

3 Modelagem Matemática

No presente trabalho selecionou-se o Modelo de Dois Fluidos para prever o escoamento no regime de golfada em uma tubulação circular horizontal. Este trabalho é uma continuação dos trabalhos desenvolvidos por Ortega (2004) e Carneiro (2006), que estudaram o Modelo de Dois Fluidos para a previsão da formação do regime de golfadas a partir do escoamento estratificado.

A metodologia desenvolvida é baseada nos artigos de Issa e Kempf (2003) e Bonizzi (2003) denominada “*slug capturing*” (ou “captura das golfadas”), na qual os padrões estratificado, intermitente e os regimes de transição são modelados a partir do mesmo conjunto de equações governantes e leis de fechamento, evitando assim o uso de equações empíricas para a determinação do regime de escoamento. Nesta metodologia, a fração líquida pode crescer e, eventualmente, ocupar toda porção do duto, levando naturalmente à formação de golfada líquida, dependendo somente das equações de transporte de massa e quantidade de movimento de cada fase. O Modelo de Dois Fluidos é apresentado a seguir, juntamente com as condições de contorno e iniciais.

Como o padrão de escoamento em golfadas é aleatório, é muito útil determinar a função de densidade da probabilidade (Probability Density Function: PDF) para auxiliar na compreensão do escoamento. No final deste capítulo, um breve resumo sobre PDFs é apresentado.

3.1 Modelo de Dois Fluidos

As equações para o Modelo de Dois Fluidos foram derivadas originalmente por Ishii (1975). Este modelo é o principal modelo pertencente à classe dos modelos de fases separadas, e tem sido largamente utilizado na resolução de escoamentos bifásicos em tubulações. Inicialmente, foi muito utilizado pela indústria nuclear, e posteriormente foi introduzido na indústria do petróleo, tendo sido incorporado em diversos códigos comerciais como PLAC (Black et al.,

1990), OLGA (Bendiksen et al., 1991).

No Modelo de Dois Fluidos o movimento das fases é descrito por um conjunto de equações de conservação para cada uma delas. De acordo com o Modelo de Dois Fluidos (Prosperetti e Tryggvason, 2007) determina-se o valor médio de uma função φ_K relativa à fase K como

$$\langle \varphi_K \rangle = \frac{1}{\int_{\forall_K} d\forall} \int_{\forall_K} \varphi_K d\forall \tag{3.1}$$

onde \forall_K representa o volume ocupado pela fase K .

As equações de conservação para a grandeza $\langle \varphi_K \rangle$ são obtidas através das médias das equações de conservação no volume \forall_K . Por exemplo, a equação de conservação de massa para a fase K é

$$\frac{\partial (\alpha_K \langle \rho_K \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_K \langle \rho_K \rangle \mathbf{U}_K) = \Gamma_K \tag{3.2}$$

onde $\langle \rho_K \rangle$ é a massa específica média da fase K , \mathbf{U}_K é o vetor velocidade médio da fase K , α_K é a fração volumétrica da fase K , definida como a fração do volume total \forall que a fase K ocupa.

$$\alpha_K = \frac{\forall_K}{\forall} \tag{3.3}$$

e Γ_K é a transferência de massa através da interface entre as fases.

Os escoamentos bifásicos em tubulações são normalmente fenômenos tridimensionais. No entanto, na indústria do petróleo, os comprimentos das tubulações são muitos elevados e a sua modelagem computacional é muito cara. Assim a utilização de modelos unidimensionais, que consideram que a tubulação é longa o suficiente para só trabalhar com médias na seção transversal, é muito conveniente, tendo sido utilizado neste trabalho.

Ao utilizar o procedimento de realizar uma média na seção transversal, as informações de variações das grandezas relevantes na direção normal ao escoamento médio dentro do duto são perdidas. Portanto, as transferências de quantidade de movimento entre a parede e os fluidos precisam ser expressas por

correlações empíricas ou modelos simplificados. O enfoque para obter um modelo uni-dimensional consiste em integrar um modelo tri-dimensional na área da seção transversal e então introduzir valores médios apropriados.

No presente trabalho foi tratado apenas o caso isotérmico, portanto as equações de conservação relevantes são as equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear. O conjunto de equações em sua forma unidimensional e transiente, com as hipóteses de que o escoamento é isotérmico e considerando que não há transferência de massa entre as fases, é mostrado a seguir, onde os símbolos $\langle \rangle$ foram omitidos por simplicidade:

Conservação de Massa:

- *Gás*

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial x} = 0 \tag{3.4}$$

- *Líquido*

$$\frac{\partial(\rho_L \alpha_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial x} = 0 \tag{3.5}$$

Balço de Quantidade de Movimento Linear:

- *Gás*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G^2)}{\partial x} = \\ = -\alpha_G \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta - \alpha_G \rho_G g \sin \beta - \frac{\tau_{wG} S_G}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \tag{3.6}$$

- *Líquido*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L^2)}{\partial x} = \\ = -\alpha_L \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos \beta - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A} + \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nas equações (3.4) a (3.7), os subscritos *L* e *G* representam as fases líquida

e gasosa, enquanto que x e t são as coordenadas; espacial e temporal, respectivamente. ρ , U e α são, nesta ordem, a massa específica, velocidade e frações volumétricas (ou “*hold-up*”) de cada fase; τ é a tensão cisalhante, g e β são a aceleração da gravidade e a inclinação da tubulação com a horizontal. p é a pressão média do gás.

Carneiro (2006) realizou uma análise detalhada da influência do salto de pressão na interface do lado do gás e líquido e concluiu que para analisar escoamento no regime de golfadas, onde o tamanho o comprimento de onda da perturbação é grande em relação ao diâmetro do tubo, este salto pode ser desprezado. Adicionalmente, uma vez que a altura hidrostática associada a fase gasosa é desprezível, a pressão média do gás é considerada, por simplicidade, igual ao valor na interface.

As duas parcelas da esquerda das equações (3.6) e (3.7), são referentes à inércia do gás e do líquido, respectivamente, i.e., são referentes à variação com o tempo da quantidade de movimento e ao fluxo de quantidade de movimento que atravessa a fronteira do sistema e são calculadas a partir das velocidades de cada fase.

No lado direito dessas equações, o primeiro termo corresponde à existência de uma força devida ao gradiente de pressão, a segunda parcela surge devido à ação gravitacional na seção transversal da tubulação e reflete a pressão hidrostática devida ao filme de gás e líquido, respectivamente.

A terceira parcela de cada equação é devida à força gravitacional sobre o gás e líquido. Como a aceleração gravitacional é sempre vertical, esta deve ser projetada na direção do escoamento. A quarta parcela representa a contribuição da força viscosa entre a parede e o fluido (gás e líquido de cada equação). Já a quinta parcela corresponde à tensão interfacial entre as fases.

Para a determinação das tensões cisalhantes líquido – parede (τ_{wL}), gás – parede (τ_{wG}) e líquido – gás (τ_i), considerou-se escoamento localmente hidrodinamicamente desenvolvido, com as tensões de cisalhamento baseadas na prescrição do fator de atrito do gás f_G , líquido f_L e interface f_i , respectivamente.

As tensões cisalhantes são definidas em função das velocidades relativas (entre parede e fases e entre fases), da massa específica, e do fator de atrito. A tensão cisalhante entre a parede e a fase K e na interface podem ser escritas como:

$$\tau_{wK} = \frac{1}{2} f_{wK} \rho_K |U_K| U_K \quad ; \quad \tau_i = \frac{1}{2} f_i \rho_G |U_G - U_L| (U_G - U_L) \quad (3.8)$$

Existe uma série de correlações disponíveis na literatura para a determinação do fator de atrito f_G , f_L e f_i . Ortega (2004) e Carneiro (2006) usaram as correlações apresentadas na Tabela 3.1 de acordo com o estudo realizado por Issa e Kempf (2003) e Bonizzi (2003), que determinaram que essas correlações são as mais adequadas para o escoamento de interesse (estratificado/golfada).

Nas equações apresentadas na Tabela 3.1, os números de *Reynolds* Re_{sL} , Re_G e Re_i são definidos, de acordo com Taitel e Dukler (1976) como:

$$Re_{sL} = \frac{\rho_L U_{sL} D}{\mu_L} \quad (3.9)$$

$$Re_G = \frac{\rho_G U_G D_{H,G}}{\mu_G} \quad ; \quad Re_i = \frac{\rho_G |U_G - U_L| D_{H,G}}{\mu_G}$$

Tabela 3.1 – Fórmulas para o cálculo do fator de atrito.

	$Re_G, Re_L, Re_i \leq 2100$ (Laminar)	$Re_G, Re_L, Re_i > 2100$ (Turbulento)
f_L	$\frac{24}{Re_{sL}}$ (Hand, 1991)	$0,0262(\alpha_i Re_{sL})^{0,139}$ (Spedding e Hand, 1997)
f_G	$\frac{16}{Re_G}$ (Hagen–Poiseuille)	$0,046(Re_G)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)
f_i	$\frac{16}{Re_G}$ (Hagen–Poiseuille)	$0,046(Re_i)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)

As definições apresentadas são baseadas na hipótese de que o gás escoa num canal fechado, uma vez que viaja a uma velocidade muito maior que a do líquido, o qual, por sua vez, escoa como se estivesse num canal aberto. Os números de *Reynolds* do gás e da interface são baseados no diâmetro hidráulico do gás, calculado através de sua área de escoamento, A_G , e perímetro molhado do gás, S_G , e da interface, S_i .

$$Dh_G = \frac{4A_G}{(S_G + S_i)} \quad (3.10)$$

Adicionalmente, nas expressões da Eq. (3.9) μ é a viscosidade dinâmica da fase, D é o diâmetro da tubulação e U_{sL} é a velocidade superficial do líquido, definida como:

$$U_{sL} = \alpha_L U_L \quad (3.11)$$

Neste modelo, a fase líquida segue a hipótese de incompressibilidade e a fase gasosa é considerada como compressível. Segundo Issa e Kempf (2003), os efeitos de compressibilidade são importantes nestes tipos de escoamento uma vez que, quando as golfadas se formam, podem ocorrer variações temporais e espaciais da pressão (e, portanto, da densidade) da ordem de 40%. Assim, a fase gasosa segue a lei dos gases ideais, dada por:

$$\rho_G = \frac{p}{RT} \quad (3.12)$$

onde p é a pressão média da fase gasosa, R é a constante do gás e T é a temperatura de referência.

As frações volumétricas do líquido e do gás estão relacionadas entre si, e considerando que a razão de volumes pode ser considerada igual a razão de áreas, tem-se:

$$\alpha_L + \alpha_G = 1, \quad \text{com} \quad \alpha_L = \frac{A_L}{A}; \quad \alpha_G = \frac{A_G}{A} \quad (3.13)$$

Os parâmetros geométricos da seção transversal encontram-se ilustradas na Fig. 3.1 onde h_L , S_k , S_i e A representam a altura de líquido no escoamento estratificado, o perímetro molhado pela fase K , o perímetro da interface e a área transversal da tubulação, $A = \pi D^2/4$, onde D representa o diâmetro.

A partir apenas de considerações geométricas (Fig. 3.1), pode-se demonstrar que:

$$\alpha_G = \frac{1}{\pi} \left[\cos^{-1}(\xi) - \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad (3.14)$$

$$S_G = D \cos^{-1}(\xi); \quad S_L = \pi D - S_G; \quad S_i = D\sqrt{1-\xi^2} \quad (3.15)$$

$$A_G = \frac{D}{4} [S_G - S_i \xi] \quad ; \quad A_L = \frac{\pi D^2}{4} - A_G \quad ; \quad (3.16)$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = -\xi \quad (3.17)$$

sendo

$$\xi = 2 \frac{h_L}{D} - 1 \quad (3.18)$$

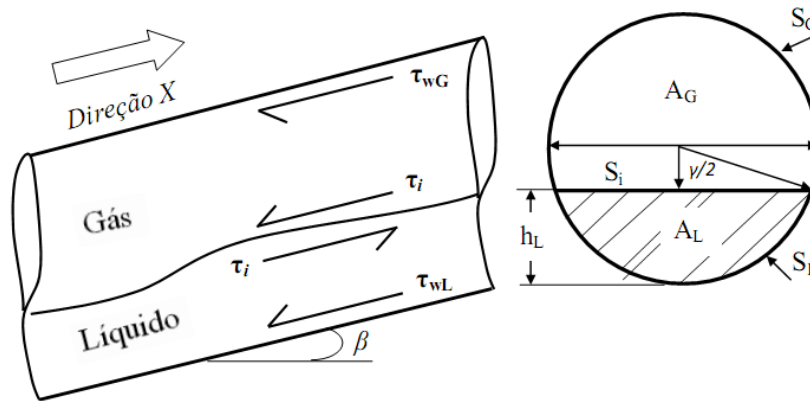


Figura 3.1 – Esquema da tubulação e seção transversal.

3.2 Condições de Contorno e Iniciais

Na presente formulação, um escoamento estratificado é considerado o ponto de partida para o desenvolvimento do regime de golfadas. No instante inicial a fração volumétrica, as velocidades de líquido e gás e a pressão são consideradas uniformes ao longo da tubulação, sendo os seus valores correspondentes às condições de contorno impostas. Para o escoamento estatisticamente permanente as condições iniciais não são relevantes, como mostrado por Ortega (2004) e Carneiro (2006).

Os valores das condições de contorno especificadas na entrada da tubulação são as velocidades superficiais de líquido ($U_{sL} = \alpha_L U_L$) e gás ($U_{sG} = \alpha_G U_G$) e a fração volumétrica da fase gasosa, α_G . A pressão na saída da tubulação foi

especificada como sendo igual à pressão atmosférica. A Fig. 3.2 ilustra as condições de contorno na geometria estudada.

Tendo por objetivo simular o escoamento no padrão de golfadas, é necessário selecionar condições de contorno adequadas para este padrão de escoamento. Isto pode ser realizado investigando mapas de padrões de escoamento. Adicionalmente é necessário que o sistema de equações seja bem posto, isto é, que uma solução única pode ser obtida independente dos parâmetros numéricos selecionados.

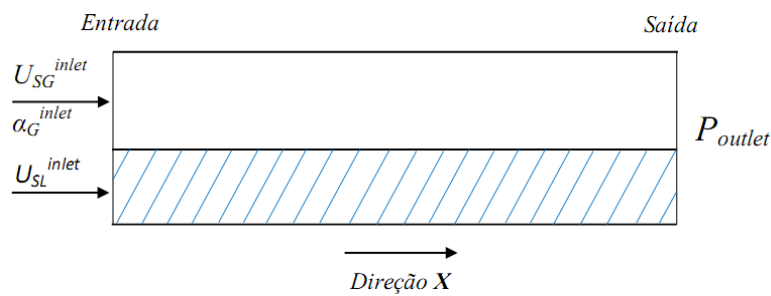


Figura 3.2– Condições de contorno utilizadas.

3.2.1 Mapa de Padrão e Condição para Sistema Bem Posto

O mapa de padrões de escoamento pode ser construído a partir da metodologia descrita por Carneiro (2006), sendo que as curvas de transição entre os diversos regimes são baseadas no trabalho de Taitel e Dukler (1976). A transição estratificado-golfadas é calculada, por outro lado, segundo Barnea e Taitel (1994), a qual contempla tanto casos viscosos e não-viscosos. A estratégia utilizada consiste em verificar sob que circunstâncias pequenas perturbações aplicadas em relação aos valores de equilíbrio crescem com o tempo, determinando a instabilidade da solução.

Os critérios para definir as transições entre os regimes de escoamento são mostrados a seguir:

Transição Entre o Regime Estratificado Suave e Estratificado Ondulado:

$$\frac{U_{sG}}{\alpha_G} \geq \left[\frac{4\nu_L(\rho_L - \rho_G)g \cos \beta}{s\rho_G(U_{sL} / \alpha_L)} \right]^{1/2} \tag{3.19}$$

onde $\nu_L = \mu_L/\rho_L$ representa a viscosidade cinemática do líquido e s é um coeficiente de correção, definido igual a 0,01. Os valores do *hold-up* do líquido (α_L) e do gás (α_G) são os valores de equilíbrio de escoamento estratificado.

Transição Entre os Regimes Intermitente e Bolhas Dispersas:

$$\frac{U_{sL}}{\alpha_L} \geq \left[\frac{4A_G}{S_i} \frac{g \cos \beta}{f_L} \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right) \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

onde α_L é o *hold-up* de equilíbrio e S_i e A_G são perímetro da interface e área da seção transversal ocupada pelo gás, dados pelas Eqs. (3.15) e (3.16), respectivamente e f_L é o fator de atrito do líquido com a parede, calculado segundo a Tabela 3.1.

Transição Entre os Regimes Estratificado e Golfada:

$$U_G - U_L < K \left[\left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \right) (\rho_L - \rho_G) g \cos \beta \frac{A}{dA_L / dh_L} \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

Para o caso não viscoso, $K = 1$; para o caso viscoso, $K = K_V$, onde

$$K_V = \sqrt{1 - \frac{(C_V - C_{IV})^2}{\frac{(\rho_L - \rho_G)}{(\frac{\rho_L}{\alpha_L} + \frac{\rho_G}{\alpha_G})} g \cos \beta \frac{A}{dh_L}}} \quad (3.22)$$

onde os parâmetros C_V e C_{IV} representam as velocidades críticas das ondas na iminência de se tornarem instáveis, para o caso viscoso e não-viscoso, respectivamente. A variação da área de líquido com a altura é igual a S_i .

Barnea e Taitel (1994) sugeriram a simplificação desta expressão através da introdução do seguinte fator de correção,

$$K = K_{TD} = 1 - \frac{h_L}{D} \quad (3.23)$$

A caracterização de um sistema como sendo um sistema bem posto é uma propriedade do processo de modelagem e não uma propriedade específica do

próprio escoamento. Para um fluido incompressível, pode-se demonstrar que o Modelo de Dois Fluidos é condicionalmente bem posto quando a velocidade relativa entre as fases fica abaixo de um dado valor, (Chun & Sung, 1996). Este valor coincide com o critério de estabilidade de Kelvin-Helmholtz para escoamentos não viscosos (IKH), desenvolvido por Barnea e Taitel (1994), sendo apresentado a seguir:

$$(U_G - U_L)^2 < \left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \frac{\alpha_G}{\rho_G}\right)(\rho_L - \rho_G)g \cos \beta \frac{A}{S_i} \quad (3.24)$$

Uma vez que o modelo de Dois Fluidos Uni-dimensional apresenta diversas hipóteses simplificadores, o sistema de equações resultante pode não ser bem posto, o que depende das condições de operação. Infelizmente, caso o sistema de equações seja mal posto, não é possível obter solução numérica com o presente modelo. Novos termos podem ser considerados visando transformar o problema em bem posto (Holmas et al, 2008). Este tipo de análise foge ao escopo desta dissertação.

O procedimento realizado para criar as curvas de transição no mapa de padrões, assim como a curva que separa a região onde o sistema de equações é bem posto e mal posto é análogo. O procedimento consiste em considerar constante a velocidade superficial do gás e ir gradualmente incrementando a velocidade superficial do líquido desde zero até que o critério desejado deixe de ser satisfeito. Quando isto acontece, o primeiro par de vazões volumétricas U_{SG} , U_{SL} , é determinado. O procedimento é repetido para toda a faixa de velocidades superficiais do gás, para obter cada uma das curvas desejadas. Para obter as curvas é necessário determinar a fração volumétrica da fase líquida, que é obtida para a condição de escoamento estratificado em equilíbrio para dadas vazões volumétricas das fases, independente do padrão de escoamento esperado, isto é, estratificado ou golfadas (Barnea e Taitel, 1994).

Em condições em que o regime de golfadas acontece na tubulação, pode-se assumir que na região da entrada há escoamento estratificado, em que o nível de líquido situa-se num valor de equilíbrio, denominado de *hold-up* de equilíbrio. Para tal, pode-se assumir uma condição de regime permanente nas Eqs. (3.6) e (3.7). Assim, eliminando-se as derivadas com respeito à posição e ao tempo e eliminando-se o gradiente de pressão obtém-se a seguinte expressão:

$$-\alpha_L(\rho_L - \rho_G)g \sin \beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A_L} - \frac{\tau_{wG} S_G}{A_G} - \frac{\tau_i S_i}{A} \left(\frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha_G} \right) = 0 \quad (3.25)$$

Os valores do *hold-up* de equilíbrio podem ser obtidos através da Eq. (3.25), dados os valores para as velocidades superficiais de líquido e gás, por meio de um método iterativo qualquer (uma vez que se trata de uma equação não-linear). O procedimento escolhido aqui foi o método da secante (Press, 1992). Depois de calculado este parâmetro, verifica-se o critério dado pela equação correspondente.

O procedimento para determinar as curvas de transição é o mesmo descrito para a curva de bom posto, o espectro do mapa de velocidades superficiais é varrido, verificando os pontos para os quais o critério para a estabilidade é violado, quando deve haver uma mudança no padrão de escoamento.

3.3

Variáveis do Escoamento Estatisticamente Permanente

Como o escoamento de golfadas é aleatório, uma vez obtido o campo de velocidades, pressão e fração volumétrica estatisticamente permanente, pode-se determinar o comprimento médio da golfada, sua velocidade de translação e frequência.

Inicialmente determina-se a média temporal de cada uma dessas variáveis ao longo do duto

$$\overline{\varphi_K} = \frac{1}{\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \Delta t} \int \langle \varphi_K \rangle dt \quad (3.26)$$

onde Δt é o intervalo de tempo de amostragem. A seguir, uma média espacial também pode ser calculada.

$$\overline{\overline{\varphi_K}} = \frac{1}{L} \int_L \overline{\varphi_K} dx \quad (3.27)$$

3.3.1.

Função Densidade de Probabilidade: PDF

Como mencionado, a função de densidade da probabilidade (PDF) é muito útil para auxiliar na compreensão do comportamento de variáveis aleatórias

contínuas. Com descrito por Naghettini e De Andrade (2007), um modelo de distribuição de probabilidades é uma forma matemática abstrata, a qual, por suas características intrínsecas de variabilidade e conformação, deve ser capaz de representar, de modo conciso, as variações possíveis de uma variável aleatória. Uma PDF tem o propósito de avaliar cenários estatisticamente similares aos observados referentes a um grande número de diferentes conjuntos de valores de uma variável aleatória, os quais são distribuídos de acordo com uma certa função densidade de probabilidades.

De acordo com Bernicot e Drouffe (1989, 1991), Dhulesia et al. (1991, 1993) e Barnea e Taitel (1993), os comprimentos das golfadas para um escoamento completamente desenvolvido normalmente seguem uma distribuição Log-Normal. Nydal et al. (1992) indicou que mesmo em tubulações curtas, o comprimento da golfada também segue uma distribuição Log-Normal. Ujang (2006) utilizou diversas PDF como a Normal, Log-Normal, Inversa Gaussiana e Log-Normal com três parâmetros para descrever o comportamento do comprimento das golfadas e o intervalo de tempo de passagem delas ao longo da tubulação.

Nesta seção apresenta-se a formulação dos dois modelos de distribuição de probabilidades capazes de sintetizar o comportamento de variáveis aleatórias (particularmente o comprimento da golfada): distribuição Normal e Log-Normal.

A função densidade da probabilidade é uma função que representa a distribuição da probabilidade em termos de integrais. A PDF é qualquer função $f(x)$ que descreve a densidade de probabilidade em termos da variável de entrada x do seguinte modo:

- $f(\varphi)$ é maior ou igual a zero para todos os valores de φ
- A área total embaixo do gráfico é 1.

Uma PDF não é uma função simples, pelo contrário é uma família de funções caracterizadas por um ou mais parâmetros. Porém, uma vez definidos os parâmetros da PDF, a função é univocamente definida.

Distribuição Normal

A distribuição Normal também é conhecida como de distribuição de Gauss, em referência ao emprego pioneiro dessa distribuição no tratamento dos erros

aleatórios de medidas experimentais, atribuído ao matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855). A distribuição Normal é utilizada para descrever o comportamento de uma variável aleatória que flutua de forma simétrica em torno de um valor central. Construindo-se o histograma desses valores e o correspondente polígono de frequência, obtêm-se uma poligonal aproximadamente simétrica. O estudo do problema dos erros de medida levou a introdução da curva que, mais tarde, recebeu o nome de curva normal. Algumas de suas propriedades matemáticas, a serem discutidas no presente trabalho, fazem do modelo Normal a distribuição apropriada à modelagem de variáveis que resultam da soma de um grande número de outras variáveis independentes.

A distribuição normal é a mais importante das distribuições contínuas da probabilidade. A PDF da variável aleatória normal φ , com média μ e desvio padrão σ é dada por:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\varphi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.28)$$

onde para n eventos:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \mu)^2} \quad (3.29)$$

Considere X o espaço de amostragem de φ , e que φ é normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ , ou, sinteticamente, que $X \sim N(\mu, \sigma)$. Portanto, a média de uma variável Normal X é igual ao parâmetro de posição, em torno do qual os valores de X se dispersam simetricamente. O grau com que a variável X se dispersa em torno de μ , é dado pelo parâmetro de escala, o qual é igual ao desvio padrão σ . A Figura 3.3 exemplifica os efeitos das variações marginais dos parâmetros de posição e escala da distribuição Normal.

Distribuição Log-Normal

Suponha que uma certa variável contínua X resulte da ação multiplicativa de um grande número de componentes aleatórios independentes X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ou seja que $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Nesse caso, a variável $Y = \ln(X)$, tal que $Y = \ln(X_1) + \ln(X_2) + \dots + \ln(X_n)$. Em decorrência do teorema do limite central, Y irá tender a uma variável Normal, com parâmetros μ_y e σ_y , quando n for suficientemente

grande para permitir a convergência. Sob tais condições, diz-se que a variável X segue uma distribuição Log-Normal, com parâmetros μ_y e σ_y , indicando-se sinteticamente que $X \sim \ln(\mu_y, \sigma_y)$.

A função densidade de uma variável Log-Normal X é dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \tag{3.30}$$

onde:

$$y_i = \ln \varphi_i \quad ; \quad \mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad ; \quad \sigma_y = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (y_i^2 - \mu_y)^2} \tag{3.31}$$

A Figura 3.4 exemplifica a variação da forma da densidade Log-Normal para alguns valores do parâmetro de escala σ_y , mantendo constante o parâmetro de posição μ_y .

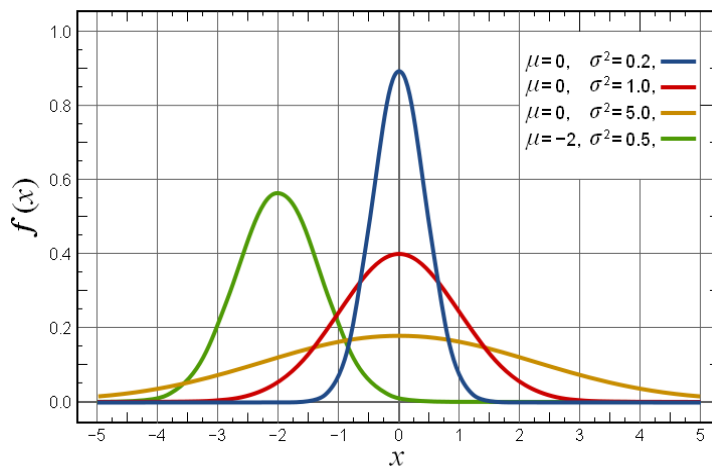


Figura 3.3 – A Função Densidade de Probabilidade Normal

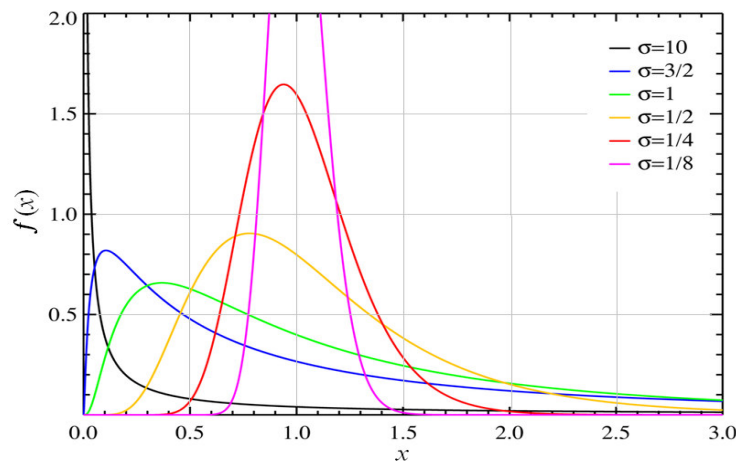


Figura 3.4 – A Função Densidade de Probabilidade Log-Normal.

Cálculo do Erro-Padrão

Para definir qual a melhor distribuição de probabilidade ajustada aos dados numéricos obtidos, foi utilizado o critério da menor estimativa do erro-padrão, conforme sugerido por Kite (1978), dado por:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum (X_i - X_{e_i})^2}{n - m}} \quad (3.32)$$

onde ε é o erro-padrão para uma distribuição de probabilidade; X_i é o valor medido ou obtido i ; X_{e_i} é o valor estimado pela distribuição de probabilidade; n é o número de elementos medidos ou obtidos; m é o número de parâmetros estimados para a distribuição de probabilidade.