

3 Modelagem Matemática

Um dos objetivos deste trabalho é avaliar a influência da degradação conjunta por chuvas e por erro de apontamento no desempenho do sistema de comunicações móveis.

Neste capítulo, primeiramente será determinada a influência da degradação conjunta nos diversos parâmetros de desempenho. Em seguida, será realizada a caracterização estatística de todas as variáveis relacionadas a esses parâmetros.

3.1 Relacionamento entre os Parâmetros de Desempenho e a Razão E_b/N_0

Para enlaces digitais por satélite, os objetivos de desempenho estão definidos na Recomendação ITU-R S.1521-1 [5], que impõe restrições para parâmetros de desempenho tais como a taxa de erro de bit. Outros parâmetros de desempenho também utilizados são relacionados a ocorrência de erros em blocos de bits. Nesse caso, os eventos de erros são definidos da seguinte forma:

- Bloco Errado (Errored Block - EB): “Bloco com um ou mais bits errados”;
- Segundo Errado (Errored Second - ES): “Período de um segundo com um ou mais blocos errados”;
- Segundo Severamente Errado (Severely Errored Second - SES): “Período de um segundo com no mínimo 30% de blocos errados”;
- Bloco Errado de Fundo (Background Block Error - BBE): “Bloco errado que não ocorre em um SES”.

Os parâmetros de desempenho são relacionados às taxas de ocorrência desses eventos, sendo

- Taxa de Erro de Bloco (Errored Block Rate - EBR): Razão entre EB e o total de blocos transmitidos em um intervalo;
- Taxa de Segundo Errado (Errored Second Rate - ESR): Razão entre ES e o tempo total do intervalo avaliado, em segundos;

- Taxa de Segundo Severamente Errado (Severely Errored Second Rate - SESR): Razão entre SES e o tempo total do intervalo avaliado, em segundos;
- Taxa de Bloco Errado de Fundo (Background Block Error Rate - BBER): Razão entre BBE e o número de blocos transmitidos que não pertençam a um SES.

Em [2] e [7] foi determinado o relacionamento entre os diversos parâmetros de desempenho, e adotada uma metodologia para a caracterização estatística de cada um deles a partir da estatística da razão E_b/N_0 . Como pode ser observado em (2-3), uma vez que as degradações que incidem sobre o enlace têm comportamento aleatório, a razão E_b/N_0 também apresentará comportamento aleatório. Por isso, a estratégia para avaliar o desempenho do sistema parte da definição das seguintes variáveis aleatórias:

- e : Razão E_b/N_0 ;
- b : Taxa de erro de bit;
- r_{eb} : Probabilidade de bloco errado;
- r_{es} : Probabilidade de segundo errado;
- r_{ses} : Probabilidade de segundo severamente errado;
- r_{bbe} : Taxa de bloco errado de fundo.

A seguir serão descritos de forma resumida os relacionamentos entre as variáveis aleatórias definidas acima. No Apêndice B esses relacionamentos são tratados de forma mais detalhada.

Relacionamento entre a taxa de erro de bit b e a razão E_b/N_0

Em sistemas de comunicação por satélite, as duas modulações digitais mais utilizadas são BPSK e QPSK, que, por terem envoltória constante, são adequadas para transmissão em canais não lineares. Considerando que, quando o enlace é sujeito a degradações, a razão E_b/N_0 passa a ser dada por (2-3), tanto para sistemas BPSK quanto para sistemas QPSK, utilizando codificação de Gray, a taxa de erro de bit [3] é dada por

$$BER = Q\left(\sqrt{2 \times 10^{e/10}}\right) \quad (3-1)$$

sendo a função Q definida por

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \quad (3-2)$$

A Figura 3.1 ilustra o desempenho da taxa de erro de bit em função da razão E_b/N_0 quando utilizadas modulações BPSK ou QPSK.

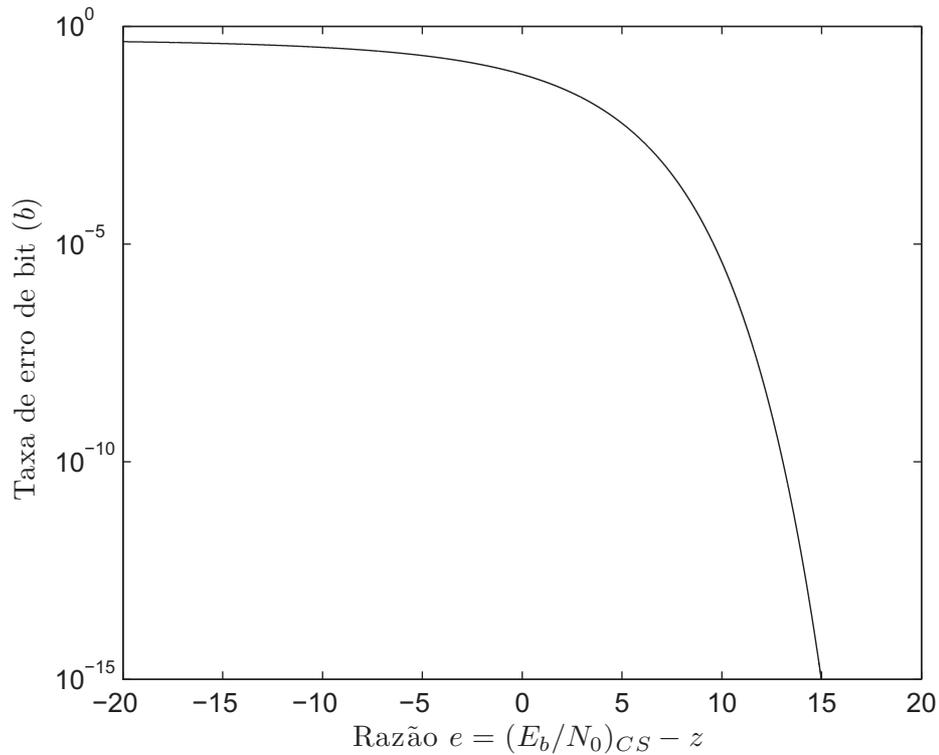


Figura 3.1: Curva de desempenho de BER da modulação QPSK em função da razão $e = (E_b/N_0)_{CS} - z$.

Relacionamento entre a probabilidade de bloco errado r_{eb} e a taxa de erro de bit b

A variável aleatória r_{eb} se relaciona com b considerando a ocorrência de erros em surto segundo uma distribuição de Poisson. Como demonstrado na Seção B.1, esse relacionamento [7] é dado por

$$r_{eb} = 1 - e^{-\frac{N_B}{\alpha} b} \quad (3-3)$$

onde N_B é o número de bits por bloco e α é o número de erros de bit por surto, cujos valores típicos variam entre 10 e 20. A Figura 3.2 apresenta a relação expressa por (3-3), considerando diversos valores de N_B e $\alpha = 10$.

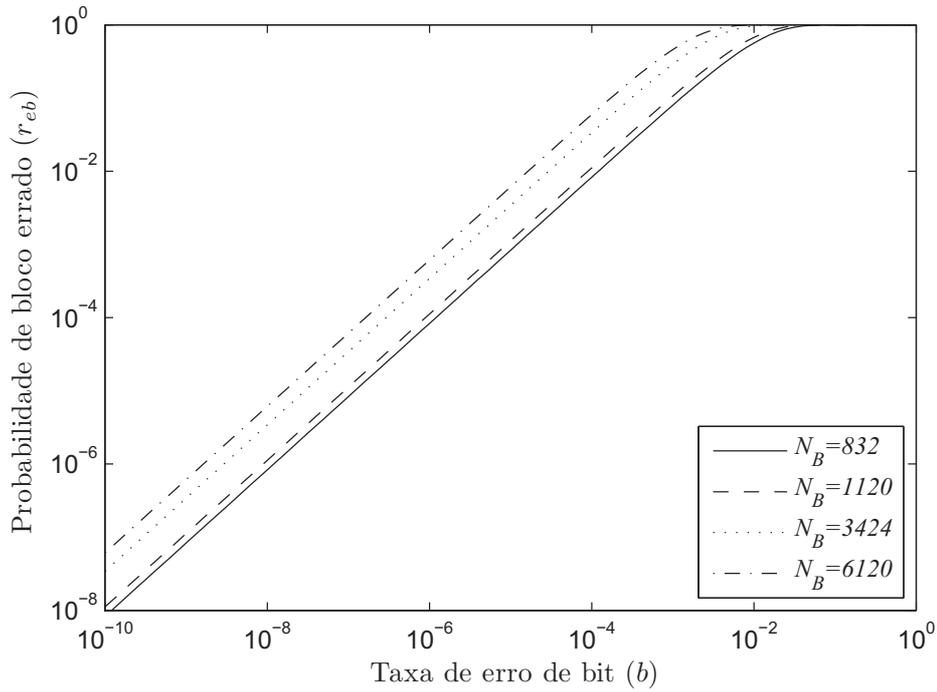


Figura 3.2: Relação entre a taxa de erro de bit e a probabilidade de bloco errado, para diversos valores de N_B e $\alpha = 10$.

Relacionamento entre a probabilidade de segundo erro r_{es} e a probabilidade de bloco errado r_{eb}

A relação entre r_{eb} e r_{es} é discutida de forma mais detalhada na Seção B.2. Modelando o número de blocos errados em um segundo como a média de uma variável aleatória de Poisson, temos que o relacionamento de r_{es} com r_{eb} é dado por

$$r_{es} = 1 - e^{-n r_{eb}} \tag{3-4}$$

sendo n o número de blocos por segundo.

A Figura 3.3 ilustra a relação entre b e r_{es} , obtida a partir de (3-3) e (3-4), para diversos valores de N_B e n , com $\alpha = 10$.

Relacionamento entre a probabilidade de segundo severamente errado r_{ses} e a probabilidade de bloco errado r_{eb}

Para a determinação do relacionamento entre r_{eb} e r_{ses} , foi utilizado um modelo de distribuição binomial para o número de blocos errados por segundo. Uma vez que, pela definição de SES, o número de blocos errados deve ser igual ou superior a 30%, como discutido na Seção B.3, tem-se que

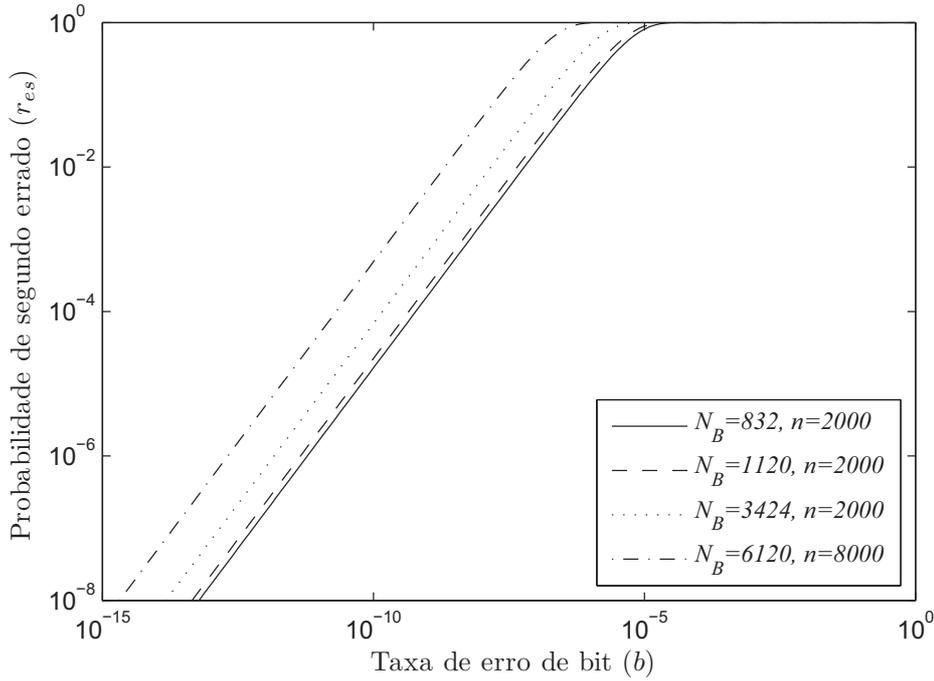


Figura 3.3: Relação entre a taxa de erro de bit e a probabilidade de segundo errado, para diversos valores de N_B e de n , com $\alpha = 10$.

$$r_{ses} = \sum_{k=0,3n}^n r_{eb}^k (1 - r_{eb})^{(n-k)} \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad (3-5)$$

Como realizado em [7], a equação acima pode ser aproximada pela integral de uma função normal e, depois de algumas manipulações matemáticas, r_{ses} pode ser dada por

$$r_{ses} = Q\left(\frac{\sqrt{n}(0,3 - r_{eb})}{\sqrt{r_{eb}(1 - r_{eb})}}\right) - Q\left(\frac{\sqrt{n}(1 - r_{eb})}{\sqrt{r_{eb}(1 - r_{eb})}}\right) \quad (3-6)$$

A Figura 3.4 ilustra o relacionamento entre as variáveis b e r_{ses} , obtido a partir de (3-3) e (3-6), para diversos valores de N_B e n , com $\alpha = 10$.

Relacionamento entre a taxa de bloco errado de fundo r_{bbe} e a probabilidade de bloco errado r_{eb}

A variável aleatória r_{bbe} não está associada à probabilidade de ocorrência de eventos de erro, mas a uma razão entre o número de blocos errados e o número total de blocos, quando ambos não ocorrem em um segundo severamente errado. Para a determinação do relacionamento entre r_{eb} e r_{bbe} , foi adotado em [7] um modelo que considera o número de blocos errados em uma sequência de n blocos como uma variável aleatória binomial. Como os blocos não podem pertencer a um segundo severamente errado, o número de blocos

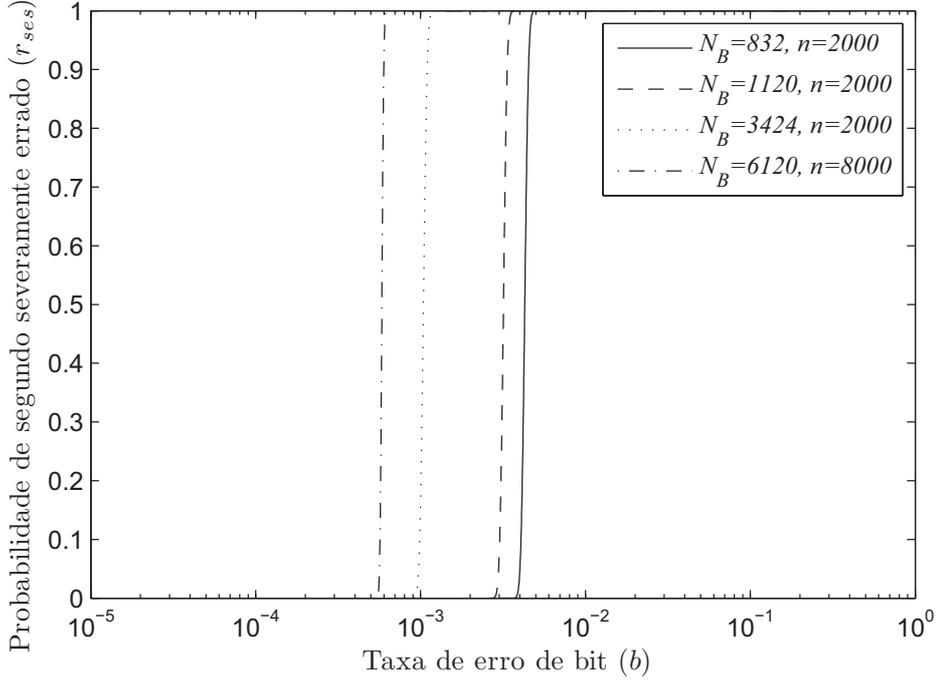


Figura 3.4: Relação entre a taxa de erro de bit e a probabilidade de segundo severamente errado, para diversos valores de N_B e de n , com $\alpha = 10$.

errados deve ser menor que 30% do total. A expressão para o relacionamento entre a probabilidade de bloco errado e a taxa de bloco errado de fundo, como demonstrado na Seção B.4, é dada por

$$r_{bbe} = \frac{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}{n\sqrt{2\pi(1-r_{ses})}} \left(e^{-\frac{m_1^2}{2}} - e^{-\frac{m_2^2}{2}} \right) + \frac{r_{eb}}{1-r_{ses}} (Q(m_1) - Q(m_2)) \quad (3-7)$$

$$m_1 = \frac{1-nr_{eb}}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}$$

$$m_2 = \frac{n(0,3-r_{eb})-1}{\sqrt{nr_{eb}(1-r_{eb})}}$$

Ressalta-se que r_{bbe} não é definido quando $r_{ses} = 1$, visto que se a probabilidade de segundo severamente errado é igual a 1, de acordo com a definição, não há possibilidade da ocorrência de blocos errados de fundo. Na Figura 3.5 é ilustrado o relacionamento entre b e r_{bbe} , obtido a partir de (3-3), (3-6) e (3-7), para diversos valores de N_B e n , com $\alpha = 10$.

Cabe observar que o valor de r_{bbe} decai a partir da taxa de erro de bit equivalente a $r_{eb} = 0,3$, ou seja, na transição do valor de r_{ses} de 0 para 1. É esperado que, com o aumento da probabilidade de segundo severamente errado,

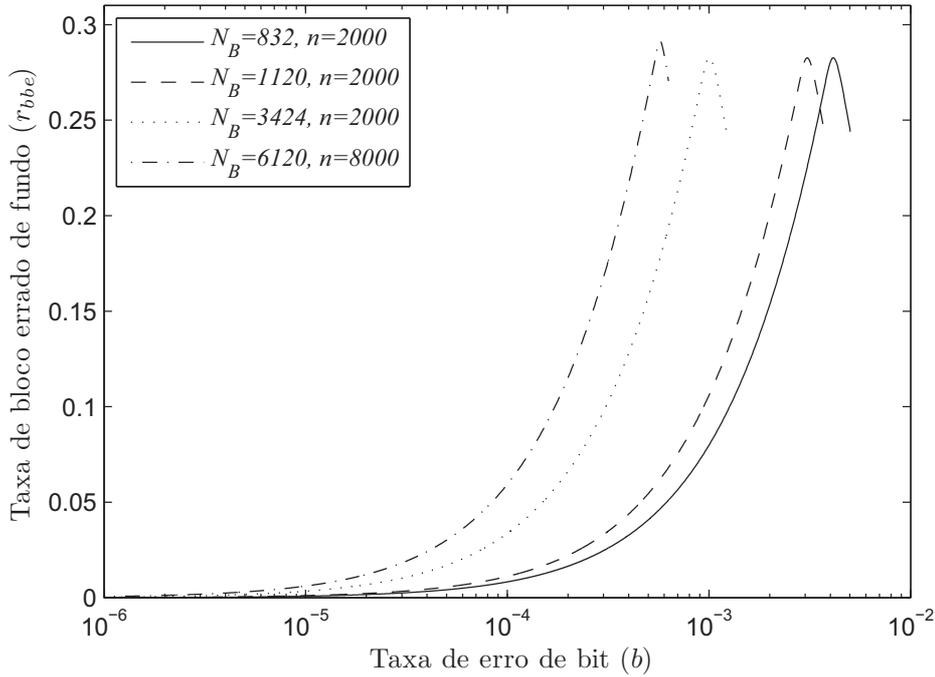


Figura 3.5: Relação entre a taxa de erro de bit e a taxa de bloco errado de fundo, para diversos valores de N_B e de n , com $\alpha = 10$.

diminua a taxa de bloco errado de fundo.

Para determinar o efeito das degradações no desempenho do sistema de comunicações móveis por satélite, são necessárias as caracterizações estatísticas das degradações por chuvas x e por erro de apontamento y . Assim, será possível determinar o comportamento estatístico da degradação conjunta $z = x + y$, e conseqüentemente o comportamento da razão e . Então, utilizando os relacionamentos entre os parâmetros de desempenho, podemos caracterizar os comportamentos estatísticos das variáveis aleatórias a eles relacionadas. No Apêndice A, são apresentados alguns aspectos da Teoria da Probabilidade que serão utilizados nessas caracterizações.

3.2

Caracterização Estatística da Degradação por Chuvas

A atenuação do sinal causada por chuvas é uma fonte de degradação relevante para enlaces que operam em faixas de frequência acima de 10 GHz. A Recomendação ITU-R P.618-10 [9] apresenta um modelo para a estimação do comportamento estatístico da atenuação por chuva, que considera os seguintes parâmetros:

- $R_{0,01}$: taxa de precipitação atmosférica excedida em 0,01% do tempo no período de um ano, dada em mm/h,

- h_r : altitude da chuva,
- h_s : altitude da estação em relação ao nível médio dos mares,
- θ : elevação da antena,
- ϕ : latitude da estação terrena, e
- f : frequência de operação

De acordo com [9], esse modelo é válido para determinar a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da atenuação por chuvas $C_x(X) = P(x > X)$ para valores de probabilidade compreendidos no intervalo $[10^{-5}, 5 \times 10^{-2}]$, mas não é adequado para representar a FDPC fora desse intervalo.

A título de exemplo, considerando $f = 14,2$ GHz, $R_{0,01} = 23$ mm/h, $h_r = 3$ km, $h_s = 0$ km, $\theta = 25^\circ$ e $\phi = 40^\circ$, temos a FDPC da atenuação por chuva demonstrada na Figura 3.6.

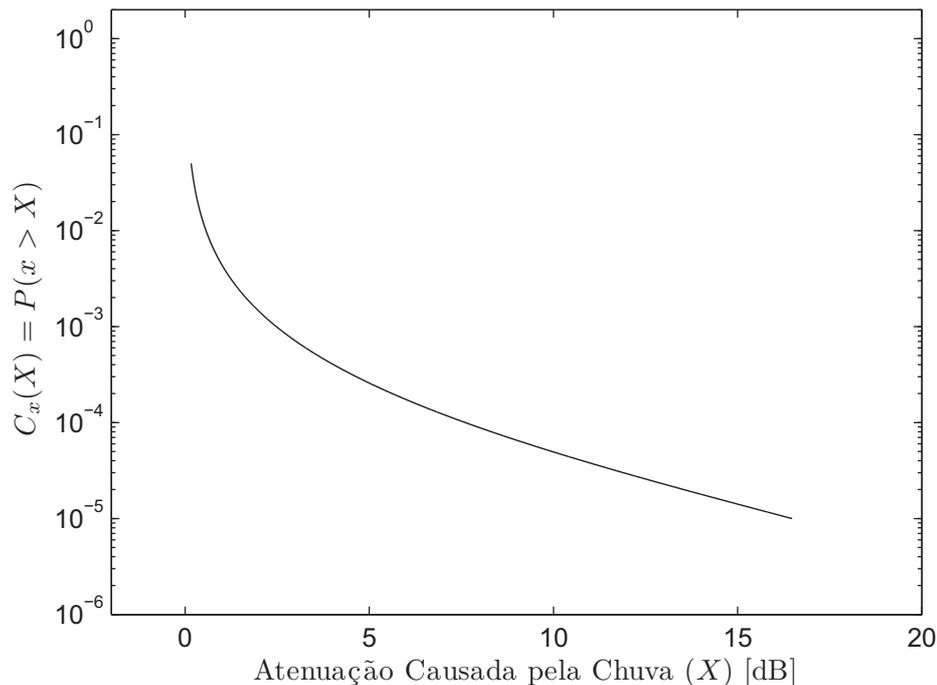


Figura 3.6: FDPC da atenuação causada pela chuva

Uma vez que a FDPC $C_x(X)$ obtida a partir do modelo em [9] é válida apenas no intervalo $[10^{-5}, 5 \times 10^{-2}]$, serão considerados um limitante superior e um limitante inferior para seu comportamento fora desse intervalo.

Considerando as seguintes propriedades da Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa:

- é uma função não crescente

- $\lim_{W \rightarrow -\infty} C_w(W) = 1$
- $\lim_{W \rightarrow \infty} C_w(W) = 0$

e que a degradação por chuvas assume apenas valores positivos, os limites inferior e superior são os apresentados na Figura 3.7.

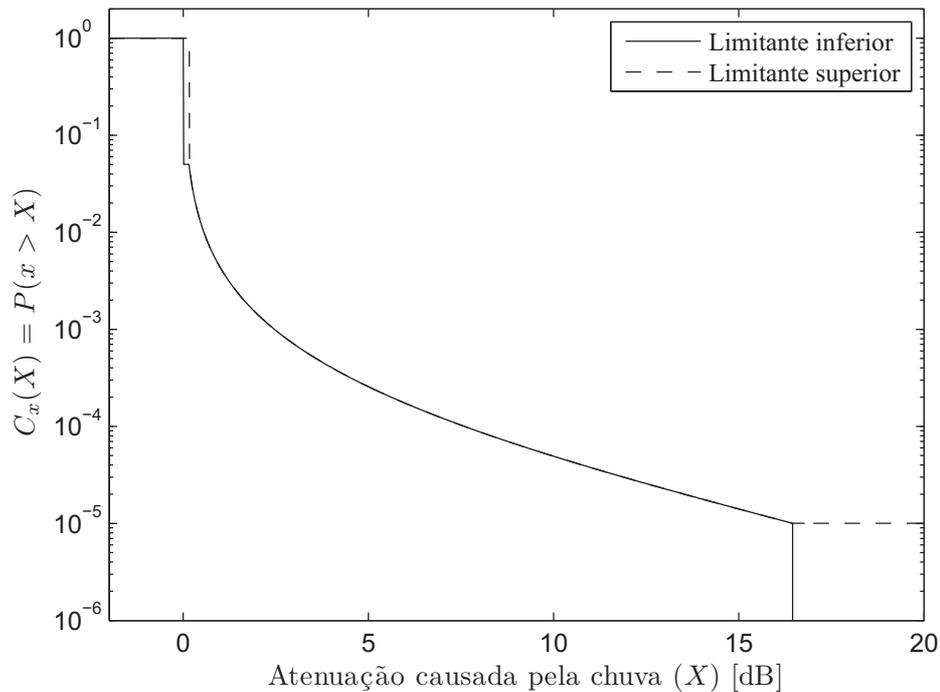


Figura 3.7: FDPC da atenuação por chuva, considerando os limitantes inferior e superior.

3.3

Caracterização Estatística da Degradação por Erro de Apontamento da Antena

O erro de apontamento da antena é influenciado por diversos fatores, entre eles, a velocidade de deslocamento da plataforma, a rugosidade do terreno, a sinuosidade do caminho, a qualidade dos sistemas de amortecimento do veículo e o tempo de resposta do sistema de estabilização da antena.

Segundo o Teorema do Limite Central, a densidade de probabilidade de uma variável aleatória composta pela soma normalizada de inúmeras variáveis aleatórias estatisticamente independentes de variância finita tende para uma densidade de probabilidade gaussiana de variância unitária $N(0, 1)$ quando o número de variáveis tende para o infinito. A partir dessa premissa, o erro de apontamento da antena poderia ser aproximado por uma densidade de probabilidade gaussiana, dado o grande número de variáveis que o influenciam.

No entanto, testes de laboratório citados em [1] indicam que o erro de apontamento da antena provocado pelo movimento do veículo apresenta uma natureza impulsiva. O aparecimento de rajadas ocasionais de valores acima das observações normalmente esperadas torna a densidade gaussiana inadequada para a caracterização estatística do erro de apontamento.

Em [10] foi descrito o Teorema Generalizado do Limite Central, segundo o qual o comportamento de uma variável aleatória representada pela soma de inúmeras variáveis aleatórias independentes, com ou sem variância, tende para uma Densidade de Probabilidade Estável, da qual a densidade gaussiana é uma caso particular. Ou seja, densidades de probabilidade estáveis não gaussianas também podem representar a soma de um grande número de variáveis aleatórias.

O comportamento estatístico de uma variável aleatória com Densidade de Probabilidade Estável é caracterizado pela função característica, dada por

$$M_x(v) = \exp(jav - \gamma |v|^\delta [1 + j\beta \text{sign}(v)w(v, \delta)]) \quad (3-8)$$

onde

$$w(v, \delta) = \begin{cases} \tan \frac{\delta\pi}{2} & , \delta \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |v| & , \delta = 1 \end{cases} \quad (3-9)$$

e

$$\text{sign}(v) = \begin{cases} 1 & , v > 0 \\ 0 & , v = 0 \\ -1 & , v < 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

sendo completamente caracterizado por quatro parâmetros: a localização ou média a , a escala ou dispersão γ , o índice de enviesamento β e o expoente característico δ . A dispersão γ tem comportamento equivalente à variância. O índice de enviesamento β toma valores no intervalo $[-1, 1]$, e quando $\beta = 0$ a distribuição é simétrica em relação à média a . O expoente característico δ determina a cauda da distribuição, e assume valores no intervalo $(0, 2]$. Quanto menor o valor de δ , menor a velocidade de decaimento da densidade de probabilidade. Quando $\delta = 2$ e $\beta = 0$, a função característica $M_x(v)$ é gaussiana, e, conseqüentemente, a Função Densidade de Probabilidade $p_x(X)$ é gaussiana com variância $2\gamma^2$.

Os resultados verificados em laboratório [1] indicam ser adequada a utilização de uma densidade de probabilidade estável com o parâmetro de localização e o índice de enviesamento nulos, ou seja, $a = 0$ e $\beta = 0$, conhecida como Densidade de Probabilidade de Levy. Portanto, a função característica da densidade de probabilidade a ser utilizada neste trabalho para o erro de

apontamento é dada por

$$M_\phi(v) = e^{-|\gamma v|^\delta} \quad (3-11)$$

onde ϕ é o ângulo entre os apontamentos ideal e real da antena. A Função Densidade de Probabilidade do erro de apontamento $p_\phi(\Phi)$ é dada por

$$p_\phi(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_\phi(v) e^{-jv\Phi} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\gamma v|^\delta} e^{-jv\Phi} dv \quad (3-12)$$

Os parâmetros da função característica $M_\phi(v)$ dependem da característica do terreno sobre o qual o veículo se desloca e da qualidade dos sistemas de amortecimento e de compensação de movimento da plataforma. Na Figura 3.8 é apresentada a variação da Função Densidade de Probabilidade $p_\phi(\Phi)$ do erro de apontamento para diversos valores de γ e δ .

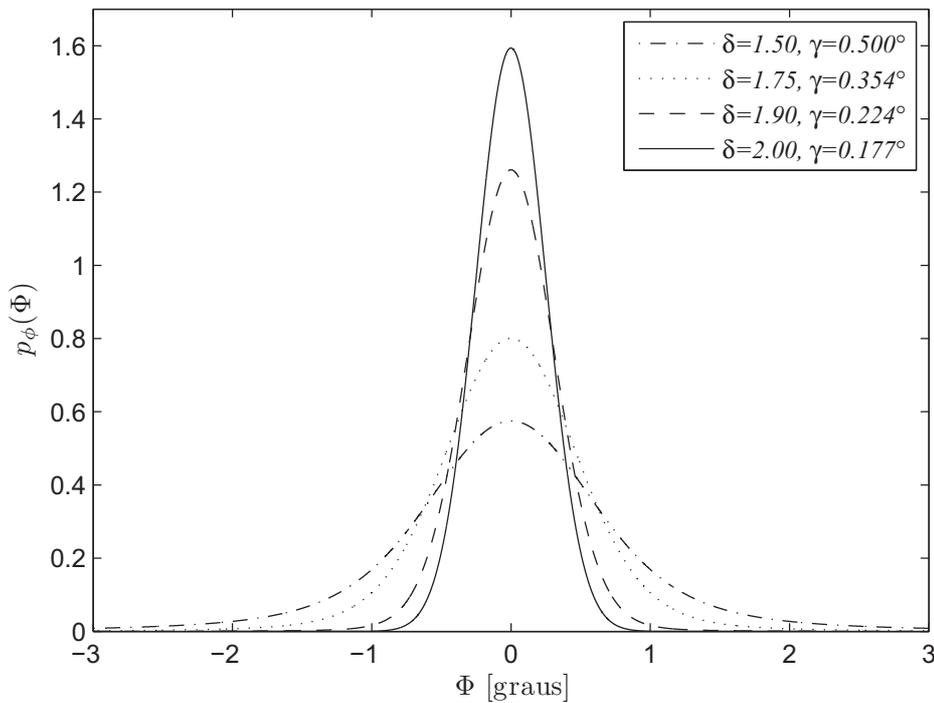


Figura 3.8: Função Densidade de Probabilidade do erro de apontamento para diversos valores de γ e δ .

A variação do ângulo de apontamento da antena provoca uma variação no nível do sinal emitido na direção do satélite desejado ou recebido pela estação terrena móvel. Esse nível de sinal dependerá respectivamente dos diagramas de radiação de transmissão e de recepção da antena da estação móvel.

Considerando uma antena parabólica de abertura circular, temos que o ganho normalizado $g(\theta)$ [6] pode ser dado por

$$g(\theta) = \left(\frac{2^{n+1}(n+1)! J_{n+1}(\pi d/\lambda \times \sin \theta)}{(\pi d/\lambda \times \sin \theta)^{n+1}} \right)^2 \quad (3-13)$$

sendo θ o afastamento angular do eixo, d o diâmetro da antena, λ o comprimento de onda correspondente à frequência de operação e n o parâmetro de iluminação da abertura, sendo que para $n = 0$ temos uma iluminação idealmente uniforme, para $n = 1$ iluminação parabólica e para $n = 2$ iluminação parabólica quadrada. Em antenas reais, os valores típicos de n variam entre $n = 1$ e $n = 2$.

Na Figura 3.9 é apresentado o diagrama de radiação da antena no caso particular em que $f = 14,2$ GHz, $n = 1$ e $d = 0,5$ m.

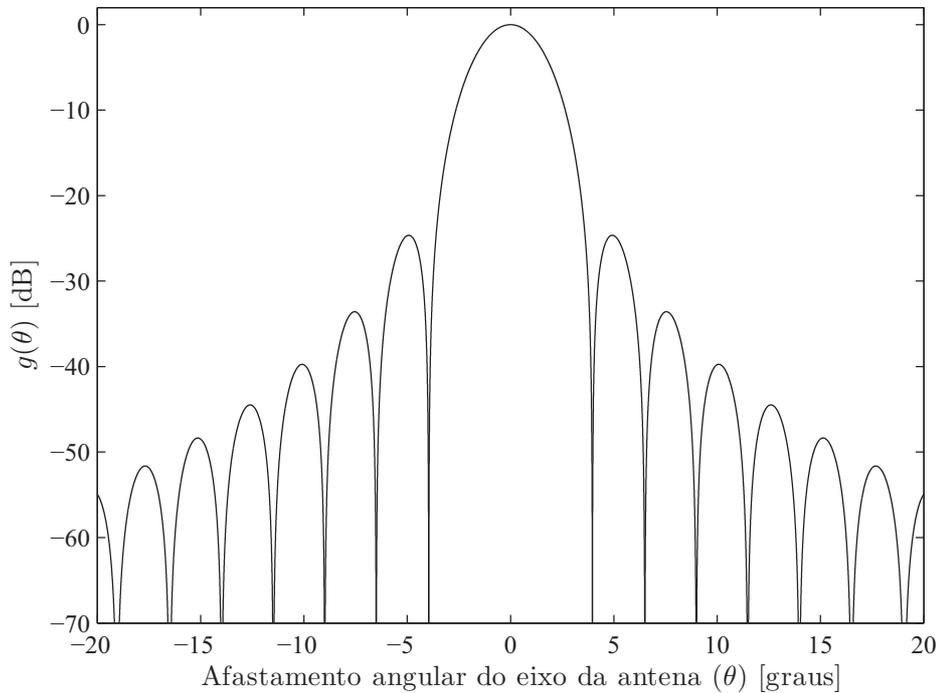


Figura 3.9: Diagrama de radiação de uma antena com $d = 0,5$ m, $f = 14,2$ GHz e $n = 1$.

O erro de apontamento $\phi = \Phi$ provoca uma degradação $y = Y$ no enlace equivalente à discriminação da antena no ângulo entre o apontamento real e o apontamento ideal, ou seja

$$Y = g(0) - g(\Phi) = -g(\Phi) \quad (3-14)$$

observando que o ganho normalizado no eixo da antena $g(0) = 0$ dB.

Observe que a relação descrita em (3-14) é sempre válida para o enlace de recepção da estação móvel. No caso do enlace de transmissão, a relação somente será válida se o satélite estiver operando na região linear.

Conhecido o relacionamento entre as variáveis ϕ e y e caracterizada estatisticamente a variável aleatória ϕ , é possível determinar o comportamento estatístico de y . Observe que $g(\phi)$ é uma função não monótona. Pode-se então adotar o procedimento definido em (A-10), (A-11) e (A-12), de forma a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa $C_y(Y) = P(y > Y)$ da variável y será obtida a partir da definição do subconjunto A_Y , dado por

$$A_Y = \{\Phi \in \Omega_\phi : y = -g(\Phi) > Y\} \quad (3-15)$$

onde Ω_ϕ é o conjunto dos possíveis valores de ϕ .

A partir de A_Y podemos definir a função indicadora $\mathbb{1}_{A_Y}(\Phi)$, dada por

$$\mathbb{1}_{A_Y}(\Phi) = \begin{cases} 1 & , \quad \Phi \in A_Y \\ 0 & , \quad \Phi \notin A_Y \end{cases} \quad (3-16)$$

A FDPC da variável aleatória y será então dada por

$$C_y(Y) = P(y > Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_Y}(\Phi) p_\phi(\Phi) d\Phi \quad (3-17)$$

Na Figura 3.10 é apresentada a Função Distribuição de Probabilidade $F_y(Y) = 1 - C_y(Y) = P(y \leq Y)$ da degradação causada pelo erro de apontamento para diferentes parâmetros da função característica, quando utilizada uma antena com o diagrama de radiação da Figura 3.9. Na Figura 3.11 é apresentada a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa $C_y(Y)$, que, em escala logarítmica, permite melhor visualização do comportamento estatístico em maiores valores de degradação.

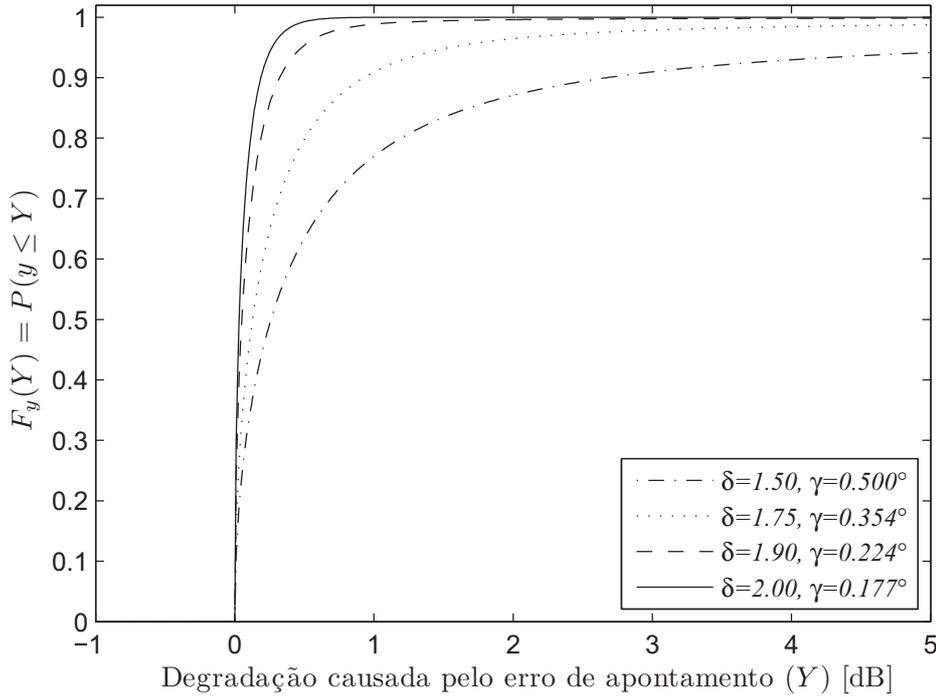


Figura 3.10: Função Distribuição de Probabilidade da degradação causada pelo erro de apontamento.

3.4

Caracterização Estatística da Degradação Conjunta por Chuvas e por Erro de Apontamento

A degradação conjunta $z = x + y$ pode ser caracterizada a partir das Funções Densidade de Probabilidade de x e y , que, de acordo com (A-2), são dadas por

$$p_x(X) = \frac{d}{dX} F_x(X) = -\frac{d}{dX} C_x(X) \quad (3-18)$$

e

$$p_y(Y) = \frac{d}{dY} F_y(Y) = -\frac{d}{dY} C_y(Y) \quad (3-19)$$

Como x e y são estatisticamente independentes, a Função Densidade de Probabilidade Conjunta $p_{xy}(X, Y)$ será dada por (A-6), e a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da degradação conjunta $z = x + y$ por (A-7), ou seja,

$$C_z(Z) = C_x(Z) * p_y(Z) \quad (3-20)$$

Na Figura 3.12 é apresentada a FDPC da degradação conjunta $C_z(Z)$ quando o comportamento da degradação causada por chuvas é o representado na Figura 3.7 e o da degradação causada pelo erro de apontamento da antena é o representado na Figura 3.11. Para cada conjunto de parâmetros da densidade

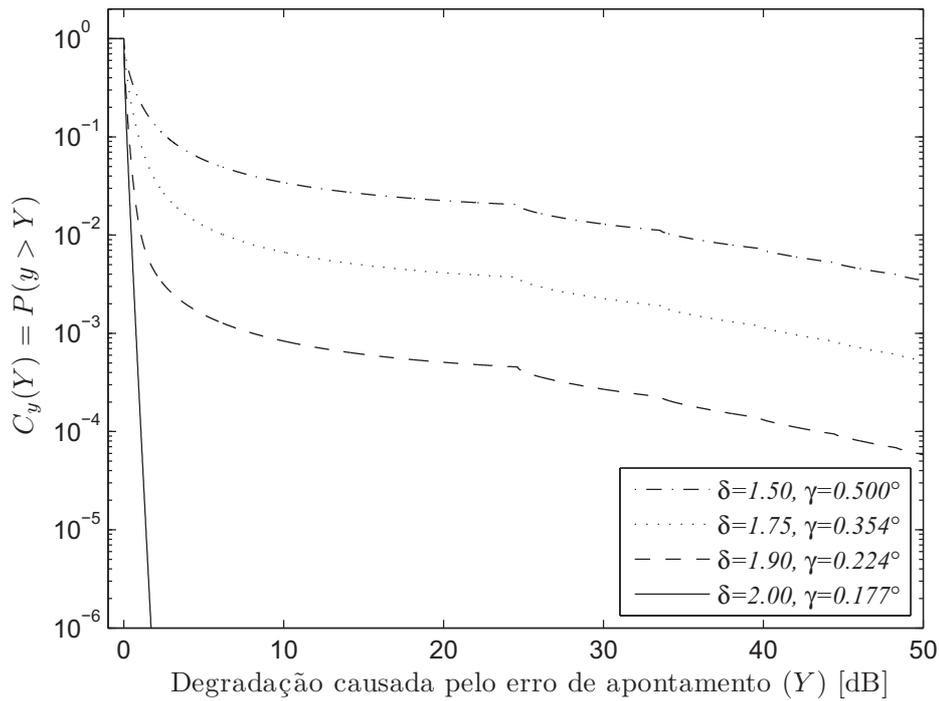


Figura 3.11: Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da degradação causada pelo erro de apontamento.

de probabilidade do erro de apontamento temos duas curvas de $C_z(Z)$, correspondentes à degradação total no pior e no melhor caso da degradação por chuvas. Quanto menor o erro de apontamento, mais significativa a contribuição da degradação por chuvas na estatística da degradação conjunta.

3.5

Cálculo dos parâmetros de desempenho a partir da caracterização estatística das variáveis aleatórias a eles relacionadas

A Taxa de Erro de Bit se relaciona à razão E_b/N_0 de acordo com a curva de desempenho da modulação. No caso de enlaces de comunicação por satélite, as modulações mais utilizadas são BPSK e QPSK, e assim a taxa de erro de bit b será dada por (3-1), que é uma função monótona, injetiva e estritamente crescente em relação a z . Dessa forma, podemos utilizar (A-8) para determinar a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da BER $C_b(B)$ a partir da FDPC da degradação total $C_z(Z)$, de forma que

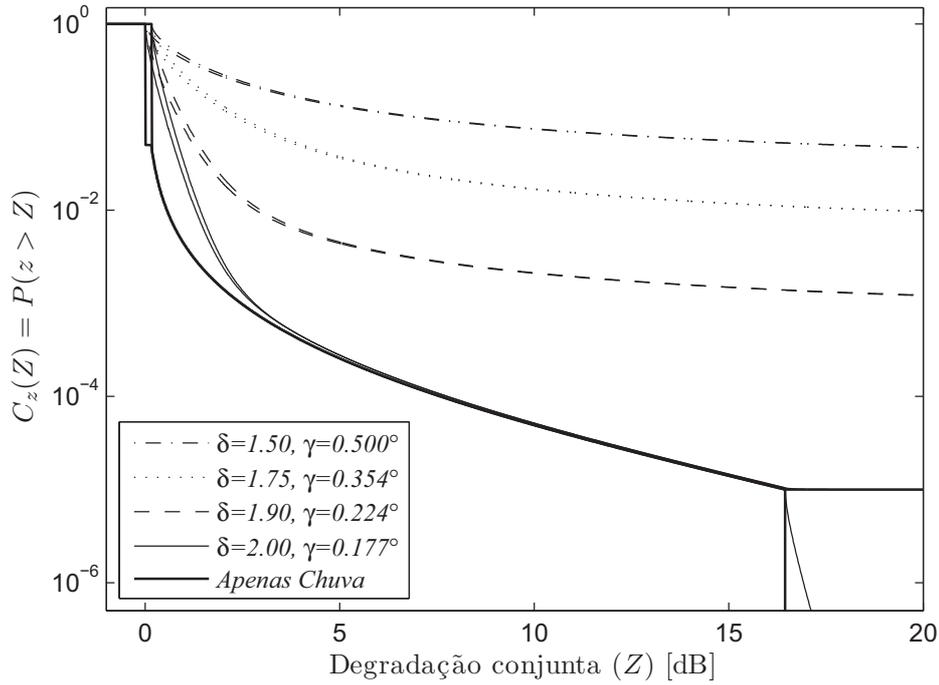


Figura 3.12: Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da degradação conjunta.

$$\begin{aligned}
 C_b(B) &= P(b > B) \\
 &= P\left(Q\left(\sqrt{2 \times 10^{\frac{1}{10}} \frac{E_b}{N_0} c_S^{-z}}\right) > B\right) \\
 &= P\left(10^{\frac{1}{10}} \frac{E_b}{N_0} c_S^{-z} < \frac{1}{2} (Q^{-1}(B))^2\right) \\
 &= P\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{c_S} - z < 10 \log\left(\frac{1}{2} (Q^{-1}(B))^2\right)\right) \\
 &= P\left(z > \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{c_S} - 10 \log\left(\frac{1}{2} (Q^{-1}(B))^2\right)\right) \\
 &= C_z\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{c_S} - 10 \log\left(\frac{1}{2} (Q^{-1}(B))^2\right)\right)
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

A probabilidade de bloco errado se relaciona com a BER por meio de (3-3), que é uma função monótona, injetiva e estritamente crescente. Assim, a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da probabilidade de bloco errado $C_{reb}(R)$, utilizando (A-8), será dada por

$$\begin{aligned}
 C_{r_{eb}}(R) &= P(r_{eb} > R) \\
 &= P\left(1 - e^{-\frac{N_B}{\alpha} b} > R\right) \\
 &= P\left(b > \frac{\alpha}{N_B} \ln\left(\frac{1}{1-R}\right)\right) \\
 &= C_b\left(\frac{\alpha}{N_B} \ln\left(\frac{1}{1-R}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

A probabilidade de segundo errado está relacionada à probabilidade de bloco errado através da função monótona, injetiva e estritamente crescente dada em (3-4). Portanto, a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da probabilidade de segundo errado $C_{r_{es}}(R)$ será dada por

$$\begin{aligned}
 C_{r_{es}}(R) &= P(r_{es} > R) \\
 &= P(1 - e^{-n r_{eb}} > R) \\
 &= P\left(r_{eb} > \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{1-R}\right)\right) \\
 &= C_{r_{eb}}\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{1-R}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

O relacionamento entre r_{ses} e r_{eb} é dado por (3-6), que é uma função monótona, mas não injetiva. A FDPC $C_{r_{ses}}(R)$ pode ser obtida a partir do procedimento definido em (A-10), (A-11) e (A-12). Define-se o subconjunto A_{ses} como sendo o conjunto dos valores da degradação total z que provocam uma probabilidade de segundo severamente errado superior a um determinado valor R , ou seja,

$$A_{ses} = \{Z \in \Omega_z : r_{ses} > R\} \tag{3-24}$$

onde Ω_z é o conjunto dos possíveis valores de z .

Em seguida, é definida a função indicadora

$$\mathbb{1}_{A_{ses}}(Z) = \begin{cases} 1 & , Z \in A_{ses} \\ 0 & , Z \notin A_{ses} \end{cases} \tag{3-25}$$

Por fim, a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da probabilidade de segundo severamente errado será dada por

$$C_{r_{ses}}(R) = P(r_{ses} > R) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{ses}}(Z) p_z(Z) dZ \tag{3-26}$$

O relacionamento entre r_{bbe} e r_{eb} é dado por (3-7), uma função não monótona. Assim, podemos adotar o procedimento definido em (A-10),(A-11) e (A-12) para determinar a FDPC da taxa de bloco errado de fundo $C_{r_{bbe}}(R)$ a partir da fdp da degradação conjunta $p_z(Z)$. Define-se o subconjunto A_{bbe} como sendo o conjunto dos valores de degradação conjunta z que provocam uma taxa de bloco errado de fundo superior a um determinado valor R , ou seja

$$A_{bbe} = \{Z \in \Omega_z : r_{bbe} > R\} \quad (3-27)$$

onde Ω_z é o conjunto dos possíveis valores de z .

Em seguida, é definida a função indicadora

$$\mathbb{1}_{A_{bbe}}(Z) = \begin{cases} 1 & , Z \in A_{bbe} \\ 0 & , Z \notin A_{bbe} \end{cases} \quad (3-28)$$

Por fim, a Função Distribuição de Probabilidade Cumulativa da taxa de bloco errado de fundo será dada por

$$C_{r_{bbe}}(R) = P(r_{bbe} > R) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{bbe}}(Z)p_z(Z)dZ \quad (3-29)$$

Na medida em que as probabilidades de ocorrência de eventos de erro foram modeladas como variáveis aleatórias, temos que os parâmetros de desempenho correspondentes são dados pelos valores médios dessas variáveis. Assim, de (A-14), e considerando que, por representarem probabilidades, as variáveis aleatórias assumem valores no intervalo $[0, 1]$, temos que

$$\overline{BER} = E[b] = \int_0^1 C_b(B)dB \quad (3-30)$$

onde \overline{BER} é a taxa de erro de bit média.

$$EBR = E[r_{eb}] = \int_0^1 C_{eb}(R)dR \quad (3-31)$$

$$ESR = E[r_{es}] = \int_0^1 C_{es}(R)dR \quad (3-32)$$

$$SESR = E[r_{ses}] = \int_0^1 C_{ses}(R)dR \quad (3-33)$$

$$\overline{BBER} = E[r_{bbe}] = \int_0^1 C_{bbe}(R)dR \quad (3-34)$$

onde \overline{BBER} é a taxa de bloco errado de fundo média.