

3 Formulação Matemática

3.1. Equações de Conservação e Teoria da Lubrificação

As equações de Navier-Stokes para o caso mais simples de um fluido ideal com viscosidade zero estabelecem que a aceleração seja proporcional a derivada da pressão. Isto significa que as soluções das equações de Navier-Stokes para um dado problema físico podem ser obtidas facilmente. Em termos práticos, somente os casos mais simples podem ser resolvidos sem a contribuição de cálculos numéricos. Estes casos frequentemente envolvem geometrias simples, fluxo não-turbulento, normalmente quando a viscosidade do fluido é grande, ou sua velocidade pequena, baixo número de Reynolds.

Para o equacionamento do modelo desenvolvido para este trabalho, as equações de Navier-Stokes foram base para geração das equações implementadas em MATLAB®. Conforme indicado na Figura 2.8, considerou-se o sistema de coordenadas cilíndricas para o equacionamento e simplificação das equações de Navier-Stokes, abaixo apresentadas pelas Equações 3.1, 3.2 e 3.3 na forma completa para as componentes radial, angular e longitudinal, respectivamente.

Componente em radial:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad 3.1$$

Componente em angular:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad 3.2$$

Componente em longitudinal:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad 3.3$$

Andrade (2008) cita que a velocidade radial (u_r) e a pressão na direção radial $\left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)$ podem ser desprezadas, pois a extensão do capilar é muito maior que o raio.

Também podem ser desprezadas as variações das velocidades longitudinal $\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)$ e radial $\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)$, pois segundo Andrade (2008), o número de Reynolds característico é muito pequeno. Já a variação da velocidade angular com o tempo $\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)$ é nula, pois o modelo considera um capilar simétrico.

Já as forças inerciais podem ser desprezadas em caso de escoamentos capilares em meios porosos simulados por micro canais, pois o número de Reynolds é menor que 1.

Desta forma, as equações de Navier-Stokes se tornam mais simples, uma vez que todos os termos das componentes radiais e angulares podem ser eliminados, bem como os gradientes de pressão que não variam com a direção longitudinal. Por fim a Equação 3.4, representa a equação de Navier-Stokes simplificada pelas considerações acima, que será utilizada como base do equacionamento do modelo para os fluidos de fase dispersa e contínua.

$$-\frac{dP}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = 0 \quad 3.4$$

As condições de contorno do sistema, apresentadas abaixo são fundamentais para determinar as equações que modelam o problema. Neste trabalho, a Equação 3.4 é escrita para cada uma das fases.

$$\begin{aligned} \text{Fluido 1, ou fase dispersa:} & \begin{cases} r = 0 \rightarrow \frac{du_1}{dr} = 0 \\ r = R_{\text{int}} \rightarrow \mu_1 \frac{du_1}{dr} = \mu_2 \frac{du_2}{dr} \end{cases} \\ \text{Fluido 2, ou fase contínua:} & \begin{cases} r = R_{\text{int}} \rightarrow u_1 = u_2 \\ r = R \rightarrow u_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Na primeira condição de contorno do fluido da fase dispersa, como não há variação do vetor velocidade na direção radial, no eixo de simetria, logo $\frac{du_1}{dr} = 0$. Por sua vez, na interface entre os fluidos ($r = R_{\text{int}}$) observam-se duas condições de contorno que retratam a física envolvida: a igualdade entre as tensões cisalhantes dos dois fluidos e a igualdade entre as velocidades de escoamento de ambas as fases, retratando condição de não deslizamento.

Estas duas últimas condições de contorno foram escolhidas para cada um dos fluidos de forma aleatória, e sua alternância não interfere nos resultados finais. Por fim, a última condição de contorno da fase contínua, a velocidade é nula na parede do capilar.

Tais condições aplicadas na Equação 3.4, escrita para os fluidos das fases dispersa e contínua são bases para a geração do modelo aplicado neste trabalho.

3.2. Equações de Evolução da Interface e Pressão Capilar

A memória de cálculo pode ser analisada a seguir, onde se encontra o histórico de desenvolvimento e as equações resultantes. As duas equações resultantes são a combinação da teoria de lubrificação e conservação de massa. Estas equações serão implementadas em ambiente MATLAB®, sendo discretizadas por diferenças finitas de segunda ordem e resolvidas pelo método implícito.

Para o fluido de fase dispersa, com denotação de índice 1, escreve-se a equação de Navier-Stokes simplificada da seguinte forma:

$$-\frac{dP_1}{dz} + \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_1}{dr} \right) = 0 \quad 3.5$$

Considerando as condições de contorno aplicáveis ao fluido da fase dispersa pode-se escrever as expressões abaixo:

- Condição A: $r = 0 \rightarrow \frac{du_1}{dr} = 0$
- Condição B: $r = R_{\text{int}} \rightarrow \mu_1 \frac{du_1}{dr} = \mu_2 \frac{du_2}{dr}$

Para o fluido de fase contínua, a denotação de índice 2, e escreve-se a equação de Navier-Stokes simplificada da seguinte forma:

$$-\frac{dP_2}{dz} + \mu_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_2}{dr} \right) = 0 \quad 3.6$$

Considerando as condições de contorno aplicáveis ao fluido da fase contínua podem-se escrever as expressões abaixo, que completam as condições de contorno necessárias à solução do sistema:

- Condição C: $r = R_{\text{int}} \rightarrow u_1 = u_2$
- Condição D: $r = R \rightarrow u_2 = 0$

Ao se resolver a sequência de expressões abaixo, determina-se as expressões das velocidades u_1 e u_2 , velocidade do fluido de fase dispersa, e velocidade do fluido de fase contínua, respectivamente.

$$\int d\left(r \frac{du_1}{dr}\right) = \int \frac{r}{\mu_1} \frac{dP_1}{dz} dr \quad 3.7$$

$$r \frac{du_1}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{1}{\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + C_1 \quad \therefore \text{semelhante para o fluido 2} \Rightarrow r \frac{du_2}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{1}{\mu_2} \frac{dP_2}{dz} + C_3$$

$$\int du_1 = \int \left(\frac{r}{2\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + \frac{C_1}{r} \right) dr \quad 3.8$$

$$u_1(r) = \frac{r^2}{4\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad \therefore$$

$$\text{semelhante para o fluido 2} \Rightarrow u_2(r) = \frac{r^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} + C_3 \ln(r) + C_4$$

Aplicando as condições de contorno acima, pode-se determinar as constantes das equações de velocidade, conforme segue:

$$r \frac{du_1}{dr} = \frac{r}{2} \frac{1}{\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + C_1 \quad C_1 = 0 \quad 3.9$$

$$C_4 = -\frac{R^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - C_3 \ln(R) \quad 3.10$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{int}}^2}{4\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + C_2 &= \frac{R_{\text{int}}^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} + C_3 \ln(R_{\text{int}}) - \frac{R^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - C_3 \ln(R) \therefore \\ C_2 &= \frac{R_{\text{int}}^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} + C_3 \ln(R_{\text{int}}) - \frac{R^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - C_3 \ln(R) - \frac{R_{\text{int}}^2}{4\mu_1} \frac{dP_1}{dz} \end{aligned} \quad 3.11$$

$$\frac{R_{\text{int}}}{2} \frac{dP_1}{dz} = \frac{R_{\text{int}}}{2} \frac{dP_2}{dz} + C_3 \frac{\mu_2}{R_{\text{int}}} \therefore C_3 = \frac{R_{\text{int}}^2}{2\mu_2} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \quad 3.12$$

$$C_4 = -\frac{R^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - \frac{R_{int}^2}{2\mu_2} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \ln(R) \quad 3.13$$

$$C_2 = \frac{R_{int}^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} + \frac{R_{int}^2}{2\mu_2} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \ln(h) - \frac{R^2}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - \frac{R_{int}^2}{2\mu_2} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \ln(R) - \frac{R_{int}^2}{4\mu_2} \frac{dP_1}{dz} \quad 3.14$$

Com as constantes definidas, as expressões de velocidade para os fluidos são reescritas conforme as equações 3.15 e 3.16.

$$u_1(r) = \frac{1}{4\mu_1} \frac{dP_1}{dz} (r^2 - R_{int}^2) + \frac{dP_2}{dz} \frac{1}{4\mu_1} (R_{int}^2 - R^2) + \frac{R_{int}^2}{2\mu_1} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) \quad 3.15$$

$$u_2(r) = \frac{1}{4\mu_1} \frac{dP_2}{dz} (r^2 - R_{int}^2) + \frac{R_{int}^2}{2\mu_2} \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) \quad 3.16$$

Com as expressões das velocidades das Equações 3.15 e 3.16 pode-se integrá-las ao longo da circunferência do capilar para que sejam determinadas as expressões das vazões dos fluidos, Equações 3.17 e 3.18. Ambas as expressões são escritas em função do raio da interface entre os fluidos (R_{int}), do raio do capilar (R), da pressão do fluido de fase dispersa (P_1), a pressão do fluido de fase contínua (P_2) e suas respectivas viscosidades (μ_1 e μ_2).

$$q_1 = 2\pi \int_0^{R_{int}} r u_1 dr \quad 3.17$$

$$q_2 = 2\pi \int_{R_{int}}^R r u_2 dr \quad 3.18$$

Resolvendo a Equação 3.17 e considerando a Equação 3.15, que descreve a velocidade do fluido de fase dispersa, obtém-se a expressão da vazão para este fluido (q_1), descrita pela Equação 3.19.

$$q_1 = -\frac{\pi \cdot R_{int}^4}{16\mu_1} \frac{dP_1}{dz} + \frac{\pi}{4\mu_2} \frac{dP_2}{dz} \left(\frac{R_{int}^4}{2} - \frac{R^2 R_{int}^2}{2} \right) + \frac{\pi \cdot R_{int}^4}{4\mu_2} \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) \left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} \right) \quad 3.19$$

A expressão da pressão capilar pode ser escrita pela Equação 3.20, e na forma diferencial pela Equação 3.21. Para eliminar a variável da pressão do fluido da fase dispersa (P_1) na Equação 3.19, utiliza-se a Equação 3.21. O resultado é a expressão da vazão para o fluido de fase dispersa, escrita pela Equação 3.22, que depende apenas de duas variáveis: o raio da interface entre os fluidos (R_{int}) e a pressão da fase contínua (P_2).

$$P_C = P_1 - P_2 = \frac{\sigma}{R_{int}} \quad 3.20$$

$$\frac{dP_1}{dz} - \frac{dP_2}{dz} = -\frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \quad 3.21$$

$$q_1 = 2\pi \left[\frac{R_{int}^4}{16\mu_1} \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + \frac{R_{int}^2}{2} \left(\frac{R_{int}^2}{4} \left(\frac{\frac{dP_2}{dz}}{\mu_2} - \frac{\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz}}{\mu_1} \right) - \frac{\sigma}{2\mu_2} \frac{dR_{int}}{dz} \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) - \frac{\frac{dP_2}{dz} R^2}{4\mu_2} \right) \right] \quad 3.22$$

De forma semelhante à determinação da expressão da Equação 3.22 para a fase dispersa, a vazão da fase contínua (q_2) também pode ser determinada. O resultado é a expressão da vazão para o fluido de fase contínua, escrita pela Equação 3.23, dependente apenas das mesmas duas variáveis: o raio da interface entre os fluidos (R_{int}) e a pressão da fase contínua (P_2).

$$q_2 = -\frac{1}{8\mu_2} \pi \left(\begin{aligned} & \left(-4R_{int}^2 \frac{dP_2}{dz} R^2 - 2R_{int}^4 \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + 3R_{int}^4 \frac{dP_2}{dz} + \right. \\ & \left. 4R_{int}^4 \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + 4R_{int}^4 \ln\left(\frac{R}{R_{int}}\right) \frac{dP_2}{dz} + 2R^2 R_{int}^2 \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + \right. \\ & \left. R^4 \frac{dP_2}{dz} \right) \end{aligned} \right) \quad 3.23$$

A Equação 3.24 descreve a equação da continuidade para a vazão q_2 . A Equação 3.25, representa a equação de continuidade para o fluido da fase contínua, e se torna a primeira equação do sistema a ser resolvido.

$$\frac{dq_2}{dz} = \pi \frac{\partial R_{int}}{\partial t} \quad 3.24$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & \left(-4R_{int}^2 \frac{d^2 P_2}{dz^2} R^2 - 2R_{int}^4 \left(\frac{d^2 P_2}{dz^2} + \frac{2\sigma}{R_{int}^3} \left(\frac{dR_{int}}{dz} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \left(\frac{d^2 R_{int}}{dz^2} \right) \right) + 3R_{int}^4 \frac{d^2 P_2}{dz^2} + \right. \\ & -\frac{1}{8\mu_2} \pi \left(4R_{int}^4 \ln\left(\frac{R_{int}}{R}\right) \left(\frac{d^2 P_2}{dz^2} + \frac{2\sigma}{R_{int}^3} \left(\frac{dR_{int}}{dz} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \left(\frac{d^2 R_{int}}{dz^2} \right) \right) + 4R_{int}^4 \ln\left(\frac{R}{R_{int}}\right) \frac{d^2 P_2}{dz^2} \right. \\ & \left. \left. + 2R^2 R_{int}^2 \left(\frac{d^2 P_2}{dz^2} + \frac{2\sigma}{R_{int}^3} \left(\frac{dR_{int}}{dz} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \left(\frac{d^2 R_{int}}{dz^2} \right) \right) + R^4 \frac{d^2 P_2}{dz^2} \right) \right) \\ & - 2\pi R_{int} \frac{dR_{int}}{dt} = 0 \end{aligned} \right) \quad 3.25 \end{aligned}$$

A Equação 3.25 é dependente de duas incógnitas: da pressão do fluido de fase contínua (P_2) e do raio da interface entre os fluidos (R_{int}). Para que seja formada a segunda equação do sistema utiliza-se a conservação de massa. Ou seja, o somatório das vazões de cada fluido ($q_1 + q_2 = 0$), deverá ser nulo. Então a expressão da Equação 3.26, que também depende da pressão do fluido de fase contínua (P_2) e do raio da interface entre os fluidos (R_{int}) é a segunda equação do sistema.

$$\begin{aligned}
 & \left(2\pi \left[\frac{R_{int}^4}{16\mu_1} \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + \frac{R_{int}^2}{2} \left(\frac{R_{int}^2}{4} \left(\frac{1}{\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) \right) - \frac{\sigma}{2\mu_2} \frac{dR_{int}}{dz} \ln \left(\frac{R_{int}^2}{R} \right) \right] \right) \right) \\
 & - \frac{1}{8\mu_2} \left(\pi \left[\left(-4R_{int}^2 \frac{dP_2}{dz} R^2 - 2R_{int}^4 \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + 3R_{int}^4 \frac{dP_2}{dz} + 4R_{int}^4 \ln \left(\frac{R_{int}}{R} \right) \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4R_{int}^4 \ln \left(\frac{R}{R_{int}} \right) \frac{dP_2}{dz} + 2R_{int}^2 R^2 \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_{int}^2} \frac{dR_{int}}{dz} \right) + R^4 \frac{dP_2}{dz} \right] \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Para determinação do tempo de quebra de gota será necessário apenas conhecer as características dos fluidos de fase dispersa e fase contínua e da geometria do capilar. Como pode ser observado, o modelo requererá poucas definições, sendo todas possíveis de serem determinadas ou estimadas em testes experimentais.

Desta forma, as dependências de geometria e características de fluidos segundo Gauglitz, et. al (1988), Roof (1970) e Rossen (1999) estão indicadas neste equacionamento.

3.3. Solução do Sistema de Equações pelo Método das Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas é uma das técnicas para a discretização de equações diferenciais. A derivada de um determinado campo é aproximada pela diferença de valores discretos do campo. Por exemplo, $\frac{dP}{dz} \approx \frac{(P_1 - P_0)}{(z_1 - z_0)}$ corresponde a uma fórmula de diferenças finitas para o cálculo da primeira derivada.

O objetivo do método é transformar uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, aproximando as derivadas por diferenças entre valores nodais. A equação aproximada é escrita em cada ponto nodal gerando um número “N” de equações, correspondentes a quantidade de nós atribuídos a malha. As aproximações das derivadas são feitas utilizando a série de Taylor truncada, conforme se vê abaixo:

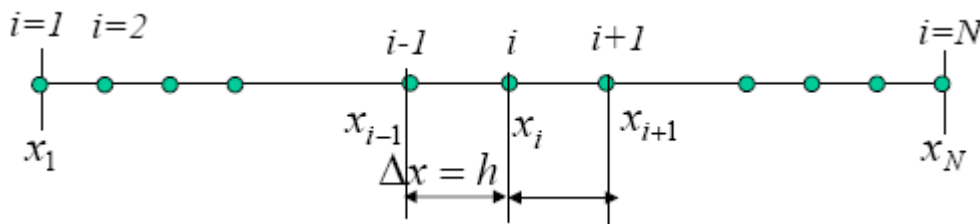


Figura 3.1: Distribuições esquemática de nós.

Combinando as aproximações algébricas através da série de Taylor truncada com o método de diferenças finitas centrais, as derivadas de primeira e segunda ordem da pressão, por exemplo, podem ser reescritas da forma que se seguem:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{(P_{i+1} - P_{i-1})}{(z_{i+1} - z_{i-1})} \tag{3.27}$$

$$\frac{d^2P}{dz^2} = \frac{\frac{(P_{i+1} - P_i)}{(z_{i+1} - z_i)} - \frac{(P_i - P_{i-1})}{(z_i - z_{i-1})}}{\frac{(z_{i+1} + z_i)}{2} - \frac{(z_i + z_{i-1})}{2}} \tag{3.28}$$

Aplicando o método descrito acima nas equações 3.25 e 3.26, forma-se um conjunto de $2 \cdot N$ (onde N é o número de nós) não-lineares com $2 \cdot N$ incógnitas que podem ser implementadas em um programa MATLAB®. As equações do sistema discretizado, 3.29 e 3.30, são escritas na forma algébrica, e por questões de simplicidade na implementação adota-se a seguinte notação:

$P = P_2 \rightarrow$ pressão do fluido da fase contínua;

$R = r \rightarrow$ raio do poro, ou seja, da geometria;

$R_{int} = R \rightarrow$ raio da interface entre os fluidos.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{aligned}
 & -4R_i^2 \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{r_i^2}{\frac{z_{i+1} + z_i}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2}} \\
 & -2R_i^4 \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{2\sigma}{R_i^3} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} + z_i} - \frac{R_i - R_{i-1}}{z_i + z_{i-1}} \right) \right) \\
 & +3R_i^4 \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{r_i^2}{\frac{z_{i+1} + z_i}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2}} \\
 & -\frac{1}{8\mu_2} \pi + 4R_i^4 \ln \left(\frac{R_i}{r_i} \right) \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{2\sigma}{R_i^3} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} + z_i} - \frac{R_i - R_{i-1}}{z_i + z_{i-1}} \right) \right) \\
 & +4R_i^4 \ln \left(\frac{r_i}{R_i} \right) \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{r_i^2}{\frac{z_{i+1} + z_i}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2}} \\
 & +2r_i^2 R_i^2 \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{2\sigma}{R_i^3} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right)^2 - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_i}{z_{i+1} + z_i} - \frac{R_i - R_{i-1}}{z_i + z_{i-1}} \right) \right) \\
 & +r_i^4 \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \frac{r_i^2}{\frac{z_{i+1} + z_i}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2}}
 \end{aligned} \right) \\
 & -2R \left(\frac{R_{i,j+1} - R_{i,j}}{t_{i+1} - t_i} \right) = 0 \quad , i = 2, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

3.29

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{R_i^4}{16\mu_1} \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{R_i^2}{2} \left(\frac{R_i^2}{4} \left(\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) - \frac{1}{\mu_1} \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) \right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\sigma \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \ln \left(\frac{R_i}{r_i} \right)}{2\mu_2} - \frac{r_i^2 \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right)}{4\mu_2} \right) \right) \\
 & - \frac{1}{8\mu_2} \left(\pi \left(-4R_i^2 \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) r_i^2 - 2R_i^4 \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) + 3R_i^4 \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) \right. \\
 & \left. + 4R_{int}^4 \ln \left(\frac{R_i}{r_i} \right) \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) \right. \\
 & \left. + 4R_i^4 \ln \left(\frac{r_i}{R_i} \right) \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) + 2R_i^2 r_i^2 \left(\left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) - \frac{\sigma}{R_i^2} \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) + r_i^4 \left(\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} \right) \right) \right) = 0 \\
 & , i = 2, \dots, N - 1
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

No modelo, para o primeiro e último nós são consideradas as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} i = 1 \Rightarrow P(2) = P(1) \text{ e } R(2) = R(1) \\ i = N \Rightarrow P(N - 1) = P(N) \text{ e } R(N - 1) = R(N) \end{cases} \tag{3.31}$$

3.4. Solução do Sistema Não-Linear pelo Método de Newton

O método de Newton sob determinadas condições apresenta vantagens sobre os demais métodos, por ser de convergência rápida. Este método iterativo é amplamente aplicado para determinar soluções de equações não lineares, e consiste em, a partir de uma condição inicial construir uma matriz Jacobiana. Essa matriz recebe como entradas as derivadas das equações componentes do sistema, em relação a cada variável envolvida.

Com um vetor auxiliar, onde se atribui a função de resíduo das iterações é construído um processo repetitivo com a matriz Jacobiana para determinação das variáveis de interesse.

Em termos matemáticos aplicando ao equacionamento deste trabalho:

$$\Delta(P, R) = -inv(J(P, R)) \cdot res(P, R) \quad 3.32$$

O método de Newton foi utilizado para a solução do sistema apresentado na Seção 3.3 é método iterativo, e consiste resumidamente em:

- Dar um chute inicial para a solução do sistema;
- Construir a matriz Jacobiana, que recebe como entradas as derivadas das equações que constituem o sistema, em relação a cada variável envolvida;
- Determinar a função resíduo;
- Determinar a solução parcial do sistema aplicando a Equação 3.32;
- Solução = chute inicial da iteração atual + correção da solução;
- Verificar se a solução satisfaz a tolerância determinada;
- Repetição do processo, em caso de não satisfação do item anterior;