5
Conclusão

Nas considerações finais do primeiro capítulo foi apresentada a discussão acerca da dispensabilidade dos diagramas. Eles são dispensáveis por serem ilegítimos enquanto meios demonstrativos ou por serem sempre passíveis de substituição por versões sentenciais? No restante deste trabalho, buscou-se mostrar em que medida tais alternativas parecem colapsar em uma única visão, que desqualifica os diagramas enquanto meios demonstrativos baseando-se na possibilidade de sua substituição por meios expressivos mais adequados; bem como na ameaça que eles podem representar para o rigor demonstrativo devido a seus aspectos intuitivos. Que eles possam ser substituídos, ou mesmo que seu mau uso possa comprometer o rigor de uma demonstração, não parecem contudo justificar que eles devam ser abandonados enquanto meios demonstrativos.

No segundo capítulo, foram apresentadas as críticas e reconstruções que adotam a segunda alternativa, mas apenas em função de considerarem a primeira uma tese fundamental. Foi possível notar que, salvo no tocante às primeiras críticas a Euclides, a perda de prestígio de seu sistema foi ocasionada por uma concepção de demonstração em termos de sentenças, a qual ganhou força no final do século XIX, e dominou a prática matemática durante a maior parte do século XX. Por conta da influência desta concepção, eram desqualificadas quaisquer demonstrações matemáticas que fizessem uso de diagramas – relegadas a um nível, por assim dizer, pré-formal. Uma justificativa para tal restrição é o requisito de que um sistema formal deve explicitar todas as informações que porventura venham a ser utilizadas nas demonstrações, de modo que não poderiam ser utilizados dispositivos que, de uma maneira ou de outra, contribuíssem de maneira independente no curso da mesma.

Embora as origens desta concepção de demonstração não sejam suficientemente claras, tentou-se mostrar algumas de suas possíveis causas, justificáveis e injustificáveis. Com relação às primeiras, pode-se dizer que os diagramas foram abandonados em função do surgimento de uma ferramenta simbólica poderosa com o aperfeiçoamento dos métodos algébricos. Ela possibilitou a solução de problemas difíceis de serem resolvidos por meio de diagramas, bem como uma homogeneização da linguagem matemática. Porém, não parece justificável, a partir disso, a adoção de uma postura hostil com relação às representações diagramáticas. E tampouco pode servir como justificativa (embora sirva como explicação) a rejeição do kantianismo em matemática (ou seja, da visão segundo a qual o conhecimento matemático está vinculado à intuição, mesmo que seja às assim chamadas *formas puras* da mesma). Afinal de contas, mesmo que os diagramas possam ser vistos como instâncias dos conceitos geométricos, não se segue a partir disso que eles não possam ser vistos independentemente deste vínculo (do mesmo modo que, por exemplo, o numeral 1 possa ser visto tanto como um símbolo quanto como uma instância do conceito de unidade).

Tampouco a existência de geometrias alternativas pode ser alegada em favor da rejeição dos diagramas, pois caberia ainda mostrar que seu uso em tais teorias é impossível – que seja difícil até se pode conceder, porém da dificuldade não se segue a impossibilidade. Deve-se ressaltar, neste sentido, que a geometria projetiva, essencialmente vinculada ao uso das figuras geométricas, revelou-se a unificadora de todas as geometrias chamadas *métricas* (dentre as quais, na medida em que utiliza o ângulo reto como um padrão, a geometria euclideana pode ser incluída). A definição unificadora do que seja geometria, proposta por Klein em seu *Erlangen Program*, a caracteriza como o estudo daquelas propriedades das *figuras* que permanecem invariantes sob um determinado grupo de transformações[1]. E muito embora Klein provavelmente concebesse *figura* em termos de conjuntos de pontos, que por sua vez deveriam ser representados em termos de números, nada parece impedir que se as considere em seu sentido ordinário, pelo menos no caso da geometria euclideana, cujas demonstrações permanecem em geral no âmbito do humanamente tratável, do visualizável.

Assim, no terceiro capítulo, buscou-se mostrar que a ligação entre os diagramas e alguma forma de conhecimento intuitivo (no sentido de possibilitarem a entrada sorrateira de informações não-autorizadas) não é necessária, e que as acusações que pesam contra Euclides baseadas neste pressuposto não se justificam nem de um ponto de vista histórico, nem de um ponto de vista lógico.

---

[1] Citado em Reid 1963, p. 192.

No que diz respeito a aspectos históricos, foram explorados, na obra de Netz, detalhes importantes acerca do uso dos diagramas, em geral negligenciados pelos comentadores. Com isso evidenciou-se a existência de um modo rigoroso de argumentação no contexto de surgimento dos *Elementos* – um contexto no qual, mesmo que não fossem explicitamente formuladas, as regras para a manipulação dos diagramas deviam ser suficientemente claras para que os envolvidos na prática não se deixassem levar por argumentos falaciosos. A obra de Netz apresenta uma louvável descrição dos pormenores que fizeram com que a geometria grega alcançasse o estatuto de ciência rigorosa. Com efeito, os cuidados tanto com relação ao texto quanto com relação aos diagramas das demonstrações deixam entrever a preocupação com o rigor demonstrativo – que poderia ser entendido, a exemplo do que acontece na modernidade, em termos de poder de convencimento, possibilidade de inspeção, e, por que não dizer, de formalização das demonstrações.

Com respeito à análise lógica, foram descritas duas abordagens distintas que modelam o uso de diagramas em Euclides e ao mesmo tempo respeitam os requisitos lógicos que valem para as teorias modernas acerca de tópicos como generalidade e necessidade dos resultados demonstrados. Uma delas constitui uma reconstrução dos *Elementos* que leva em conta o papel dos diagramas sem, contudo, os utilizar como símbolos próprios no sistema (ou seja, que os considera apenas em termos das informações que eles apresentariam numa demonstração euclideana). Este é o caso do sistema construído por Avigad e Mumma, que apesar de considerar o uso dos diagramas nas demonstrações (e neste sentido ser mais fiel à obra de Euclides), o faz de maneira tal que nas demonstrações o que se vê são sequências de símbolos tais como aquelas presentes em qualquer sistema formal moderno (o que, somado ao seu objetivo relacionado a provas meta-teóricas, o torna mais próximo de Hilbert, em termos de aparência). A segunda possibilidade, a saber, uma reconstrução na qual os diagramas sejam utilizados como símbolos próprios, de acordo com regras para sua manipulação e combinação, é apresentada no sistema de Miller. Mesmo que este último não tenha sido analisado em detalhe, um exemplo de demonstração em seu sistema serviu para ilustrar a possibilidade de um tratamento simbólico, para os diagramas mesmos.

Uma vez reconhecida a possibilidade de um tratamento formal destas representações (tanto no sentido tradicional de sistema formal, isto é, como arranjos simbólicos linear e sequencialmente dispostos, quanto numa versão ampliada desta concepção, para a qual os diagramas também possam ser vistos como símbolos), a tese acerca da *ilegitimidade* das representações diagramáticas em contextos de demonstração deve ser abandonada. Assim, a dispensabilidade dos diagramas só pode ser sustentada em termos de *possibilidade de substituição* das representações diagramáticas por representações sentenciais – e, ainda assim, apenas para o caso específico da geometria euclideana, uma vez que nada impede, em princípio, que existam representações diagramáticas para as quais não haja uma tradução sentencial adequada. De certo modo, as duas abordagens, de caráter histórico e lógico, revelam, respectivamente, que os diagramas não eram dispensáveis no contexto de surgimento do método axiomático, e tampouco podem ser considerados ilegítimos enquanto instrumentos de prova.

Por fim, desde uma perspectiva filosófica, a obra de Manders oferece um excelente exemplo de como é possível uma abordagem do problema que não se restrinja a considerações de cunho histórico, por um lado, mas que também não se deixe levar por uma mera avaliação da prática em termos de validade lógica. Ou seja, ela permite ir além do mero reconhecimento da indispensabilidade em termos históricos ou da legitimidade em termos lógicos. A questão relevante do ponto de vista filosófico diz respeito às razões pelas quais se pode dizer que os diagramas podem operar como símbolos propriamente ditos.

A resposta dada por Manders aponta para a existência de aspectos invariantes sob deformação, os quais podem ser utilizados sem que com isso se corra o risco de tomar uma propriedade acidental por algo essencial, e chegar assim a uma conclusão parcial ou errônea ao final de uma demonstração. Além disso, o autor oferece uma caracterização da prática matemática que nem a análise lógica nem a análise histórica possibilitam. Manders encara a matemática como uma prática intelectual, como uma espécie de jogo, e assim mostra a importância de padrões intersubjetivos de validade, ou seja, da dimensão pública da prática matemática. Talvez sejam estes elementos os responsáveis pela adoção dos diagramas em um contexto, e sua rejeição em outro. Deste modo, a análise filosófica possibilita a refutação da tese acerca da ilegitimidade dos diagramas sem recorrer necessariamente à pesquisa histórica, nem ao teste lógico para averiguar a adequação de seu uso em demonstrações.

Para encerrar este trabalho, aproveitando a deixa que a noção de jogo representa neste sentido, deve-se fazer justiça a uma figura central nas revoluções na filosofia da matemática do século XX, e que embora não tenha sido mencionado muitas vezes ao longo deste trabalho certamente influenciou na sua execução. Trata-se de Wittgenstein, para quem, especialmente na fase de transição entre os dois grandes momentos de sua obra[2], as teorias matemáticas devem ser vistas como jogos. Também é cara a Wittgenstein a analogia entre uma teoria matemática e a gramática de uma linguagem – tanto em um caso quanto em outro, a presença de um conjunto de regras aceitas de antemão é a marca característica.

Um grupo de regras determina um jogo, ou uma gramática, ou uma teoria matemática. Uma mudança no grupo de regras pode acarretar o surgimento de um novo jogo, ou em alguns casos uma melhoria do antigo. A substituição do quinto postulado de Euclides, neste sentido, representa o surgimento de um novo jogo. Sua apresentação analítica ou sua reconstrução formal, uma "melhoria". O xadrez jogado no tabuleiro e aquele jogado por meio da codificação das casas e peças são duas maneiras de se apresentar o mesmo jogo; mas a modificação das regras e peças representa um novo jogo, mesmo que o tabuleiro ainda seja o mesmo (este seria o caso do jogo de damas com relação ao de xadrez, por exemplo). Em ambos os casos, a pergunta por qual deles é o melhor jogo é simplesmente sem-sentido. No primeiro caso, porque trata-se de duas apresentações para um mesmo jogo (tal como duas maneiras de se chegar ao resultado de uma soma em aritmética, ou duas formas – falada e escrita – de uma mesma linguagem); no segundo, porque é impossível a comparação.

Wittgenstein reiteradamente descreve a geometria como uma sintaxe. As regras da geometria, de acordo com ele, estabelecem uma sintaxe para a linguagem na qual se pretende descrever o espaço visual. Assim, não são necessariamente descrições de algo pré-existente, mas apenas estabelecem uma linguagem, ou um jogo. Não se pode, por exemplo, estabelecer qual é *a* medida dos ângulos internos de um triângulo, pois isso seria equivalente a medir π. Este não é, no entanto, passível de medição, uma vez que estabelece um padrão para que se possa medir. Do mesmo modo, pode-se dizer que não é o uso dos diagramas que pode oferecer perigo a uma teoria matemática, pois estes serão usados na medida em que sejam adequados às regras do sistema – e as regras, vale lembrar não são a linguagem, mas sim o que a torna inteligível.

---

[2] Durante este período Wittgenstein teve várias discussões acerca da matemática com diversos membros do assim chamado *Círculo de Viena*, e suas conversações podem ser encontradas na obra de Waisman, que fez transcrições das mesmas (Waismann 1973).

Lamentavelmente, não há espaço neste encerramento para uma descrição mais detalhada das observações wittgensteinianas acerca da matemática. Deve-se mencionar, todavia, que ele representa uma virada significativa nas investigações em filosofia da matemática. Sua postura com relação ao que um simbolismo pode importar para uma teoria, que se pode entrever a partir de suas considerações sobre o sistema de cores, ajuda a entender o que Manders, mais tarde, vai descrever como granularidade das representações – ou seja, em que medida as partículas notacionais, por assim dizer, são decomponíveis em partes mais simples. Se alguém diz que algo é vermelho, por exemplo, pode-se inferir disso que ele não seja azul. De "AB é uma linha reta", em geometria euclideana (com diagramas), pode-se dizer que não se trata de um círculo. Nas reconstruções formais, pelo que foi visto, o procedimento padrão era justamente decompor a notação de maneira completa, a fim de evitar que determinados dados passassem despercebidos, ou de carona nos demais. É duvidoso, no entanto, que tal procedimento possa chegar a um fim, a uma exaustão completa das possibilidades. Cabe ao filósofo da matemática, neste sentido, investigar até que ponto os chamados aspectos co-exatos são intrínsecos a qualquer sistema notacional, e em que medida se pode utilizá-los em diferentes contextos.

Como se pode ver, inúmeros assuntos tratados acima se referem a discussões recentes sobre as quais ainda é difícil uma compreensão satisfatória, mas que não obstante apontam diretrizes para a pesquisa filosófica. Algumas delas, infelizmente, por falta de tempo hábil para sua investigação e redação, tiveram de ser deixadas de lado mesmo quando se revelaram importantes para este trabalho. Destacam-se, neste sentido, uma investigação acerca da possibilidade de utilização de diagramas geométricos em contextos para os quais se costuma pensar que eles não são adequados, a saber, nas demonstrações de resultados das geometrias não-euclideanas. De acordo com o que foi visto, não há aspectos co-exatos relacionados a paralelismo, ou seja, esta é uma relação que não pode ser lida do diagrama, de modo que restrições adequadas a respeito de seu uso deveriam torná-los adequados a estas teorias. Uma resposta positiva a tal indagação ajudaria a reforçar a tese acerca da queda injustificada dos diagramas na modernidade, já que a descoberta de tais geometrias está na origem de tal evento.

Com relação a questões de fundamentação, seria interessante uma comparação da estratégia de Hilbert para a fundamentação da aritmética via adoção do assim chamado "ponto de vista finitário". Vê-se ali um exemplo de notação de natureza dual, que pode ser vista tanto em termos de instâncias de conceitos aritméticos como em termos de um simbolismo abstrato. Seria interessante investigar em que medida se pode adotar um ponto de vista semelhante para a geometria e até que ponto se podem demonstrar os resultados tradicionais. Mais especificamente, se põe a pergunta sobre a possibilidade de demonstrações envolvendo a teoria das paralelas, preservando o caráter construtivo que o simbolismo diagramático, em Euclides, parece possuir.

De maneira análoga, seria interessante comparar o simbolismo diagramático aos símbolos utilizados em aritmética, com vistas a verificar em que medida algum correlato dos aspectos co-exatos podem ser ali encontrados. É possível, por exemplo, que se diga que um determinado número inteiro é maior que outro baseando-se no número de dígitos utilizados em sua representação – e algumas das provas da irracionalidade de $\sqrt{2}$ são oferecidas com base em aspectos relacionados à forma do número, mais que a seu valor específico. Mais difícil ainda, neste sentido, embora não menos interessante, seria relacionar os diagramas a sistemas simbólicos mais convencionais, tais como os símbolos lógicos e algébricos, ou a relação entre sistemas diagramáticos e sentenciais no tocante à exibição do conteúdo versus a exibição da forma lógica.

Como se vê, uma seara de problemas tipicamente filosóficos é descoberta com o ressurgimento do interesse por questões de visualização vinculadas ao raciocínio dedutivo. Para encerrar será evocada uma metáfora[3], de acordo com a qual uma teoria matemática é como um jogo, e um jogo "voa livremente". No presente contexto, buscou-se mostrar como a geometria saiu do ninho em que nascera, junto ao solo da empiria, e alçou vôos cada vez mais altos com relação a seu local de origem. Por outro lado, buscou-se mostrar também como, ao avistar o ninho vazio ostentando somente algumas penas perdidas – os diagramas – alguns deixaram de perceber que as penas pertenciam a ela, e não ao ninho.

[3] Inspirada em Wittgenstein (na *Gramática Filosófica*), e numa comunicação do professor Lassalle Casanave que, dentre outras coisas, motivou o presente trabalho (cf. Lassalle Casanave 2006).