 instantes (em sentido horário $t=0.1, 20, 35$ e 42)	107
9.1	Exemplo de interpolação	109
9.2	Fenômeno de Runge	110
9.3	Alternativa ao Fenômeno de Runge - Grade de Chebyshev-Gauss	112
9.4	Alternativa ao Fenômeno de Runge - Grade de Gauss-Lobatto	112
9.5	Exemplo de aproximação pelo Método da Colocação	114
9.6	Aproximação da solução de um problema de valor de contorno pelo Método da Colocação	118
9.7	Aproximações dos quatro primeiros modos de vibração de um cabo fixo-livre pelo Método da Colocação - Chebyshev	121
9.8	Erro da aproximação da quarta frequência natural obtida pelo Método da Colocação x número de funções aproximantes	122
C.1	Estrutura do programa MEF_cabo	135
C.2	Estrutura do programa MEF_placa	138
C.3	Estrutura do programa Ritz_Galerkin_cabo	141
C.4	Estrutura do programa Colocacao_cabo e Colocacao_cabo_Chebyshev	143

## Lista de tabelas

8.1	Entrada do Programa MEF_cabo	100
8.2	Saída do Programa MEF_cabo - primeiro carregamento	100
8.3	Saída do Programa MEF_cabo - segundo carregamento	103
8.4	Saída do Programa MEF_cabo - terceiro carregamento	103
8.5	Saída do Programa MEF_cabo - quarto carregamento	104
8.6	Entrada do Programa MEF_placa	106
8.7	Saída do Programa MEF_placa	106
9.1	Comparação MEF x Colocação - Aproximação com primeiros modos	122
9.2	Principais diferenças entre o MEF e o Método da Colocação	123

*The Heart of Africa has lost its mystery; the planets of Tau Ceti are currently unknown and unreachable. Nevertheless, the rise of digital computers has given this generation its galleons and astrolabes. The undiscovered lands exist, in one sense, only as intermittent electric rivers in dendritic networks of copper and silicon, invisible as the soul. And yet the mystery of scientific computing is that its new worlds over the water, wrought only of numbers and video images, are as real as the furrowed brow of the first Cro-Magnon who was mystified by the stars, and looked for a story.*

**John P. Boyd**, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*.