Referências Bibliográficas

[1] WEERACKODY, V.; CUEVAS, E.. **A statistical approach to specifying the off-axis EIRP spectral density in on-the-move satellite communications**. Proceedings of the IEEE, 2008. 3.3, 3.3

[2] MINKIN, VLADIMIR; VOSCHININ, A.. **Asymptotic method for predicting error performance parameters and objectives for constant bit rate digital paths carried by digital radio-relay systems**. Radio Research & Telecommunication Institute - NIIR, 2000. 3.1, B

[3] SAMPAIO NETO, R.. **Técnicas de modulação/demodulação. pttd - programa de treinamento em transmissão digital**. Embratel, 1988. 3.1

[4] ITU. **Maximum permissible levels of interference in a satellite network (gso/fss; non-gso/fss; non-gso/mss feeder links)* in the fixed-satellite service caused by other codirectional fss networks below 30 ghz**. Recommendation ITU-R S.1323, 1997. 2, 4.2

[5] ITU. **Allowable error performance for a hypothetical reference digital path based od synchronous digital hierarchy**. Recommendation ITU-R S.1521-1, 2010. 3.1, 4.2, 4.2, 4.2, 4.2, 4.2, 4.2, 5

[6] G.MARAL, M. B.. **Satellite Communications Systems: Systems Techniques and Technology**. John Wiley & Sons, 2000. 3.3

[7] ANDRADE, ELEONORA A. M. DE; FORTES, J. M. P.. **Consideração conjunta da atenuação por chuvas e de interferências externas na estimação dos parâmetros de desempenho de enlaces digitais terrestres**. Dissertação de Mestrado, 2008. 1, 3.1, 3.1, 3.1, 3.1, B

[8] ALBUQUERQUE, JOSÉ PAULO DE A.; FORTES, J. M. P. F. W. A.. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos**. Editora Interciência, 2008. A, A, B.1, B.1, B.4, B.4

[9] ITU. **Propagation data and prediction methods required for the design of earth-space telecommunication system**. Recommendation ITU-R P.618-10, 2009. 3.2, 3.2, 4

[10] SHAO, M.; NIKIAS, C. L. M.. **Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications.** Proceedings of the IEEE, 81:986–1010, 1993. 3.3

A
Aspectos sobre a Teoria da Probabilidade

O comportamento estatístico de uma variável aleatória w pode ser caracterizado por sua Função Distribuição de Probabilidade (FDP) $F_w(W)$, que associa a cada valor real W a probabilidade de a variável aleatória assumir um valor menor ou igual a W [8], ou seja, a FDP da variável aleatória w é definida por

$$F_w(W) = P(w \leq W) \tag{A-1}$$

Outra forma de caracterização estatística de uma variável aleatória se dá por meio de sua Função Densidade de Probabilidade (fdp) $p_w(W)$, definida como a derivada da FDP, ou seja,

$$p_w(W) = \frac{d}{dW} F_w(W) \tag{A-2}$$

Alternativamente, uma variável aleatória pode ser caracterizada por sua Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa (FDPC) $C_w(W)$, que representa a probabilidade de que um determinado valor W seja excedido, ou seja

$$C_w(W) = P(w > W) = 1 - F_w(W) \tag{A-3}$$

Soma de Variáveis Aleatórias

Considere uma variável aleatória z dada pela soma de duas variáveis aleatórias x e y, ou seja,

$$z = x + y \tag{A-4}$$

Considere também que os comportamentos estatísticos das variáveis aleatórias x e y são conhecidos e caracterizados por suas Funções Densidade de Probabilidade (fdp), ou seja, respectivamente por $p_x(X)$ e $p_y(Y)$. Se for conhecida a densidade de probabilidade conjunta $p_{xy}(X,Y)$, será possível calcular a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa $C_z(Z)$ da soma das variáveis aleatórias x e y, através de

$$C_z(Z) = P(z > Z) = \int_0^{\infty} \int_{Z-Y}^{\infty} p_{xy}(X,Y) dX dY \tag{A-5}$$

Se as variáveis aleatórias x e y forem estatisticamente independentes, a Função Densidade de Probabilidade conjunta $p_{xy}(X,Y)$ será o produto das densidades de probabilidade individuais, ou seja

$$p_{xy}(X,Y) = p_x(X)p_y(Y) \tag{A-6}$$

Neste caso, (A-5) se escreve

$$C_z(\Gamma) = C_x(\Gamma) * p_y(\Gamma) \tag{A-7}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Considere uma variável aleatória w caracterizada estatisticamente por sua Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa $C_w(W)$. Dada uma variável aleatória $s = f(w)$, se $f()$ é uma função monótona, injetiva e estritamente crescente, temos que a FDPC de s será dada por

$$\begin{aligned} C_s(S) &= P(s > S) \\ &= P(f(w) > S) \\ &= P(w > f^{-1}(S)) \\ &= C_w(f^{-1}(S)) \end{aligned} \tag{A-8}$$

Por outro lado, se $f()$ for uma função monótona, injetiva e estritamente decrescente, a FDP de s será aproximada por

$$\begin{aligned} C_s(S) &= P(s > S) \\ &= P(f(w) > S) \\ &= P(w < f^{-1}(S)) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} F_w\left(f^{-1}(S) - \epsilon\right) \end{aligned} \tag{A-9}$$

sendo que se w for uma variável aleatória real e $f()$ for uma função contínua, $\lim_{\epsilon \to 0} F_w\left(f^{-1}(S) - \epsilon\right) = F_w(f^{-1}(S))$.

Podemos ainda determinar a FDPC de s a partir da Função Densidade de Probabilidade $p_w(W)$, sem a restrição de que $f()$ seja uma função monótona ou injetiva. Define-se o subconjunto A_s como sendo o conjunto dos valores de W que tornam a variável $s = f(w)$ superior a um determinado valor S, ou seja,

$$A_s = \{W \in \Omega_w : s = f(W) > S\} \tag{A-10}$$

onde Ω_w é o conjunto dos possíveis valores de W.

A partir de A_s é definida a função indicadora $\mathbb{1}_{A_s}(W)$, dada por

$$\mathbb{1}_{A_s}(W) = \begin{cases} 1 & , \quad W \in A_s \\ \\ 0 & , \quad W \notin A_s \end{cases} \tag{A-11}$$

A FDPC da variável aleatória s será então dada por

$$C_s(S) = P(s > S) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_s}(W) p_w(W) dW \tag{A-12}$$

Média de Variável Aleatória

A média de uma variável aleatória w pode ser obtida a partir da definição de Valor Esperado [8], ou seja,

$$m_w = E[w] = \int_{-\infty}^{\infty} W p_w(W) dW \tag{A-13}$$

Pode ser demonstrado que a média da variável aleatória w pode ser obtida de sua Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa $C_w(W)$, de forma que

$$m_w = E[w] = \int_{-\infty}^{0} (1 - C_w(W)) dW + \int_{0}^{\infty} C_w(W) dW \tag{A-14}$$

B
Relacionamentos entre os Parâmetros de Desempenho

Neste apêndice serão tratados de forma detalhada os relacionamentos entre os parâmetros de desempenho definidos nas recomendações da União Internacional de Telecomunicações. Esses relacionamentos foram definidos inicialmente em [2] e posteriormente em [7]. A probabilidade de bloco errado r_{eb} será relacionada à taxa de erro de bit b. A probabilidade de segundo errado r_{es} e a probabilidade de segundo severamente errado r_{ses} serão relacionadas com r_{eb}. A taxa de bloco errado de fundo r_{bbe} será relacionada com r_{eb} e com r_{ses}.

B.1
Relacionamento entre b e r_{eb}

A taxa de erro de bit é definida como a razão entre o número de bits errados e o número total de bits transmitidos. Considerando que em um bloco de comprimento N_B bits são transmitidos w bits errados, temos que a probabilidade r_b de um determinado bit estar errado é dada por

$$r_b = \lim_{N_B \to \infty} \frac{w}{N_B} \tag{B-1}$$

A taxa de erro de bit b é obtida quando utilizado o número médio de bits errados em (B-1), ou seja

$$b = \lim_{N_B \to \infty} \frac{E[w]}{N_B} \tag{B-2}$$

Os erros de bit ocorrem em surtos de comprimento y. Um bloco errado é definido como aquele que contém pelo menos um bit errado. Assim, temos que a quantidade de bits errados W em um bloco de comprimento N_B é dada por

$$W = \sum_{j=1}^{x} y_j \tag{B-3}$$

onde x é o número total de surtos que ocorrem em um bloco e y_j é o número de bits de cada surto j.

Considerando que o comprimento do erro y_j é uma variável aleatória com densidade de probabilidade $p_{y_j}(Y)$, temos que, para um dado valor do número total de surtos $x = X$, a densidade de probabilidade do número total de bits errados no bloco é dada por

$$p_{w|x=X}(W) = p_{y_1}(Y) * p_{y_2}(Y) * \ldots * p_{y_X}(Y) \tag{B-4}$$

De acordo com o Teorema da Probabilidade Total [8], temos que

$$p_w(W) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{w|x=X}(W) p_x(X) dX \tag{B-5}$$

onde $p_x(X)$ é a densidade de probabilidade do número de surtos de erro.

O número médio de bits errados $E[w]$ pode ser obtido por

$$E[w] = \int_{-\infty}^{\infty} E[w|x = X] p_x(X) \tag{B-6}$$

Considerando que $E[w|x = X] = X\ E[y]$, temos que, dado $x = X$,

$$\begin{aligned} E[w] &= \int_{-\infty}^{\infty} X\ E[y]\ p_x(X) dX \\ &= E[y] \int_{-\infty}^{\infty} X p_x(X) dX \\ &= E[y]\ E[x] \end{aligned} \tag{B-7}$$

De (B-2) e (B-7), temos

$$b = \lim_{N_B \to \infty} \frac{E[y]\ E[x]}{N_B} \tag{B-8}$$

Portanto, para valores altos de N_B, o número médio de surtos em um bloco pode ser aproximado por

$$E[x] = \frac{N_B}{\alpha} b \tag{B-9}$$

onde α é o número médio de bits errados por surto.

A probabilidade de ocorrência de um bloco errado pode ser definida como o complemento da probabilidade de ocorrência de um bloco certo, ou seja

$$r_{eb} = 1 - P(x = 0) \tag{B-10}$$

Considerando a ocorrência de erros em surto segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = E[x]$, temos que a probabilidade de que o número de surtos assuma um valor $x = X$ é dada por [8]

$$P(x = X) = \frac{\lambda^X\ e^{-\lambda}}{X!} \tag{B-11}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência de um bloco certo é

$$P(x = 0) = \frac{\lambda^0\ e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} \tag{B-12}$$

Assim, de (B-9), (B-10) e (B-12), temos que a probabilidade de bloco errado se relaciona com a taxa de erro de bit de forma que

$$r_{eb} = 1 - e^{-\frac{N_B}{\alpha} b} \tag{B-13}$$

B.2
Relacionamento entre r_{eb} e r_{es}

Modelando o número de blocos errados em um segundo s como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade de Poisson de parâmetro $\lambda = E[s]$, temos

$$P(s = S) = \frac{\lambda^S \, e^{-\lambda}}{S!} \tag{B-14}$$

Considerando n o número de blocos transmitidos por segundo, $E[s] = nr_{eb}$. Como um segundo errado é definido como um período de um segundo em que pelo menos um bloco seja errado, temos que r_{es} é o complemento da probabilidade de inexistência de bloco errado, ou seja,

$$r_{es} = 1 - P(s = 0) \tag{B-15}$$

De B-14, temos que a probabilidade de segundo certo é

$$P(s = 0) = \frac{\lambda^0 \, e^{-\lambda}}{0!} = e^{-nr_{eb}} \tag{B-16}$$

Assim, temos que o relacionamento entre a r_{eb} e r_{es} é dado por

$$r_{es} = 1 - e^{-nr_{eb}} \tag{B-17}$$

B.3
Relacionamento entre r_{eb} e r_{ses}

Adotando uma distribuição de probabilidade binomial para o número de blocos errados por segundo y, sendo n o número de blocos transmitidos nesse intervalo, temos que a probabilidade de k blocos estarem errados é dada por

$$P(y = k) = r_{eb}^k (1 - r_{eb})^{(n-k)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \ , \ \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{B-18}$$

Um segundo severamente errado ocorre quando o número de blocos errados é maior ou igual a 30% do número total de blocos. Assim, a probabilidade de segundo severamente errado r_{ses} é dada por

$$\begin{aligned} r_{ses} &= P(y \geq 0,3n) \\ &= \sum_{k=0,3n}^{n} P(y = k) \\ &= \sum_{k=0,3n}^{n} r_{eb}^k (1 - r_{eb})^{(n-k)} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned} \tag{B-19}$$

A integral de uma função normal com média μ e variância σ^2 pode ser usada para aproximar (B-19) quando $nr_{eb}(1-r_{eb}) \gg 1$, sendo

$$\mu = nr_{eb} \tag{B-20}$$

$$\sigma^2 = nr_{eb}(1-r_{eb}) \tag{B-21}$$

Dessa forma, r_{ses} pode ser dada por

$$r_{ses} = \int\limits_{0,3n}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}\, e^{-\frac{(Y-nr_{eb})^2}{2nr_{eb}(1-r_{eb})}} dY \tag{B-22}$$

Com uma mudança de variável

$$\alpha = \frac{Y - nr_{eb}}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}} \tag{B-23}$$

temos que r_{ses} é dada por

$$r_{ses} = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \tag{B-24}$$

sendo

$$a = \frac{n(0,3 - r_{eb})}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}} \tag{B-25}$$

e

$$b = \frac{n(1 - r_{eb})}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}} \tag{B-26}$$

Considerando que a função $Q(x)$ é definida como

$$Q(t) = \int\limits_{t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dX \tag{B-27}$$

o relacionamento entre r_{eb} e r_{ses} é dado por

$$r_{ses} = Q\left(\frac{\sqrt{n}(0,3 - r_{eb})}{\sqrt{r_{eb}(1-r_{eb})}}\right) - Q\left(\frac{\sqrt{n}(1 - r_{eb})}{\sqrt{r_{eb}(1-r_{eb})}}\right) \tag{B-28}$$

B.4 Relacionamento de r_{eb} e r_{ses} com r_{bbe}

Enquanto as demais variáveis aleatórias que representam os parâmetros de desempenho são relacionadas a probabilidades de ocorrência de eventos de erro, a variável r_{bbe} é definida como uma razão entre o número de blocos errados e o número total de blocos que não ocorrem em um segundo severamente errado. Considerando $n_{\overline{SES}}$ como o número médio de blocos errados em um segundo que não seja severamente errado, temos que a taxa de blocos errados de fundo é dada por

$$r_{bbe} = \frac{n_{\overline{SES}}}{n} \tag{B-29}$$

Para que não haja um segundo severamente errado, o número de blocos errados em um segundo y deve ser menor que 30% do total de blocos. Assim, temos que

$$n_{\overline{SES}} = E[y|y < 0,3n] \tag{B-30}$$

Assim, $n_{\overline{SES}}$ pode ser calculado por [8]

$$n_{\overline{SES}} = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_{y|y<0,3n}(Y)dY \tag{B-31}$$

A variável aleatória y tem densidade de probabilidade binomial, ou seja,

$$p_y(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}(r_{eb})^k(1-r_{eb})^{n-k}\delta(Y-k) \tag{B-32}$$

e $p_{y|y<0,3n}(Y)$ [8] é dada por

$$p_{y|y<0,3n}(Y) = \frac{\frac{d}{dY}P(y \leq Y, y < 0,3n)}{P(y < 0,3n)} \tag{B-33}$$

Observe que

$$P(y \leq Y, y < 0,3n) = \begin{cases} P(y \leq Y) & , \quad Y < 0,3n \\ P(y < 0,3n) & , \quad Y \geq 0,3n \end{cases} \tag{B-34}$$

E assim, temos que

$$p_{y|y<0,3}(Y) = \begin{cases} \frac{p_y(Y)}{P(y<0,3n)} & , \quad Y < 0,3n \\ 0 & , \quad Y \geq 0,3n \end{cases} \tag{B-35}$$

Considerando que $r_{ses} = P(y \geq 0,3n)$, temos que

$$P(y < 0,3n) = 1 - r_{ses} \tag{B-36}$$

Aplicando (B-32) e (B-36) em (B-35), e posteriormente em (B-31), temos que, quando $Y < 0,3n$,

$$n_{\overline{SES}} = \frac{1}{1-r_{ses}} \int_{-\infty}^{\infty} Y \sum_{k=1}^{0,3n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} (r_{eb})^k (1-r_{eb})^{n-k} \delta(Y-k) dY \quad \text{(B-37)}$$

ou retirando da integral os fatores que não dependem de Y,

$$n_{\overline{SES}} = \frac{1}{1-r_{ses}} \sum_{k=1}^{0,3n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} (r_{eb})^k (1-r_{eb})^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} Y \delta(Y-k) dY \quad \text{(B-38)}$$

Com a solução da integral, temos o número médio de blocos errados que não ocorrem em um segundo severamente errado, dado por

$$n_{\overline{SES}} = \frac{1}{1-r_{ses}} \sum_{k=1}^{0,3n-1} k \frac{n!}{(n-k)!k!} (r_{eb})^k (1-r_{eb})^{n-k} \quad \text{(B-39)}$$

Como realizado em (B-22), a equação acima pode ser aproximada por uma normal com média μ e variância σ^2 dadas respectivamente por (B-20) e (B-21), e assim

$$n_{\overline{SES}} = \frac{1}{1-r_{ses}} \int_{1}^{0,3n-1} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dY \quad \text{(B-40)}$$

Com a seguinte mudança de variável

$$\alpha = \frac{Y-\mu}{\sigma} \quad \text{(B-41)}$$

temos

$$n_{\overline{SES}} = \frac{1}{1-r_{ses}} \int_{(1-\mu)/\sigma}^{(0,3n-1-\mu)/\sigma} \frac{(\sigma\alpha+\mu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \quad \text{(B-42)}$$

Aplicando (B-20) e (B-21) em (B-42), temos

$$\begin{aligned} n_{\overline{SES}} &= \frac{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}{1-r_{ses}} \int_{m_1}^{m_2} \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \\ &+ \frac{nr_{eb}}{1-r_{ses}} \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \end{aligned} \quad \text{(B-43)}$$

onde

$$m_1 = \frac{1-\mu}{\sigma} = \frac{1-nr_{eb}}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}} \quad \text{(B-44)}$$

$$m_2 = \frac{0,3n-1-\mu}{\sigma} = \frac{n(0,3-r_{eb})-1}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}} \quad \text{(B-45)}$$

Com a solução das integrais em (B-43) temos

$$n_{\overline{SES}} = \frac{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}{\sqrt{2\pi}(1-r_{ses})} \left(e^{-\frac{m_1^2}{2}} - e^{-\frac{m_2^2}{2}} \right) + \frac{nr_{eb}}{1-r_{ses}} [Q(m_1) - Q(m_2)] \quad \text{(B-46)}$$

Substituindo (B-46) em (B-29), temos que o relacionamento entre r_{eb} e r_{ses} com r_{bbe} é dado por

$$r_{bbe} = \frac{\sqrt{n r_{eb}(1 - r_{eb})}}{n\sqrt{2\pi}(1 - r_{ses})} \left(e^{-\frac{m_1^2}{2}} - e^{-\frac{m_2^2}{2}} \right) + \frac{r_{eb}}{1 - r_{ses}} [Q(m_1) - Q(m_2)] \quad \text{(B-47)}$$