2
Os *Elementos* e o Surgimento do Método Axiomático

2.1.
Introdução

Este capítulo tem como objetivos principais: (i) oferecer uma breve descrição de caráter histórico a respeito da obra inaugural do método axiomático em matemática: os *Elementos*, de Euclides; (ii) mostrar como muitos dos resultados matemáticos que até então eram conhecidos são organizados nos treze livros que compõem a obra; e (iii) apresentar e discutir de maneira mais pormenorizada o Livro I dos *Elementos*, de modo a facilitar a discussão ulterior acerca da importância dos diagramas para a geometria da maneira como ela é ali apresentada. Embora os objetivos (i) e (ii) sejam importantes tanto para uma contextualização quanto para um melhor entendimento da estrutura da obra, tais tópicos serão abordados apenas a título de introdução, sendo a maior parte do capítulo dedicada ao item (iii).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

2.2.
A matemática grega e o contexto de surgimento dos *Elementos*

Se a geometria se origina, entre babilônios e egípcios, como uma técnica para a solução de problemas práticos tais como a medição de terras, pode-se dizer que o seu amadurecimento, seu caráter de ciência demonstrativa, só foi alcançado com os gregos no assim chamado *período clássico* (mais especificamente entre 600 a.C. e 300 a.C.). De fato, mesmo que os egípcios dominassem algumas técnicas para solução de problemas de caráter geométrico, faltava ao seu modo de abordagem a generalidade e o rigor demonstrativo que se tornaram marcas da matemática grega. Dito de outro modo, o que transformou a geometria na ciência que por séculos foi chamada de "rainha das matemáticas" não foi somente a descoberta de novos resultados por parte dos gregos, como também, e principalmente, a ênfase na demonstração dos mesmos. E, embora os povos que os precederam tenham tido êxito na descoberta de alguns resultados geométricos, foram os gregos os responsáveis por esta espécie de "mudança de foco", dos fins para os meios, dos resultados para os métodos. Esta mudança pode ser percebida nas tentativas de sistematização de boa parte do conhecimento matemático à disposição dos gregos, as quais culminam no surgimento do método axiomático, do qual os *Elementos* de Euclides podem ser vistos como o marco fundamental[1].

Embora tenham sido escritos por volta de 300 a.C. – e, portanto, já no começo do assim chamado *período helenístico* (que se estende de 300 a.C. até 600 d.C.) – os *Elementos* são considerados como pertencendo ao período

[1] No comentário de Eudemo a respeito dos geômetras gregos (conhecido como *Catálogo dos geômetras* ou *Sumário de Eudemo* – ao qual se tem acesso por conta de uma menção que Proclo faz a ele), encontra-se a constatação de que muitos antes de Euclides escreveram e editaram Elementos: Hipócrates de Quios, conhecido pela descoberta do método para a quadratura da lúnula (não confundir com seu homônimo conhecido como o pai da medicina, que viveu num período posterior) compôs os primeiros Elementos de que se tem notícia. Posteriormente, outros autores, como Teeteto, Teodoro, Arquitas e outros antes de Platão, bem como Eudoxo, posteriormente a este, aumentaram em número os resultados e aperfeiçoaram seu modo de apresentação. A edição de Euclides, no entanto, parece ter sido a mais relevante de todas, dado que é única remanescente de seu gênero. Para uma excelente tradução do fragmento de Proclo que menciona o comentário de Eudemo, ver a introdução de Irineu Bicudo à sua tradução dos *Elementos*, em Euclides 2009, pp. 37-39.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

clássico, uma vez que os resultados ali sistematizados, bem como a maneira como são demonstrados são característicos da maneira clássica de se fazer matemática. Curiosamente, os *Elementos* não são uma obra original no que diz respeito a seu conteúdo e a seus aspectos básicos. No entanto, não surgiram compilações deste gênero após esta obra ter se tornado conhecida. Também não são encontradas referências a compilações semelhantes por parte dos estudiosos após o surgimento da edição euclideana[2]. Por fim, como esta obra é a única de seu gênero a ter sobrevivido ao passar dos tempos, e como Euclides é reconhecidamente um matemático inexpressivo no que diz respeito a descoberta de novos resultados, pode-se dizer com segurança que seus méritos vinculam-se ao método apresentado em seus *Elementos*. Com efeito, parece ser consenso entre os comentadores que, embora o modo de apresentação das proposições e o conteúdo dos livros não seja original de Euclides, a forma de apresentação da obra como um todo, a escolha e enunciação dos postulados e axiomas ao início da obra, e a ordenação dos teoremas parece ter sido obra de seu gênio. Por conta disso, não deve soar exagerada a frase que encerra o parágrafo introdutório desta seção.

Infelizmente, não se tem um acesso direto aos *Elementos* tal como eles foram escritos por Euclides. As versões de que se dispõe atualmente derivam de comentários, revisões e edições feitas pelo menos seis séculos depois de Euclides ter escrito a obra. Mais especificamente, o que se tem hoje são "reconstituições" a partir de três fontes básicas: 1) as revisões (ou recenseamentos) dos *Elementos* feitas no séc. IV d.C. por Theon de Alexandria; 2) um manuscrito descoberto na biblioteca do Vaticano por François Peyrard, no começo do século XIX; e 3) o comentário de Proclo, também do século IV, ao Livro I dos *Elementos*. Até 1814 todas as edições baseavam-se nos manuscritos theoninos, mas a descoberta do assim chamado "manuscrito P" (cujo nome é uma referência a Peyrard) fez com que muito do texto fosse modificado. Seu texto mais simples pôde ser usado como exemplar de colação, ou seja, para um cotejo com os manuscritos theoninos a fim de produzir uma reprodução mais fiel ao trabalho original.

Com o passar do tempo tornaram-se cada vez mais evidentes as qualidades do manuscrito P sobre os da tradição theonina. E a edição de

[2] De acordo com Kline 1972, p. 88, matemáticos como Apolônio e Arquimedes, que certamente tinham acesso a obras do mesmo gênero compiladas por outros autores, fazem referência somente aos *Elementos* de Euclides.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Heiberg, feita a partir do manuscrito P e dos melhores manuscritos theoninos, e observando o comentário de Proclo ao Livro I, é a que tem melhor aceitação nos tempos atuais. Se o que se tem hoje como os *Elementos* está ou não próximo àquilo que Euclides escrevera é algo que infelizmente não se tem como saber. E, mais importante para os propósitos do presente trabalho, se os diagramas que Euclides utilizou quando escreveu sua obra se assemelham aos que são usados hoje em dia ainda é uma questão em aberto. Sabe-se, por meio de um dos escassos comentários de Heath ao assunto, que a invenção de métodos de impressão para diagramas proporcionou um aumento significativo na impressão de exemplares dos *Elementos*, a partir de 1482[3].

O comentário de Proclo, além de ser usado como um parâmetro para a edição do Livro I, constitui também a principal fonte do pouco que se sabe a respeito dos geômetras gregos em geral, e da vida de Euclides em particular. Baseando-se no que Proclo escreveu (depois de transcorridos seis séculos da era de Euclides, vale lembrar), pode-se dizer que Euclides viveu num período imediatamente posterior ao dos primeiros discípulos de Platão, mas antes de Arquimedes. Além disso, consta que era contemporâneo do primeiro Ptolomeu. Como este reinou de 306 a 283 a.C., Platão morreu por volta de 347 a.C., e Arquimedes nasceu em 287 a.C., deduz-se que Euclides deve ter atingido sua maturidade por volta de 300 a.C.. Também de acordo com o que diz Proclo, Euclides viveu algum tempo em Atenas, onde provavelmente aprendeu geometria com os discípulos de Platão. Sabe-se ainda que posteriormente, ele fixou-se em Alexandria, onde fundou escola. Mesmo que se conceda que Euclides tenha aprendido geometria com os discípulos de Platão, deve-se considerar com alguma reserva a alegação de Proclo de que Euclides teria sido um platonista. A razão aludida por Proclo baseia-se no fato de que o Livro XIII dos *Elementos* encerra a obra com a construção dos assim chamados “sólidos platônicos”. Talvez a sugestão de Proclo deva-se apenas ao fato de ele mesmo ser um simpatizante da filosofia platônica, e não a algum vínculo efetivo entre esta e a obra de Euclides.

Embora pouco se saiba a respeito de quando Euclides compôs sua obra magna, deduz-se, como foi dito, que os *Elementos* foram escritos por volta do ano 300 a.C. A obra é uma compilação e sistematização de vários resultados descobertos ou demonstrados pelos gregos em diferentes ramos da matemática, representados de maneira geométrica e unificados pelo método axiomático de

[3] Cf. Heath 1956, p. 97.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

argumentação – “o único caminho para os que querem aprender geometria”, de acordo com um adágio que devia ser popular entre os estudiosos naquela época[4]. O caráter elementar e progressivo da obra faz com que a pergunta pelo seu propósito ou seu público-alvo não encontre uma resposta unívoca entre os comentadores. Para Proclo, a obra se destinava a iniciantes, como uma espécie de introdução ao estudo da geometria[5]. No entanto, cabe ressaltar mais uma vez, Proclo escreveu seu comentário quando a obra já possuía cerca de seis séculos de existência, e isto pode comprometer a fidedignidade de seus relatos. De acordo com a visão mais aceita atualmente, e a julgar pela complexidade de algumas demonstrações e pela ênfase na demonstração mais que na exposição dos resultados, a obra se destinaria a iniciados em geometria, representando a culminação dos esforços de organização e rigorização desta ciência no período imediatamente anterior a Euclides.

Não é raro que se vincule os esforços em torno da sistematização dos resultados matemáticos a uma espécie de “crise de fundamentos” que se instaurara na matemática desde a descoberta, pelos pitagóricos, das grandezas incomensuráveis[6]. Embora seja discutível que os fundamentos da matemática estivessem abalados à época em que Euclides escreveu seus *Elementos*[7], o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[4] Conta Proclo que Euclides, perguntado por Ptolomeu se havia um método mais rápido para se aprender geometria do que aquele encontrado nos *Elementos*, respondeu: “Não há atalho real em geometria” (havia à época, com efeito, estradas para os cidadãos comuns, e estradas especiais, mais curtas ou de fácil trânsito, destinadas à realeza). A mesma história, no entanto, é também contada por Estobeu, mas os protagonistas seriam Alexandre e Menaechmus. Cf. Euclides 2009, p.41; cf. também Heath 1956, p. 1.

[5] Cf. Kline 1972, p. 57.

[6] Para uma explicação mais detalhada, cf. Knorr 1975, pp. 306-312.

[7] Bons argumentos para não se aceitar a tese da crise de fundamentos são oferecidos por Russo 2003, p. 57. De acordo com Russo, seria exagerado supor que houvesse no século V a.C. uma concepção de matemática tal como a que havia em fins do século XIX. Pode-se, contudo, concordar que de fato a descoberta das grandezas incomensuráveis deva ter trazido algum desconforto aos estudiosos da época, bem como um motivo para que algum sofista colocasse sob suspeita a confiabilidade dos métodos matemáticos. Para um interpretação diferente da progressão (ou ausência de) na matemática grega, cf. Netz 1999, pp. 270-277. Netz argumenta que o surgimento do estilo euclideano deva ter tido um caráter mais catastrófico do que gradual, isto é, não evoluiu aos poucos, mas sim abruptamente. Um dos argumentos em favor desta tese,

rigor das demonstrações e a complexidade de algumas delas indicam que, embora apresentada de maneira didática, a obra realmente não se destinava a iniciantes. Por outro lado, o fato de não apresentar nada de novo com relação ao que já era conhecido na época, sugere que a obra possa ter sido escrita com vistas a dar à matemática a organização requerida pelo então novo ideal de ciência. Como deve ter sido escrita após os *Segundos Analíticos* de Aristóteles, freqüentemente se vê a obra de Euclides como uma realização do ideal de ciência dedutiva descrito por Aristóteles – muito embora não se veja nos *Elementos* nenhuma demonstração estruturada à maneira silogística. Parece mais seguro dizer que os *Elementos* cristalizam, isto sim, a concepção de demonstração em voga naquela época.

Fora de disputa, no entanto, está o fato de que a grande maioria – se não a totalidade – dos resultados e de suas respectivas demonstrações já era de domínio comum entre os estudiosos da época. Assim, a boa reputação de Euclides deve-se basicamente à sistematização destes conhecimentos e sua apresentação da maneira mais clara possível. De qualquer modo, cabe notar que alguns detalhes da obra devem-se ao próprio Euclides, como é o caso da escolha dos axiomas e do ordenamento das demonstrações, da demonstração do teorema de Pitágoras[8], e da formulação do postulado das paralelas[9]. De maneira original ou não, o mérito dos *Elementos* está em apresentar a geometria de uma maneira sistemática, dedutiva e com base em um número reduzido de princípios explicitamente admitidos de antemão. No que segue serão apresentados, por um lado, os diversos desenvolvimentos em geometria que são sistematizados nos treze livros dos *Elementos*, e por outro as possíveis razões que levaram à adoção do método axiomático como método padrão para as ciências dedutivas.

Os temas de cada livro se deixam entrever, em geral, pelo conjunto de definições que o precede. De acordo com Heath[10], os temas abordados nos treze livros da obra se distribuem de maneira progressiva em termos de

baseando também em Knorr 1975, p. 36-40, é o de que não há menção, dentre os pré-socráticos, de descobertas matemáticas particulares, e de matemática em geral.

[8] Cf. Reid 1963, p. 17.

[9] Cf. Kline 1972, p. 60.

[10] Heath 1921, pp. 373-419.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

complexidade[11] da seguinte maneira: o Livro I, além de apresentar os pilares sobre os quais todo o restante da obra se sustenta (a saber, postulados e noções comuns), introduz também as construções básicas necessárias para os desenvolvimentos subsequentes. Seu tema é a geometria retilínea plana. Círculos são apenas utilizados por meio do que suas definições e o terceiro postulado permitem, ou seja, suas propriedades não constituem uma preocupação. A figura central para o Livro I é o triângulo. Sua construção é efetuada logo na primeira proposição dos *Elementos*, e de suas propriedades dependem o transporte de segmentos nas primeiras proposições, a construção de perpendiculares e paralelas nas proposições intermediárias, e finalmente as operações envolvendo áreas, nas últimas proposições do livro. O conteúdo do primeiro livro é oriundo das escolas jônica (cujo principal expoente é Tales de Mileto) e pitagórica, e sua primeira sistematização se deve ao pitagórico Hipócrates de Quios, primeiro compilador de *Elementos*, de acordo com o que diz Proclo. É devida a ele, segundo alguns comentadores, a sistematização da geometria plana contida nos Livros I-IV, cujos resultados já eram todos conhecidos da escola pitagórica[12].

O tema do Livro II é derivado das últimas proposições do Livro I, ou seja, seu foco é a aplicação de áreas enquanto representação geométrica das operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação (o que faz com que por vezes o tema deste livro seja chamado também “álgebra geométrica”). Suas últimas proposições, por exemplo, são generalizações do teorema de Pitágoras para qualquer tipo de triângulo. As únicas figuras de interesse são os quadrados e os retângulos (e os triângulos retângulos enquanto componentes destes), as quais são as representações geométricas para a multiplicação de magnitudes representadas em termos de segmentos de reta, ou para a soma de magnitudes representadas em termos da área daquelas figuras. A multiplicação de dois segmentos desiguais é representada pela área do retângulo cujos lados são iguais aos segmentos dados; e, conseqüentemente, a multiplicação de um segmento por si próprio é representada pela área do quadrado cujo lado é igual ao segmento de reta dado.

---

[11] A progressão, vale lembrar, não é sempre suave de um livro para outro, uma vez que muitos temas de natureza diferente se intercalam ao longo dos treze livros. É importante ressaltar, no entanto, que na maioria dos casos as construções e resultados de um livro são utilizados no livro subsequente.

[12] Cf. Greenberg 1972, p. 6.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Ainda desta fonte surgem os resultados do Livro III, dedicado basicamente ao círculo e suas propriedades. São tematizadas ainda as relações dos círculos uns com os outros (como, por exemplo, círculos que se tocam, se cortam ou que coincidem); as relações com a reta (tanto como raio ou diâmetro do círculo quanto como cordas[13] em seu interior, ou ainda como tangentes a sua circunferência); e os ângulos formados por segmentos de reta e a circunferência de um círculo. Tal como o Livro I, o Livro III é fortemente comprometido com relações topológicas dos seus objetos, e, portanto nele os diagramas são de vital importância.

Ainda lidando com o círculo, o Livro IV trata da sua relação com as figuras retilíneas, em termos de inscrição ou circunscrição destas naquele ou vice-versa. Talvez por esta razão, este livro possui a peculiaridade de ser composto inteiramente por proposições de construção (ou *problemas*). Começando com a inscrição, em um círculo, de um segmento de reta menor que o diâmetro do mesmo, o livro procede com a inscrição ou circunscrição de triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares, e ainda a inscrição em um círculo de uma figura com 15 ângulos[14].

O Livro V introduz um material mais recente do que aquele oriundo do legado pitagórico e apresentado nos primeiros livros. Seu tema é a assim chamada nova teoria da proporção, trabalhada por Eudoxo (365 a.C.). Os pitagóricos, cabe ressaltar, também possuíam uma teoria da proporção, mas ela só se aplicava a grandezas comensuráveis. A teoria das proporções de Eudoxo se aplica tanto a grandezas comensuráveis quanto às incomensuráveis, além de poder ser aplicada a magnitudes de qualquer tipo (linhas retas, áreas e volumes). A teoria da proporção de conhecimento dos pitagóricos era de caráter aritmético, aplicando-se apenas a segmentos de reta, tal como exemplificada no Livro VII dos *Elementos*. No Livro VI vê-se a teoria da proporção exposta no livro anterior aplicada à geometria plana. Com aquela ferramenta, é possível o desenvolvimento da geometria plana para além dos casos de congruência, isto é, desenvolvê-la também para os casos de similaridade.

Os Livros VII, VIII e IX tratam da teoria de números ou aritmética. Nestes livros os números são sempre representados como segmentos de reta, mesmo

[13] Segmentos de reta internos a um dado círculo, que tocam a circunferência em dois pontos distintos, mas que sejam menores que o diâmetro do mesmo.

[14] Heath sugere uma motivação de natureza astronômica para este problema (Heath 1921, p. 383).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

que sejam quadrados, sólidos ou produtos de dois números. O papel do diagrama nas demonstrações, é, com isso, bastante restrito. No Livro VII são apresentadas as maneiras de se encontrar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre dois ou três números diferentes; bem como a teoria da proporção numérica mencionada acima. O Livro VIII aborda séries de números em proporção contínua, ou progressão geométrica. O Livro IX combina os anteriores, utilizando os resultados a respeito de números primos, cúbicos, etc., para estabelecer resultados acerca de séries de números em progressão geométrica.

O Livro X, aclamadamente o mais indefectível dentre todos os treze, trata das grandezas incomensuráveis ou irracionais. Seu conteúdo é oriundo do trabalho de Teeteto, mas se atribui a Euclides o mérito pela organização das proposições. Finalmente, os Livros XI, XII e XIII tratam de geometria sólida. No Livro XI encontram-se as noções fundamentais a respeito dos objetos geométricos em três dimensões, bem como resultados acerca de sólidos paralelepípedos. O Livro XII tem como principal ferramenta o método de exaustão, e como objetivo a demonstração de relações entre áreas e volumes de círculos, quadrados, cones, pirâmides, cilindros e esferas. E, encerrando a lista dos 13 livros que são geralmente tidos como a totalidade dos *Elementos*, o Livro XIII é dedicado à construção, e subseqüente compreensão, ou inscrição, dos cinco sólidos ou poliedros regulares em esferas. Vale lembrar que estes sólidos também são conhecidos como sólidos platônicos, a saber: pirâmide, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro. A construção da esfera circunscrevendo tais sólidos, por sua vez, é feita pela determinação da relação entre o raio da esfera e o lado do sólido em questão. Como encerramento, Euclides oferece a demonstração de que apenas existem, isto é, são passíveis de construção, os cinco poliedros regulares mencionados.

Como já foi dito, o maior mérito de Euclides não diz respeito ao conteúdo de seus *Elementos*, já que nenhuma descoberta é ali apresentada. Sua genialidade está no método, na organização e uniformidade que o autor dá a este conteúdo diversificado – que cobre boa parte do que até então se conhecia em matemática. A seguir serão apresentadas em detalhe, na análise do Livro I dos *Elementos*, cada um dos componentes da axiomática euclidiana, levando em conta especialmente um que foi marginalizado com o passar do tempo por aqueles que editaram ou fizeram comentários a respeito da obra: o diagrama. O Livro I será o escolhido para a apresentação de todos estes componentes tanto por simplificar a exposição quanto pelo fato de ser o único a apresentá-los todos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

reunidos. Além disso, o papel do diagrama é melhor apreciado quando são analisados os livros que tratam de relações topológicas das figuras, como os Livros I e III. Nos livros restantes o papel dos diagramas é menos expressivo, e por vezes chega a ser quase irrelevante (como nos Livros VII, VIII e IX).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

2.2.1.
O Livro I

Sem introduções, preâmbulos, agradecimentos ou qualquer elemento textual que não esteja de algum modo vinculado às demonstrações subsequentes, o primeiro livro dos *Elementos* vai direto ao ponto – neste caso, literalmente: "Ponto é aquilo de que nada é parte"[15]. Não há sequer uma introdução do tema a ser abordado nos treze livros seguintes, nem uma alegação de originalidade da obra ou de resultados específicos. A explicitação do tema, aliás, não parece ser uma preocupação para o autor dos *Elementos* – atitude que combina bem com o espírito do método que ali dava seus primeiros passos. Tudo que se vê no começo do primeiro livro, é uma espécie de *mise en place* dos ingredientes e utensílios que serão utilizados, ou seja, uma organização prévia de tudo que possa vir a ser utilizado no restante da obra – mesmo que alguns dos termos definidos só apareçam na apresentação de suas próprias definições[16].

2.2.1.1. Os princípios

Os primeiros elementos apresentados são as *definições*. São 23 definições neste livro, das quais algumas parecem servir para introduzir uma espécie de vocabulário básico, como é o caso das primeiras definições, enquanto outras introduzem novos termos a partir das primeiras, funcionando de maneira mais

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[15] De acordo com Reid, esta frase marca o início da matemática moderna (cf. Reid 1963, p. 16). Embora possa soar exagerada ou anacrônica, a alegação de Reid não deixa de ser verdadeira, pois muito embora a matemática tal como conhecida nos dias de hoje seja diferente daquela praticada por Euclides no que diz respeito ao simbolismo e ao modo de apresentação, o método continua, em linhas gerais, o mesmo método introduzido por aquela sentença inicial dos *Elementos*.

[16] A definição de ângulo, que não se aplica apenas aos ângulos retilíneos – os únicos que são realmente utilizadas na obra – é um exemplo do que alguns comentadores vêem não como peças úteis para a teoria, mas sim uma espécie de reverência por parte de Euclides com relação à tradição, uma vez que tais definições certamente desempenharam um papel importante no avanço da geometria. Cf. Heath 1981, p. 357; cf. também Levi 2008, p. 100.

parecida com as definições dos sistemas axiomáticos modernos. A seguir serão enunciadas algumas das definições mais relevantes deste livro[17]:

Def. 1: Ponto é aquilo de que nada é parte.

Def. 2: E linha é comprimento sem largura.

Def. 3: E extremidades de uma linha são pontos.

Def. 4: E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

Def. 8: E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.

Def. 10: E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.

Def. 14: Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

Def. 15: Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si[18].

Def. 16: E o ponto é chamado centro do círculo.

Def. 19: Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais de quatro retas.

Def. 20: E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem todos os lados desiguais.

Def. 21: E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.

Def. 23: Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

---

[17] Será adotada a tradução dos *Elementos* para o português feita por Irineu Bicudo (em Euclides 2009).

[18] Os trechos entre colchetes são acréscimos da parte do tradutor para o português, baseados em outras edições que não as canônicas ou simplesmente como uma maneira de facilitar a leitura.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

As definições, como se vê, introduzem o vocabulário. Talvez também seja possível vê-las tanto como descrições do papel que compete a certos elementos diagramáticos (a pontos, por exemplo, se atribui a função de marcar posições, apenas; às retas, marcar distâncias, mas não áreas, e assim por diante), quanto descrições de sua estrutura ou composição (ângulos são determinadas relações entre linhas, triângulos são figuras compostas por três linhas retas determinadas, etc.). Na definição de ângulo, por exemplo, vê-se claramente a restrição de acordo com a qual as linhas que o definem devem se tocar e, não menos importante, não podem estar sobre uma linha reta (ou seja, devem ser distintas).

Depois das definições são introduzidos os *postulados*, o grupo de proposições que pode ser visto como o mais importante dentre todos:

> *Post. 1: Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.*
>
> *Post. 2: Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.*
>
> *Post. 3: E, com todo centro e distância, descrever um círculo.*
>
> *Post. 4: E serem iguais entre si todos os ângulos retos.*
>
> *Post. 5: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.*

Os postulados podem ser vistos como estabelecendo ações que devem ser permitidas (Post. 1-3, 5), ou uma magnitude que deva ser aceita como reidentificável (Post. 4). O primeiro e o segundo são geralmente vistos, enquanto relacionados aos diagramas, como a autorização do uso da régua (sem marcações, vale lembrar) para a produção dos elementos diagramáticos correspondentes à noção de linha reta: traçar uma linha entre um ponto e outro, ou prolongar para além de uma das extremidades uma linha já existente. O terceiro, por sua vez, é visto como autorizando o uso do compasso relacionado aos círculos: desenhar um círculo a partir de dois pontos, dos quais um marcará o centro e o outro a circunferência. É importante notar, no entanto, que o uso de régua e compasso não é mencionado em nenhum lugar nos *Elementos*. A relação entre os postulados e estas ferramentas não é sugerida em nenhum momento, sendo apenas uma metáfora adequada para representar as restrições que os postulados impõem sobre as representações diagramáticas. Tais restrições, vale lembrar, limitam o escopo da teoria de maneira a permitir apenas as construções mais simples. Com efeito, havia na época uma classificação dos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

tipos de linha que poderiam servir para delimitar domínios específicos no interior da geometria[19]. As linhas mais simples, chamadas *linhas planares*, incluem apenas segmentos de reta e círculos; que são, como foi dito, as linhas que definem o tema da geometria apresentada nos *Elementos*. O segundo tipo de linhas, chamadas *sólidas*, incluem as seções cônicas (elipse, parábola, e hipérbole), e as *lineares*, por fim, incluíam a quadratrix, as concóides e as cisóides[20]. Vê-se, assim, que nos *Elementos*, Euclides escolhe os princípios mais restritivos para levar a cabo a sua sistematização da geometria. De acordo com Pambuccian, os postulados prescrevem a construção de objetos simples, de fácil apreensão, com vistas a exibição de uma determinada característica[21]. O objetivo parece ser determinar um mínimo necessário e suficiente para o desenvolvimento das demonstrações.

Deve-se notar que mesmo o quinto postulado possui caráter construtivo, uma vez que, a despeito da forma mais elaborada como ele é apresentado, ele também pode ser visto como a construção de algo: o ponto de interseção de duas retas que possuem as características requeridas na primeira parte do postulado; ou, o que é equivalente neste contexto, um ângulo cujo vértice é este ponto e cujos lados são as duas retas mencionadas. Ou, caso se queira evitar falar da construção de pontos[22] (já que os pontos são os elementos primitivos do sistema), o quinto postulado pode ser visto como a garantia de que duas ou três retas em dadas circunstâncias determinam um ângulo ou um triângulo[23], respectivamente. Assim, dada uma configuração de três retas no diagrama, das quais uma corta as outras duas, e cujos ângulos de um lado somam menos de dois ângulos retos, pode-se "abreviar", por assim dizer, a representação diagramática desta situação e se desenhar um triângulo – o que já indica que as

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[19] Cf. Heath 1956, pp. 329-331. Cf. também, Greaves 2002, pp 21-22.

[20] Greaves 2002, p.207, sugere que Euclides usa, nos livros XI-XIII, seções cônicas, que pertencem ao segundo tipo de *loci*. Cabe ressaltar, no entanto, que apesar de usar o cone, em nenhuma das proposições destes livros Euclides recorre a seções de cones.

[21] Pambuccian 2008.

[22] Levi sugere exatamete esta interpretação, traduzindo os postulados de Euclides para uma versão adaptada aos padrões modernos: "Existe e é único o *ponto de intersecção* entre duas retas..." (Levi 2008, p. 103).

[23] A última interpretação, sobre construção de triângulos, pode ser encontrada em autores como Michael Beeson (Beeson 2009a).

dimensões absolutas das figuras nunca interferem nas demonstrações dos *Elementos*.

Como, no entanto, o triângulo é construído pelo menos de duas maneiras diferentes ao longo da obra – o mesmo valendo para os ângulos – a função deste postulado não deve ser simplesmente estipular sua construção (ou existência, de acordo com a interpretação moderna), tal como se pode dizer dos segmentos e círculos. Sua formulação condicional, bem como sua posição na lista de postulados, dão indícios de qual pode ser sua função: vincular triângulos e ângulos à unidade de medida introduzida no postulado anterior. Estas figuras poderão ser introduzidas uma vez que se saiba que a magnitude de dois ângulos determinados, formados por três retas, seja menor que dois ângulos retos. Como possui um caráter construtivo, o postulado deve ser entendido como determinando, para três retas na condição estabelecida, um lado da transversal onde se pode construir (ou, na terminologia moderna, onde existe) um ponto, ângulo ou triângulo.

Os postulados, portanto, regulamentam a introdução de determinados elementos no diagrama, os quais podem ou não ter sua magnitude determinada de antemão: segmentos de reta determinados (Post. 1) ou indeterminados (Post. 2), círculos (Post. 3), ângulos determinados (Post. 4), e pontos, ângulos ou triângulos indeterminados. Estes, por sua vez, terão sua participação restringida aos aspectos que suas definições lhes atribuem. Vale ressaltar que os postulados podem também ser vistos como modos de garantir que, mesmo que as figuras desenhadas não sejam, de fato, retas ou circulares, pode-se ainda tomá-las *como se* fossem tais, ou seja, como representações de retas e círculos. Assim, são introduzidos como elementos diagramáticos primitivos a reta (Post. 1 e Post. 2), o círculo (Post. 3), o ângulo reto (Post. 4) e o triângulo (Post. 5). O diagrama, deste modo, vai se transformando cada vez mais em uma dimensão ativa e regulamentada do processo de prova[24].

Por descreverem, em sua maioria, *ações* cuja possibilidade deve ser aceita de antemão, os postulados dão à axiomática euclidiana contornos sensivelmente diferentes daqueles que podem ser vistos nas teorias axiomáticas modernas. Nestas, eles seriam vistos como afirmações de existência e unicidade. Em vez

[24] Bastante interessante é o comentário de Heath acerca dos postulados (Heath 1921, p. 374). De acordo com o autor, Euclides responde, ao *postular* a possibilidade de se desenhar retas e círculos, às críticas sobre o caráter imperfeito das retas e círculos que podem ser fisicamente desenhados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

de “Traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto” ler-se-ia “Existe e é única a reta que liga qualquer ponto a qualquer ponto”. Para Euclides, a existência da reta está vinculada a sua construção. Por meio desta interpretação, e do que foi dito acima a respeito do caráter construtivo e condicional do quinto postulado, pode-se dizer então que o mesmo estabelece que apenas em um dos lados da transversal pode ser construído um triângulo – pois se fosse possível construí-lo em ambos os lados[25], o primeiro postulado perderia seu caráter determinante, pois existiriam, deste modo, duas retas entre dois pontos. Assim, a única indeterminação para a introdução desta figura seria o caso em que os ângulos fossem *iguais* a dois retos[26].

No texto dos postulados, como se pode notar, as palavras definidas são minoria. De acordo com Mueller, as palavras utilizadas na formulação dos axiomas se classificam em pelo menos cinco classes distintas:

> (i) verbos que descrevem atividade matemática, como “traçar”, “descrever”, “prolongar”.
>
> (ii) expressões indicando posição relativa, como “de... a...”, “continuamente”, “em uma linha reta”, etc.
>
> (iii) expressões para comparações de tamanho: “igual” e “menor”.
>
> (iv) expressões para extensão: “finita” e “indefinidamente”.
>
> (v) termos gerais designando propriedades geométricas e objetos, como “reta”, “linha”, “ponto”, “círculo”, “distância”, etc.[27]

Comentando a classificação de Mueller, Netz acrescenta ainda duas classes:

> (*vi) palavras gramaticais, como “e”, o verbo “ser” e artigos; e
>
> (*vii) palavras de ‘segunda ordem’, representadas na frase introdutória por “postulado”[28].

A classe (v) é a única que contém termos introduzidos pelas definições (com exceção de “distância”). Não por acaso, ela também é a classe de expressões mais caracteristicamente geométricas, e embora sua aparição nos *Elementos* seja relativamente menor que a das demais, é sua ausência em textos de caráter não-matemático o que a diferencia delas, e que caracteriza os

[25] Como de fato é possível na geometria elíptica.

[26] Caso que será tratado em I,27-28, onde fica determinado que tais casos impossibilitam o uso desta figura.

[27] Mueller 1981, p. 39.

[28] Netz 1999, p. 97.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Elementos como uma obra de geometria. A axiomática grega, de acordo com um argumento apresentado por Mueller, não pode ser entendida em termos de uma estrutura abstrata, ou "sem conteúdo", caracterizada tão somente pelo conjunto de axiomas[29]. Os termos próprios da geometria não estão entre os postulados por mero descuido do autor; são eles, com efeito, o que dão à obra o seu caráter geométrico. Eles fazem a ponte entre o texto das demonstrações e o seu objeto, representado pelo diagrama de modo ainda mais característico.

As *noções comuns*, também cinco em número, dizem o seguinte:

> *N. C. 1: As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.*
>
> *N. C. 2: E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.*
>
> *N. C. 3: E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.*
>
> *N. C. 4: E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.*
>
> *N. C. 5: E o todo [é] maior do que a parte.*[30]

Como se pode ver, elas introduzem noções de caráter ainda mais evidente que o que é introduzido pelos postulados (dos quais pelo menos o quinto pode ser visto como obscuro em sua formulação) – se os postulados pedem a construção de objetos de simples apreensão, as noções comuns introduzem noções de fácil compreensão[31]. Seu objetivo parece ser fixar as leis que estarão valendo para a aplicação da igualdade (1-4) ou da desigualdade (5). Além disso, três operações também são mencionadas: adição, subtração, e coincidência[32] (em algumas demonstrações Euclides pedirá que se "leve a coincidir" umas com as outras determinadas partes dos diagramas, como na demonstração da proposição 4).

A noção de igualdade, curiosamente, já havia sido introduzida para um caso particular, na formulação dos postulados. O quarto postulado estipula que todos os ângulos retos são iguais. Esta peculiaridade fez com que por vezes

---

[29] Cf. Mueller 1981, p. 10.

[30] Na tradução de Bicudo, são apresentadas nove noções comuns, sendo que as adições são tanto formas recíprocas de outras já apresentadas (como *N. C. 4*: E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais*), quanto fórmulas com conteúdo especificamente geométrico (como *N. C. 9: E duas retas não contêm uma área*). Cf. Heath 1981, pp. 221-240, para uma excelente discussão acerca das noções comuns que provavelmente não são autênticas.

[31] Cf. Pambuccian 2008.

[32] Que Bicudo traduz por "ajuste".

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

este quarto postulado fosse considerado uma noção comum, ou um postulado adicionado posteriormente por algum editor do texto euclidiano, já que além de estabelecer um critério de identidade (como fazem as quatro primeiras noções comuns), ele não apresenta o caráter construtivo dos demais. Que pertença propriamente ao grupo dos postulados, no entanto, parece justificar-se pelo seu caráter especificamente geométrico[33], que o excluiria das "noções comuns a todas as ciências". O ãngulo reto, tal como o círculo e a linha reta, parece ser introduzido como uma figura elementar[34], e, a exemplo daqueles, terá papel fundamental no transporte irrestrito de ângulos, isto é, na capacidade de se transportar um ângulo dado (no sentido de construir outro igual) a qualquer ponto do plano[35]. Sua função parece ser possibilitar a leitura, a partir do diagrama, de aspectos importantes a respeito das magnitudes e posições dos ângulos em determinadas configurações.

Para encerrar a apresentação dos princípios da axiomática euclidiana, pode-se dizer que mesmo que numerosas e variadas críticas tenham sido dirigidas a eles, há de se reconhecer que seu número reduzido e a relativa simplicidade com que são formulados, contrastados com o grande número de resultados a que eles dão origem, constituem o diferencial que fez com que os *Elementos* de Euclides tenham se sobreposto a todas as compilações semelhantes que circulavam â época – e que torna a obra uma inesgotável fonte

[33] Diferentemente da noção de "ajuste" ou "coincidência", que aparece em uma noção comum, "ângulo reto" não possui outro uso senão em geometria, ao passo que a coincidência é uma noção cujo uso extrapola os limites da mesma.

[34] O triângulo retângulo, cujo elemento essencial é o ângulo reto, marca presença nos primórdios da geometria como uma espécie de ferramenta. Com uma espécie de anel de fita, dividido em 12 segmentos iguais se poderia construir um ângulo reto, bastando para isso estender e pregar a fita em três pontos distintos, de modo que em cada lado do triâgulo assim construído houvesse 5, 4 e 3 unidades (hipotenusa, vale lembrar, significa "esticado contra", o que se explica pelo fato de que esta era representada por uma corda esticada contra os catetos do triângulo retângulo (cf. Kline 1953, p. 17)). Embora os egípcios tenham usado estas e outras instâncias do teorema que mais tarde Pitágoras formulou de maneira geral, não se considera que a geometria como ciência formal tenha se originado com eles justamente pela falta de generalidade e de demonstração nos seus métodos. Sobre este tema, cf. por exemplo, Reid 1963, pp. 1-3; Kline 1972, pp. 15-23. O ângulo reto será tematizado novamente adiante, quando algumas das proposições necessárias ao transporte de ângulos forem descritas.

[35] Esta interpretação é consoante com a de Levi (Cf. Levi 2008, pp. 105-108).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

de indagações até os dias de hoje[36]. Por outro lado, sua escolha e formulação são talvez a razão principal pela qual o nome de Euclides figure entre os mais importantes na matemática, mesmo que ele não tenha se destacado pela descoberta de novos resultados.

2.2.1.2. As demonstrações

De acordo com o que se sabe a respeito do texto euclideano, e que será visto em maior detalhe no terceiro capítulo[37], as demonstrações dos *Elementos* eram apresentadas em forma de prosa, sem numerações, partes distintas ou outras estratificações que lembrem as demonstrações modernas. O modo como o texto das demonstrações é formulado, quase que de maneira padronizada com respeito ao uso de determinadas expressões, torna possível a identificação de diversos aspectos que as caracterizam. Em geral, as demonstrações presentes nos *Elementos* dividem-se em seis partes distintas:

a) enunciado (*protasis*): a enunciação do teorema ou problema propriamente dito;

b) exposição (*ekthesis*): descreve a figura particular a ser tratada;

c) especificação (*diorismos*): apresenta, para a figura particular, a propriedade ou construção que será demonstrada;

d) construção (*kataskeue*): efetua, por meio do que é permitido pelos cinco postulados, as construções necessárias para a demonstração;

e) prova (*apodeixis*): por meio geralmente de noções comuns e definições, demonstra que a construção efetuada está de acordo com o que se sustentou na especificação.

f) conclusão (*sumperasma*): revisa a construção efetuada (no caso dos problemas) ou simplesmente retoma o enunciado (no caso dos teoremas).

[36] É interessante notar que todas as reconstruções dos *Elementos*, incluindo as que pretendem enaltecê-lo como um exemplo de rigor, mais que recriminá-lo por eventuais falhas, lançam mão de um número de princípios muito superior ao escolhido por Euclides – o que de certo modo ressalta o quanto os diagramas podem ser facilitadores das demonstrações sem, com isso, perder o rigor necessário.

[37] Seção 4.4.2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Como observa Mueller, do ponto de vista moderno tudo que segue o enunciado, ou *protasis*, é prova (com exceção da especificação, ou *diorismos*)[38]. A divisão da prova, no entanto, aponta para alguns aspectos da prática grega que a diferenciam do método moderno. A introdução do condicional, por exemplo, não aparece na demonstração de Euclides. Do enunciado geral (*diorismos*) passa-se à escolha de um caso particular (*ekthesis*), sobre o qual se dá a demonstração (*kataskeue-apodeixis*), e em seguida se conclui de maneira geral novamente (*sumperasma*), sem um passo que explicite que a prova está condicionada à escolha daquele caso em particular. De acordo com Mueller isto pode ser explicado pelo fato de que, para os gregos, não haveria uma diferença significativa entre uma inferência e uma proposição condicional. A introdução do condicional, assim, está pressuposta pela própria demonstração.

Seguindo o exemplo já sugerido pelos postulados e noções comuns, as proposições demonstradas se enquadram na seguinte classificação: algumas delas visam a demonstração da possibilidade de execução de determinadas ações com os diagramas geométricos, e outras visam demonstrar que determinadas propriedades se aplicam aos objetos por eles representados. As primeiras são chamadas, de acordo com uma terminologia provavelmente posterior a Euclides, *problemas*, e as últimas, *teoremas*. No caso dos problemas, a especificação (*diorismos*) geralmente se inicia com “É requerido construir...”, enquanto que nos teoremas ela se inicia com “Eu digo que...”.

Pode-se dizer que os temas dos livros deixam-se entrever tanto pelas definições que os precedem quanto pelo conjunto das proposições demonstradas em cada um deles. No caso do Livro I, como já foi dito acima, o tema é a geometria plana retilínea, em sua forma mais elementar. É possível descrever o conteúdo deste livro tendo como fio condutor o objetivo sugerido pelas suas últimas proposições, a saber: a construção de um paralelogramo, sobre um ângulo retilíneo dado, de uma área igual a de uma figura retilínea dada (I,45); a construção de um quadrado sobre uma reta dada (I,46); a demonstração da igualdade da área de dois quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo à área do quadrado construído sobre a hipotenusa do mesmo triângulo (I,47); e a demonstração de que se os quadrados construídos sobre dois lados de um triângulo são iguais ao quadrado construído sobre o lado restante, então o triângulo é retângulo (I,48).

[38] Mueller 1981, p. 11.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

É possível fazer uma descrição do caminho que leva a estas demonstrações por meio da análise da sequência de construções (problemas) que levam a elas. Como os quadrados eram tomados como representações de áreas, a demonstração do teorema de Pitágoras (I,47) pode ser vista como um modo de assegurar a possibilidade de se somar áreas. Como, no entanto, as áreas de que trata o Livro I não são dadas necessariamente como quadrados, mas sim, geralmente, como figuras retilíneas de caráter diverso, é preciso antes que se saiba fazer equivaler qualquer figura retilínea a um quadrado (I,45 ensina a construir sobre um ângulo dado um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada; e I,46 ensina a construir o quadrado). Para que se construa um quadrado, por sua vez, é necessário que se saiba construir, sobre um segmento (que deve ser dado de antemão) um ângulo reto (I,11 e I,12), e também que se saiba traçar uma reta paralela àquele segmento dado (I,31). Além disso, a soma de áreas requer o posicionamento das áreas a serem somadas sobre os catetos de um triângulo retângulo, ou, em outros termos, é requerido que os dois quadrados sejam posicionados no contorno de um ângulo reto. Assim sendo, também deve-se saber transportar segmentos (I,2 e I,3), bem como (embora não diretamente), ângulos de qualquer magnitude (I,23). Como não é possível o transporte rígido de figuras ou quaisquer de seus elementos no plano, tudo isso deve ter sua possibilidade demonstrada, ou, dito de outro modo, tudo deve *construído*[39]. Deste modo, a sequência de problemas, ou proposições de construção, parece fornecer um bom fio condutor para a leitura do Livro I.

Os problemas somam um total de 14 proposições, e se distribuem geralmente em sequências intercaladas por teoremas (as 34 proposições restantes). As proposições I,1-3 são as primeiras do grupo dos problemas, e apresentam as técnicas para o transporte irrestrito de segmentos no plano (entendido aqui como cópia e não como manipulação mecânica de elementos diagramáticos). O grupo seguinte, I,9-12, ensina como bissecar ângulos e segmentos, e como construir ângulos retos. Em seguida, o par I,22-23 apresenta o transporte irrestrito de ângulos, o qual utiliza o triângulo como ferramenta essencial. A próxima proposição construtiva aparece isolada de outras de caráter

[39] O método de superposição, vale lembrar, nunca é utilizado em problemas, mas somente em teoremas. Seu caráter é, em certo sentido, hipotético. Assim, seu uso em, por exemplo, I,4, apenas se justifica na medida em que, subsequentemente, a hipótese pode ser "descarregada", uma vez que se demonstra a possibilidade de transporte irrestrito de segmentos e ângulos no decorrer do Livro I.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

semelhante: trata-se de I,31, cujo objetivo é a contrução de uma reta paralela a uma reta dada. Na sequência de problemas, I,42 pede a construção, em um ângulo dado, de um paralelogramo igual em área a um dado triângulo. Depois dela, I,44-46 encerram a sequência de problemas com a apresentação do transporte de áreas para as figuras retilíneas, e a construção do quadrado.

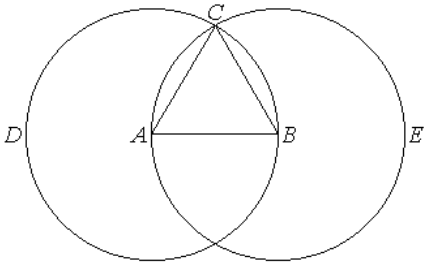
A seguir será apresentada a primeira proposição dos *Elementos*, com a indicação das partes das demonstrações euclidianas entre colchetes:

> [Enunciado - *Protasis*]
>
> Construir um triângulo equilátero sobre um segmento de reta finito dado.
>
> [Exposição - *Ekthesis*]
>
> Seja AB o segmento de reta dado.
>
> [Especificação - *Diorismos*]
>
> É requerido que se construa sobre AB um triângulo equilátero.
>
> [Construção - *Kataskeue*]
>
> Com centro em A e distância AB, descreva-se o círculo BCD. Novamente, com centro em B e distância BA, descreva-se o círculo ACE; e do ponto C onde os círculos cortam um ao outro aos pontos A e B, tracem-se as linhas retas CA e CB.
>
> [Prova - *Apodeixis*]
>
> Agora, uma vez que o ponto A é o centro do círculo CDB, AC é igual a AB. Novamente, já que o ponto B é o centro do círculo CAE, BC é igual a BA. Mas CA foi provado igual a AB; portanto, cada uma das linhas retas CA e CB é igual a AB. E coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si; portanto CA é também igual a CB. Portanto, as três linhas retas CA, AB e BC são iguais entre si.
>
> [Conclusão - *Sumperasma*]
>
> Portanto o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a linha reta finita dada. O que era requerido fazer (Q.E.F.)[40].

[40] Por ora, vale ressaltar apenas que a demonstração acima apresentada é um dos casos paradigmáticos para as críticas ao uso de assunções implícitas na axiomática euclidiana. A crítica se dirige à existência do ponto C, que somente se torna evidente com a contemplação do diagrama. Contudo, como será visto no último capítulo deste trabalho, o uso dos diagramas nas provas não parece algo marginal na geometria grega. Pelo contrário, o modo como os diagramas podem interferir nas provas obedece a determinadas restrições.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Até a enunciação das noções comuns, vale lembrar, nenhum diagrama se fazia presente nos *Elementos*. Eles só se fazem presentes quando são apresentadas as demonstrações propriamente ditas, como uma espécie de metonímia das proposições, uma síntese do que é apresentado na demonstração. O diagrama da proposição I,1 é o seguinte:



É digna de nota a relutância de Euclides em nomear, por assim dizer, os objetos da demonstração na formulação da proposição. No enunciado geral Euclides não nomeia, por exemplo, a reta sobre a qual será construído o triângulo, referindo-se a ela apenas de maneira geral. Tal comportamento parece indicar a necessidade de dotar a proposição de um aspecto geral, como uma tentativa de assegurar a generalidade do resultado. Outro ponto interessante relaciona-se com a presença de dois passos aparentemente desnecessários: a exposição (*ekthesis*) e a especificação (*diorismos*). Não é logicamente necessário que se mencione o que está para ser provado no caso particular, e a escolha deste caso particular pode ser simplesmente pressuposta. De acordo com os padrões modernos de prova, no entanto, faz-se sim necessária a generalização do resultado. Este passo, de acordo com os mesmos padrões, não pode ser encontrado em nenhuma das partes das demonstrações de Euclides. Mesmo a repetição do que é apresentado no enunciado (*protasis*), para um caso particular na exposição e na especificação (*ekthesis* e *diorismos*), e finalmente na conclusão (*sumperasma*), não é suficiente para assegurar generalidade, muito embora, como sugere Mueller[41], tal repetição é um indício da preocupação em se assegurar um caráter geral para o resultado[42].

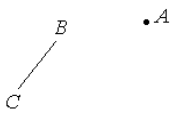
[41] Mueller 1981, p. 15.

[42] Este ponto será retomado no terceiro capítulo, quando for analisada a interpretação de Netz para a subdivisão das demonstrações e sua relação com a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

O triângulo equilátero introduzido em I,1 revelar-se-á uma ferramenta importante não somente para o transporte de segmentos, mas também para a construção do ângulo reto, como será visto adiante. A igualdade de seus lados possibilitará seu uso como ferramenta para o transporte de um segmento dado a um ponto dado. O método utilizado para o transporte de segmentos é simples, mas engenhoso, como mostra a demonstração de I,2 (a qual, embora seja simples, é certamente uma das demonstrações mais notáveis deste primeiro livro).

Para ilustrar passo a passo esta demonstração, utilizar-se-á um expediente provavelmente alheio à metodologia de Euclides: a apresentação do que seria o diagrama inicial para a fase de exposição (*ekthesis*) e suas sucessivas transformações[43]. A figura inicial para esta proposição seria a seguinte, com BC representando o segmento a ser transportado, e A seu ponto de destino.

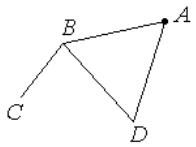


A estratégia consiste em construir um triângulo equilátero cuja base se estenda desde um extremo do segmento dado (no caso, B) até o ponto para onde este deve ser transportado (A), ou seja, construir um triângulo equilátero de lado igual a distância entre uma extremidade do segmento dado e o dado ponto.

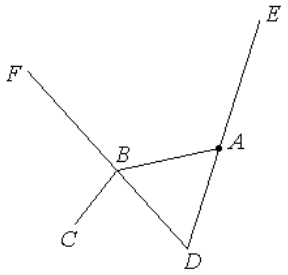
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

generalidade dos resultados, contrastada com a interpretação de Mueller para o mesmo tópico.

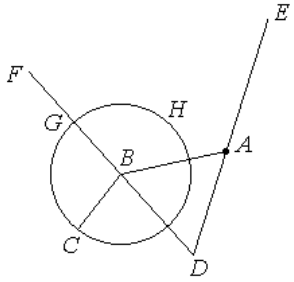
[43] De acordo com as edições tradicionais, é apresentado geralmente um diagrama, o qual aparece já em sua forma final.



O próximo passo será prolongar os lados do triângulo ABD até E e F.



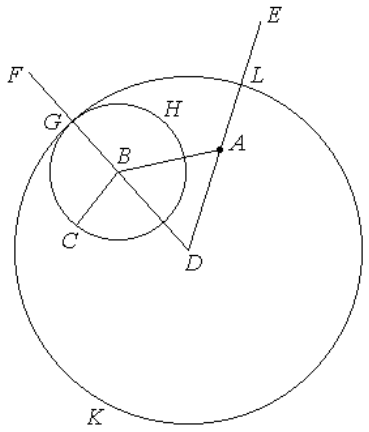
Com vistas a marcar, no prolongamento adjacente ao segmento dado BC (ou seja, em DF), um segmento igual, descreve-se um círculo com raio igual àquele segmento, com centro na intersecção (B) entre a reta prolongada DB e o segmento dado BC:



Com isso, o segmento a ser transportado já tornou-se parte própria da extensão de um dos lados do triângulo construído (a saber, o segmento BG em DF). Resta agora transportá-lo ao outro lado do triângulo, mais exatamente ao prolongamento do outro lado do triângulo, onde jaz o ponto para onde quer que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

se transporte o segmento dado. Para isso, descreve-se outro círculo, com centro no terceiro vértice do triângulo (ou seja, D), e com raio igual à distância entre este e a circunferência do círculo descrito anteriormente (DG).

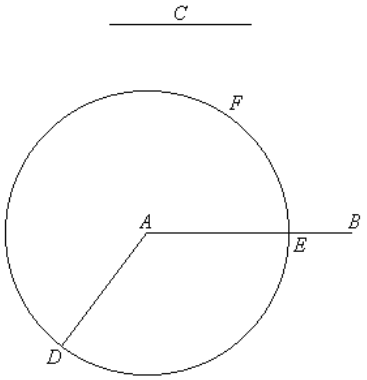


Este círculo cortará a outra perna do triângulo em um determinado ponto L, de modo que a distância entre este e o centro do círculo será igual a seu raio. Tem-se, assim, nas retas sobre os lados do triângulo (DG e DL), a seguinte composição: numa delas o lado do triângulo somado ao segmento de reta dado (DG=DB+BG), e na outra, o lado do triângulo somado a um segmento de reta de magnitude até então desconhecida (DL=DA+AL). Como, porém, os lados do triângulo são iguais (DA=DB), por pertencerem a um triângulo equilátero, o segmento dado e o segmento de magnitude desconhecida também serão iguais, pois são resultados da subtração daquelas partes iguais de segmentos iguais (os raios DL e DG de um mesmo círculo GKL). Como, portanto, o segmento dado foi identificado com aquele segmento em cuja extremidade jaz o ponto dado no início do problema, provou-se que é possível transportar (no sentido de criar uma cópia) o segmento dado para o ponto dado, quaisquer que sejam suas posições e magnitudes.

Tem-se, com isso, a possibilidade de se mover segmentos no plano, obedecidos os requisitos de serem dados tanto o segmento quanto o ponto para onde ele deve ser transportado. A proposição seguinte, I,3, estende esta possibilidade para os casos em que o segmento deve ser colocado, como uma parte, sobre um segmento maior, também dado de antemão. Esta operação de transporte de segmentos sobre segmentos, vale lembrar, será mais utilizada nas demonstrações dos *Elementos* do que o transporte de segmentos a pontos determinados no plano, muito embora esta seja condição para aquela. A

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

demonstração de I,3 parte de dois segmentos, AB e C, dos quais AB é o maior[44]. É requerido, em seguida, transportar C para uma das extremidades de AB. A extremidade escolhida é A, onde o segmento AD, igual a C, é colocado. Em seguida, descreve-se o círculo DEF, com centro em A. O ponto E marca a intersecção do círculo descrito com o segmento AB. E AE será igual a AD por serem raios do mesmo círculo, e será portanto também igual a C. Assim, é cortado do segmento AB um segmento igual a um segmento dado C.

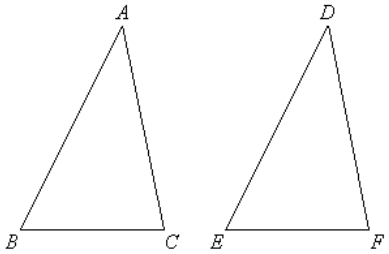


Depois do transporte de segmentos, as proposições seguintes (I,4-8), todas teoremas, preparam o terreno para a construção do ângulo reto, e consequentemente para o transporte de ângulos (que se tornará possível, de modo irrestrito, em I,23). A primeira delas, I,4, faz uso do polêmico método de superposição, que é alvo de muitas críticas por parte dos comentadores dos *Elementos*. Apesar de o método de superposição poder sugerir um uso do diagrama enquanto objeto físico (a saber, a movimentação mecânica deste de um lugar a outro do plano), a demonstração da proposição I,4 apenas menciona, *como se* fosse possível tal expediente. A sequência da demonstração baseia-se em larga medida nas noções comuns, somente. De fato, se o método de superposição fosse efetuado com os diagramas enquanto entidades físicas, algo assim como o transporte rígido de um sobre o outro deveria ser efetuado. Tal recurso, no entanto, não está ao alcance do método nem dos meios de produção do diagrama disponíveis para Euclides. Se fosse possível, os triângulos estariam sendo tratados mais como instâncias, ou como instrumentos, do que como símbolos para os conceitos geométricos.

[44] É interessante notar que, quando as partes do segmento (no caso, seus pontos extremos) não são necessárias para a demosntração, Euclides o nomeia por meio de uma letra apenas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

De acordo com a proposição I,4, conhecida também como o primeiro critério de identidade de triângulos (lado-ângulo-lado), se dois triângulos ABC e DEF possuem dois lados iguais entre si (AB=DE e AC=DF), e também iguais os ângulos que eles encerram (BAC=EDF), então os lados e ângulos remanescentes também serão iguais entre si, e assim os triângulos serão iguais.



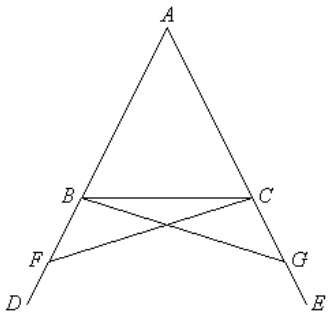
Isto porque, se as partes iguais dos triângulos são sobrepostas, as partes restantes terão de se sobrepor também. Ou seja, se o lado AB é posto sobre DE, eles devem coincidir, uma vez que são apresentados como iguais no enunciado. O mesmo vale para AC e DF, uma vez que os ângulos contidos por estes segmentos também são iguais. Resta provar que as bases e os ângulos sobre elas também serão iguais nos dois triângulos. A maneira simples com que Euclides efetua esta demonstração talvez soe como se algo realmente estivesse faltando. Simplesmente é sustentado que, coincidindo as pernas dos triângulos, o segmento BC que servia de base no primeiro triângulo deverá ser igual ao segmento EF no segundo, já que os pontos que servem de extremidades para estes segmentos estão coincidindo. Na edição de Heath pode-se ver, entre parênteses, um acréscimo de acordo com o qual as bases têm de coincidir pela razão de que duas retas não podem encerrar espaço (uma noção comum provavelmente apócrifa).

A proposição I,4 será essencial para várias das demonstrações seguintes, a começar pela próxima. Na proposição I,5, Euclides demonstra que são iguais os ângulos da base de um triângulo sempre que os lados opostos a eles forem iguais. Além disso, demonstra que os complementos[45] destes ângulos (que surgem sob a base uma vez que se prolonguem os lados) também são iguais. A demonstração da igualdade dos complementos, no entanto, é anterior e

[45] A expressão “ângulo complementar” não é usada por Euclides, e é utilizada aqui apenas por facilitar a descrição da demonstração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

necessária para a demonstração da igualdade dos ângulos da base, como veremos a seguir.



Nesta demonstração, parte-se de um triângulo ABC cujos ângulos da base são iguais. Os passos que introduzirão modificações no diagrama são: o prolongamento dos lados AB e AC do triângulo original; a escolha de um ponto arbitrário F num dos prolongamentos dos segmentos (no caso, BD); o corte de um segmento AG em AE do mesmo tamanho do segmento AF (pela proposição I,3); e a ligação dos pontos F e G com os pontos C e B, respectivamente.

Esta série de operações dá origem a novos elementos no diagrama, tais como regiões, pontos e ângulos. Ou, para que se tenha uma interpretação quiçá mais condizente com o fato de que o diagrama é apresentado em sua forma final, de uma só vez, poder-se-ia dizer que elas colocam em cena os elementos que o diagrama já dispõe, mas cujo uso ainda não era permitido pelo fato de que não foram devidamente introduzidas. Algumas propriedades e relações destes elementos são mostradas de modo inequívoco pelo diagrama (como relações de pertinência e de parte/todo), enquanto outras são ditas pelo texto (relações de identidade, basicamente). E a correspondência entre texto e diagrama se mostra vital para a demonstração: é a interrelação entre estas dimensões que mostra que os ângulos da base são resultados da subtração de partes iguais de ângulos iguais, e são, portanto iguais entre si; também que os ângulos sob a base são iguais por serem ângulos correspondentes de triângulos iguais. Jogam importante papel na parte diagramática da demonstração os seguintes elementos:

i) triângulos ABG e ACF, os quais possuem dois lados iguais a dois lados (AB=AC e AG=AF), e também o ângulo contido pelos mesmos (no ponto A);

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

ii) os triângulos FBC e GCB, cujos ângulos em B e C são os ângulos sob a base do triângulo original, cuja igualdade se quer demonstrar;

iii) os ângulos FCB e GBC, que são, respectivamente, ângulos dos triângulos mencionados no item ii), mas que também são partes dos ângulos ABG e ACF dos triângulos mencionados no item i), dos quais as partes restantes são justamente os ângulos cuja igualdade está para ser demonstrada, a saber ABC e ACB.

A demonstração se dá em três etapas, conforme o esquema a seguir. 1) Por possuírem um ângulo em comum no ponto A, e também possuírem os lados que o encerram iguais dois a dois (AB=AC e AG=AF), os triângulos ABG e ACF são iguais, de acordo com a proposição I,4. Assim sendo, os ângulos nos pontos F e G também devem ser iguais. 2) Estes ângulos são também ângulos dos triângulos mencionados no item ii), os quais contêm os ângulos sob a base do triângulo ABC. Destes tem-se a igualdade dos referidos ângulos, os lados BF e CG também iguais (por serem subtraídos igualmente de partes iguais), e também os lados FC e GB, pela demonstração da igualdade de ABG e ACF. Ora, tem-se aqui mais um caso em que a proposição I,4 vem a calhar. Fica demonstrado então que os triângulos FBC e GCB são iguais, e com isso também fica demonstrada a igualdade dos ângulos sob a base de ABC, pois são ângulos destes triângulos. 3) Resta apenas demonstrar a igualdade dos ângulos da base de ABC. Já se sabe que os ângulos ABG e ACF são iguais, e pode-se ver, de modo menos direto pelo texto, mas de maneira óbvia e inequívoca pelo diagrama, que eles contêm os ângulos ABC e ACB somados aos ângulos GBC e FCB, respectivamente. Estes últimos, no entanto, foram demonstrados iguais no passo 2) acima. Assim, se de iguais (ABG e ACF) se subtraem iguais (GBC e FCB), por uma noção comum se sabe que os restos (ABC e ACB) são iguais. Eis o que se queria demonstrar.

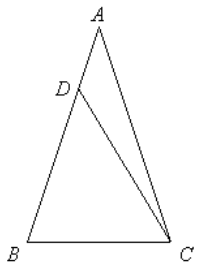
Esta demonstração poderia talvez até ser feita de modo independente do diagrama, no que diz respeito a sua *apodeixis*. Talvez fique sugerido, pelas letras que são usadas para nomear elementos como pontos e ângulos, que se ABG é um ângulo, e ABC outro, eles estão numa relação de continência ou contiguidade[46]. Entretanto, não há uma regra explicitamente formulada que diga, por exemplo, que ABG deve ser o maior por possuir uma letra posterior na sequência alfabética. Este fato parece se originar, portanto, da maneira como os gregos apresentavam suas demonstrações, onde o diagrama deveria ser uma

[46] Esta sugestão pode ser encontrada em diversos lugares em Netz 1999.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

peça sempre presente. Pelo diagrama, de fato, tal relação é percebida diretamente, sem necessidade de regras adicionais de leitura; e as letras servem apenas para a referência cruzada entre texto e diagrama. Alguns resultados a respeito de identidades, deve-se ressaltar, até podem ser derivados do diagrama, mas estes são limitados aos casos de identidade de coincidentes (como, por exemplo, a dos ângulos no ponto A, por serem os mesmos em diferentes triângulos, e a identidade ou coincidência da soma das partes com o todo, como no caso de GBC e CBA, que somados coincidem com ABG). Como poderá ser constatado, a comparação de magnitudes por meio da inclusão de um elemento em outro é o método padrão adotado por Euclides ao longo da obra – um método que, como se pode perceber, nao pode prescindir da apresentação diagramática dos dados.

As demonstrações das proposições seguintes, I,6 e I,7, são indiretas, por *reductio ad absurdum*. A proposição I,6 faz o caminho inverso de I,5, demonstrando que um triângulo é isósceles (possui lados iguais) se possui os ângulos da base iguais. Se assim não fosse, argumenta Euclides, um dos lados seria maior. Assim, seria possível construir, com os mesmos ângulos da base, um triângulo menor que o triângulo dado (já que possuiria um dos lados menor). Na figura abaixo, ABC é o triângulo original, e DBC o triângulo menor, que supostamente possuiria os ângulos DCB e DBC iguais aos ângulos originais ACB e ABC, respectivamente.

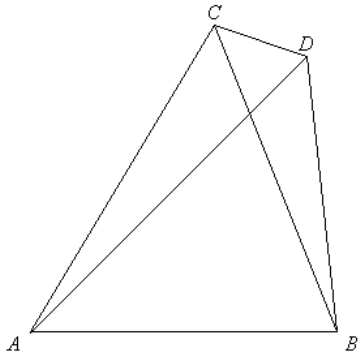


Isto, no entanto, é impossível, pois o ângulo ACB, oposto simultaneamente aos lados desiguais DB e AB, possuiria a si mesmo como parte própria (já que DCB e ACB são, por hipótese, iguais), de acordo com o diagrama – contrariando a quinta noção comum. Com isso, Euclides estabelece uma relação de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

determinação unívoca, para triângulos, entre um ângulo e o lado que a ele se opõe[47].

De acordo com a proposição seguinte, I,7, se dois segmentos de reta são tomados a partir das extremidades de um terceiro segmento, há apenas um ponto em que eles podem se encontrar. Para a demonstração, deve-se supor, como hipótese para a *reductio*, que seja possível, dados dois segmentos de reta AC e BC, partindo das extremidades de um segmento AB e se encontrando em C, construir outros dois segmentos AD e BD, iguais aos primeiros, mas se encontrando em um ponto D.



A partir disso, pede-se que se una os pontos C e D, pelo que se originam, no diagrama, os triângulos ACD e BCD, ambos isósceles, já que supostamente AC=AD e BC=BD. Sendo isósceles, pela proposição I,5 se segue que os ângulos ACD e ADC são iguais. Pelo diagrama se pode ver que o ângulo BCD é parte de ACD, sendo portanto menor que este e menor que ADC. O ângulo BDC, por sua vez, é maior que ADC, e portanto deve ser “muito maior” (uma vez que é maior que o maior) que BCD. No entanto, aplicando-se o teorema I,5 ao triângulo BCD obtém-se que os ângulos BDC e BCD são iguais, o que contradiz os dados apresentados diagramaticamente. O diagrama mostra esta relação de modo indireto, pois é necessário que o texto diga que os ângulos ACD e ADC, e BCD e BDC são iguais; o que o diagrama mostra é que BCD é uma parte de ACD, e ADC é uma parte de BDC, o que gera uma espécie de círculo na relação de maior/menor entre eles. Fica assim demonstrado que, das extremidades de um segmento de reta, dois segmentos determinados só podem se encontrar em um

[47] Fato que será utilizado em Hilbert para demonstrar a unicidade de segmentos construídos, como será visto no capítulo seguinte. No sistema de Hilbert, o círculo não possui um papel ativo tal como em Euclides, de modo que seu equivalente ao transporte de segmentos depende exclusivamente das propriedades dos triângulos (Hilbert 1899).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

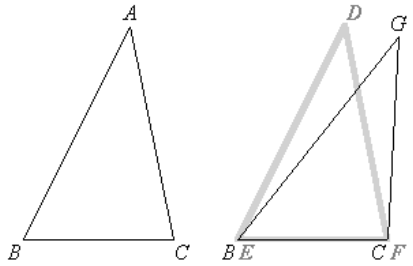
único ponto. Em suma, o texto assegura uma igualdade entre dois ângulos que, no diagrama, são inevitavelmente apresentados de maneira tal que um é igual a uma parte do outro, e portanto menor que ele. Por conta desta incompatibilidade, a hipótese é descartada.

Poder-se-ia objetar a Euclides por fazer a demonstração apenas para o caso em que o ponto D esteja fora do triângulo, sem levar em conta outras configurações interessantes. Este procedimento, no entanto, é de praxe em Euclides: quando há mais de uma configuração possível para o diagrama de uma proposição, o autor demonstra a proposição para apenas um dos casos. Geralmente a demonstração para uma configuração diferente é no essencial equivalente a que é apresentada, não necessitando de proposições ou postulados diferentes dos que foram utilizados.

Como esta demonstração permite perceber, os diagramas das demonstrações por *reductio* não são “construções absurdas”. A possibilidade de uma determinada construção é apenas suposta (tal como ocorre com as hipóteses para *reductio* nas provas sentenciais), e as relações de igualdade que seus elementos mantêm entre si (que são fornecidas pelo texto) é que são contraditas, ou expressas de maneira ambígua, pela configuração suposta. Nela, tais elementos são apresentados como desiguais, não em função de aspectos meramente visuais, mas sim por conta das relações que diferentes elementos diagramáticos mantêm entre si, de acordo com o que é estipulado no texto. Por conta da incompatibilidade entre texto e diagrama para a representação de tais situações, se descarta a possibilidade de construção do que se havia mencionado na hipótese.

Fechando este grupo de teoremas, a proposição I,8 pode ser vista como assegurando que três segmentos determinados só podem encerrar três ângulos determinados – o segundo critério de identidade de triângulos (lado-lado-lado). Se a proposição I,4 condiciona a magnitude de dois ângulos e um lado de um triângulo às magnitudes do ângulo oposto e dos dois lados que o contêm, a proposição I,8 condiciona a magnitude dos ângulos às dos lados. Em suma, se dois triângulos possuem dois lados iguais a dois lados, e as bases iguais, também possuem os ângulos iguais. A proposição assegura que os lados de um triângulo, se construídos em outro lugar e de modo que suas extremidades se toquem formando um triângulo, preservarão os mesmos ângulos do triângulo original. A demonstração desta proposição também utiliza o método de superposição, utilizado em I,4.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

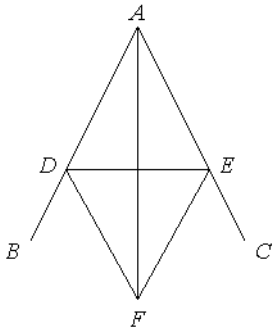


Assim, sejam ABC e DEF dois triângulos com os lados iguais dois a dois. Como em I,4, pede-se que se “leve a coincidir” o lado BC com o lado EF. Em seguida BA e AC são levados a coincidir com ED e DF, respectivamente. Finalmente, por I,7, se conclui que os ângulos devem ser iguais, e os triângulos são demonstrados iguais em sua totalidade. Esta proposição faz jogo com I,4, o primeiro critério de identidade de triângulos, assegurando que o fechamento do triângulo de I,4 só pode se dar de uma maneira.

Com estes resutados, torna-se possível o grupo seguinte de problemas, que culmina com a construção do ângulo reto[48]. A proposição I,9 demonstra a possibilidade de se bissecar um ângulo dado. Numa das pernas deste, toma-se um ponto aleatório e se corta da perna restante um segmento igual. Em seguida, é possível traçar entre os extremos distintos destes segmentos uma linha reta. Sobre ela, é possível construir um triângulo equilátero, e entre o vértice deste (oposto ao segmento traçado) e o vértice do ângulo dado, é possível traçar uma reta. Esta reta é a bissetriz do ângulo dado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[48] Os passos construtivos dependem, em última instância, dos três primeiros postulados. As informações de igualdade, no entanto, dependem das definições e das noções comuns (e, na sequência, também do Post. 4), de maneira que, mesmo que todas as construções pudessem ser feitas (utilizando-se régua e compasso, por exemplo), não se poderia dizer *o que* foi construído.

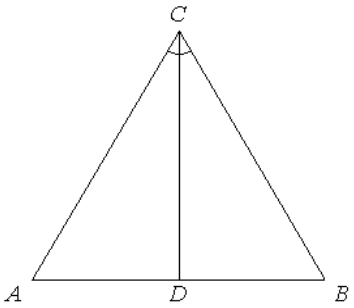


Pois os triângulos que se originam com a bissecção (ADF e AEF) são compostos de lados iguais entre si: os segmentos cortados das pernas do ângulo dado (AD=DE), os lados do triângulo equilátero (DF=EF) e a reta entre os vértices do ângulo e do triângulo construído (AF). E os ângulos contidos pelos lados iguais são iguais, de acordo com a proposição anterior. Sendo iguais os dois ângulos em torno da referida reta, o ângulo dado está bissecado. Como se pode notar, o uso do diagrama é essencial nesta proposição, afinal Euclides toma por garantido que o ponto F cai no interior do ângulo bissecado, quando nenhum princípio ou proposição anterior assegura este fato. Pode-se dizer que com esta proposição se inicia uma sequência interessante de demonstrações, nas quais o paralelismo, o quinto postulado, e a relação entre eles e os diagramas desempenham um papel central[49].

A proposição I,10 usa a anterior para a bisseção de um segmento de reta dado. Sobre este, constrói-se um triângulo equilátero, cujo ângulo oposto ao segmento dado é bissecado. O ponto de intersecção entre a bissetriz do ângulo e o segmento dado marca a bissecção deste último, uma vez que, por I,4, as distâncias entre esta intersecção e as extremidades do segmento devem ser iguais.

[49] A referida sequência possui, como pontos cruciais, o teorema I,16 e o teorema I,27 – que parecem pressupor resultados baseados no quinto postulado – bem como a construção da paralela em I,31. Tal sequência indicaria que é possível a construção de uma paralela sem que se utilize o quinto postulado. Além disso, o uso do diagrama sugere, neste contexto, que de algum modo noções equivalentes ao quinto postulado são intrínsecas ao uso dos diagramas. Esta discussão será retomada adiante.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



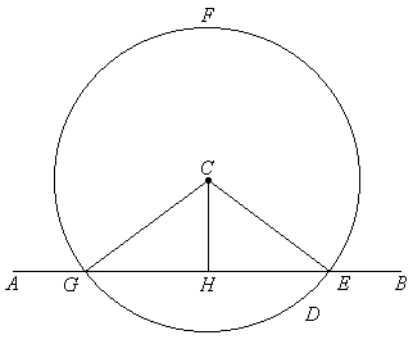
A bissetriz é utlizada, no problema seguinte (I,11) como geradora de ângulos retos a partir de um ponto dado sobre uma reta. A única diferença que se nota entre os diagramas destas construções reside no fato de que na anterior é dado um segmento determinado, ao passo que nesta a magnitude do mesmo não é determinada. Assim, é necessário que se selecione, no começo da demonstração, um ponto qualquer sobre a reta dada, e em seguida, com centro no ponto dado, e extremo no ponto escolhido, seja descrito um círculo. Fica assim definido, por meio do perímetro do círculo descrito, um segmento determinado, que será usado da mesma maneira que em I,10. A razão para esta diferença parece clara: somente é possível dividir ao meio uma magnitude determinada (um segmento, portanto); já a construção de uma perpendicular deve poder ser efetuada para qualquer reta, independente de sua magnitude.

A prova de que os ângulos formados pelo segmento e sua bissetriz são iguais recorre a I,8, e com isso fica provado, de acordo com a definição de ângulo reto (Def. 10), que eles são retos. O fato de que o ângulo reto é o primeiro ângulo a ser efetivamente construído reforça a tese de que o Post. 4, a exemplo dos demais, introduz uma figura elementar – e portanto uma construção que não se deve demonstrar, mas simplesmente aceitar, de acordo com os ditames do procedimento axiomático.

Na proposição seguinte vê-se uma situação nova na parte diagramática da prova. I,12 efetua a construção de uma perpendicular a uma reta dada, a partir de um ponto externo a ela. Dados o ponto e a reta, o primeiro passo da demonstração consiste em escolher, do outro lado da reta dada AB (com relação ao ponto dado C) um ponto qualquer D – isto constitui uma novidade na medida em que, até aqui, a escolha de pontos arbitrários sempre era restrita a uma reta ou círculo. Em seguida, com centro em C e raio CD, se descreve um círculo que é cortado por AB nos pontos G e E. A sequência da proposição não oferece inovações com relação a demonstração anterior, utilizando-se das propriedades

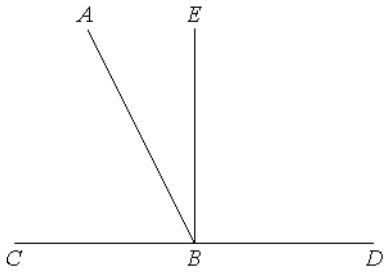
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

do triângulo resultante desta operação para a demonstração do perpendicularismo das retas CH e AB.



Embora seja tomado um ponto aleatório no plano, sem que o mesmo faça parte de uma linha determinada, é importante notar que sua posição é determinada em alguns aspectos, como, por exemplo, estar *do outro lado* da reta dada com relação ao ponto dado. Como seria de se esperar, esta demonstração depende largamente da sua representação diagramática, afinal dela depende o entendimento de requisitos como “estar do outro lado”, e assim por diante – os quais não estão explícitos nos axiomas.

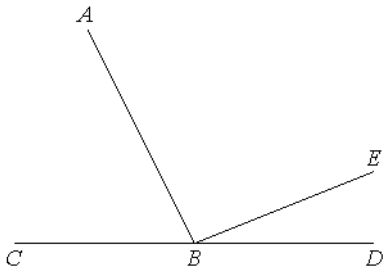
A I,12 seguem três teoremas sobre ângulos entre retas concorrentes, os quais determinam a totalidade das configurações possíveis que a interseção de duas retas pode originar. O primeiro, I,13, estabelece que se duas retas formam ângulos entre si, estes serão dois ângulos retos ou somarão dois retos. Para provar este fato, é traçada uma perpendicular a uma delas, a qual, se não coincide com a outra, mostra que os ângulos entre elas equivalem aos ângulos entre uma delas e a perpendicular, ou seja, dois retos.



I,14 mostra, por *reductio ad absurdum*, a recíproca da anterior, ou seja, que se duas retas que se encontram em um ponto sobre uma terceira fazem com esta ângulos adjacentes iguais a dois retos, então aquelas duas retas estão

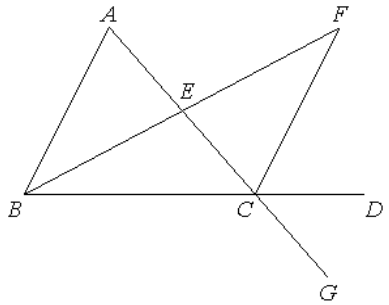
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

sobre uma mesma reta, ou seja, elas são uma única reta. Na figura, as retas que se revelarão como a continuação uma da outra, na demonstração, são CB e BD, na figura abaixo.



Por fim, I,15 estende as igualdades para os dois lados das retas concorrentes, mostrando que os ângulos verticais (opostos) formados pela interseção das mesmas são iguais.

Nos teoremas seguintes o tema volta a ser o triângulo. Desta vez, são descritas algumas propriedades de triângulos, concernentes à magnitude relativa de seus ângulos internos e externos. O primeiro, I,16, conhecido como *teorema do ângulo externo*, estipula que qualquer ângulo externo de um triângulo (ou seja, aquele formado externamente pela extensão de um dos lados) sempre serão maiores que os ângulos internos e opostos. Euclides prova esta relação para apenas um dos ângulos internos, copiando-o sobre o referido ângulo externo (na figura, ECF é o ângulo copiado, igual a BAE, e o externo é ECD). A demonstração para o ângulo remanescente é apenas sugerida, de modo simétrico ao primeiro.



Como esta demonstração é alvo de debates acerca da generalidade dos resultados dos *Elementos*, bem como um cavalo de batalha para os que alertam

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

para os perigos do uso dos diagramas[50], cabe reproduzi-la aqui de maneira mais detalhada. Partindo do triângulo ABC, prolonga-se a base BC até D. O objetivo é demonstrar que o ângulo ACD é maior que os ângulos internos CBA e BAC. As construções iniciais incluem:

i) a bissecção do segmento AC, no ponto E, o que implica AE=EC [Prop. I,10];

ii) a descrição da reta BE, que liga este ponto ao vértice oposto [Post. 1];

iii) e em seguida o prolongamento de BE até um ponto F [Post. 2] tal que BE=EF [Prop. I,3];

iv) liga-se então o ponto F ao ponto C, pela reta FC [Post. 1]; finalmente

v) prolonga-se AC até um ponto arbitrário G [Post. 2].

A sequência de passos demonstrativos é a seguinte,

a) como AE=EC e BE=EF, e [ângulos] AEB=FEC [Prop. I,15], conclui-se que AB=FC, [triângulos] ABE=FEC, [ângulos] BAE=ECF [Prop. I,4];

b) como, por seu turno, [ângulos] ECD>ECF, e ECD=ACD, conclui-se que ACD>ECF [C.N. 5, e visualização do diagrama];

c) mas [ângulos] ECF=BAE, e BAE=BAC, logo [ângulos] ACD>BAC.

Para o ângulo remanescente, como foi dito, Euclides não oferece uma demonstração explícita, indicando apenas que o procedimento é análogo ao que foi utilizado. Esta proposição repousa significativamente sobre a visulização da figura, afinal nada garantiria que o ponto F não caísse *sobre* o segmento CD, o que tornaria os ângulos ECD e ECF, e portanto também ECF e ACD iguais. Este resultado possibilita, em I,27, a derivação da igualdade dos ângulos alternos internos formados por duas retas e uma concorrente, a partir do paralelismo das primeiras[51].

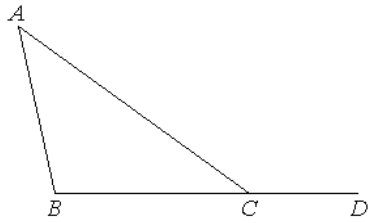
Na proposição I,17, a existência do triângulo é condicionada a serem seus ângulos, tomados dois a dois, sempre menores que dois retos. Usando o resultado anterior, Euclides mostra que se o ângulo externo sempre será maior que os internos e opostos, a soma do ângulo externo e de seu complemento sempre será maior que a soma deste complemento e qualquer dos ângulos internos (recorrendo a uma forma diferente da N.C. 2). Como a soma do ângulo externo e de seu complemento totaliza dois retos, fica provado que os ângulos

[50] Cf. Greenberg 1972, pp. 98 e ss..

[51] Esta proposição, bem como a mencionada I,27, serão tematizadas novamente no segundo capítulo, quando for apresentada uma geometria na qual estes resultados não podem ser derivados: a geometria elíptica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

internos somados dois a dois sempre serão menores que isso.

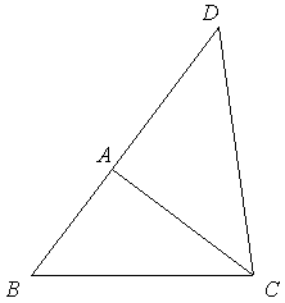


I,18 e I,19 estabelecem a relação direta entre a magnitude relativa dos ângulos e a magnitude relativa dos lados a eles opostos, num triângulo. I,18 assere que o lado maior se opõe ao maior ângulo, e prova este fato dividindo o triângulo, no ângulo oposto ao maior lado, em dois triângulos (um deles isósceles). Em seguida utiliza I,5 e I,16 para estabelecer que de fato o ângulo dividido é o maior. I,19 não utiliza nenhuma construção, provando que o lado oposto ao maior ângulo será também o maior, por *reductio*. Supõe-se que o lado oposto ao maior ângulo não é o maior, devendo ser portanto menor ou igual àquele. Todavia, por I,5 e em seguida por I,18, fica provado, respectivamente, que ele não pode ser igual e nem pode ser menor do que o outro lado em questão (oposto ao ângulo menor), devendo portanto ser maior que ele.

I,20 estabelece uma propriedade interessante para triângulos, ou, mais especificamente, uma restrição sobre as dimensões de seus lados: para que três segmentos formem um triângulo, é necessário que seus lados, somados dois a dois, sempre sejam maiores que o lado restante. Pode-se também ler esta proposição como reforçando o fato de que uma reta é a menor distância entre dois pontos[52]. Para a prova, dado um triângulo ABC, estende-se seu lado BA até o ponto D, de modo que AD seja igual ao lado AC do triângulo. Em seguida, liga-se D ao ponto C, no vértice da base do triângulo.

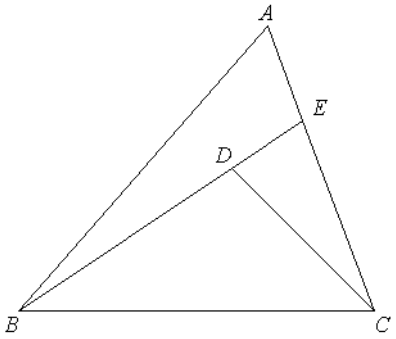
[52] Esta sugestão encontra-se em Kline 1972, p. 62.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



Por ser isósceles, o triângulo ADC possui iguais os ângulos opostos aos lados iguais (ADC=ACD). Mas o ângulo ACD é parte do ângulo BCD no triângulo maior. Assim, o lado BC, oposto ao ângulo ADC (que é igual a ACD), será menor que o lado BD oposto a BCD. Como, por sua vez, BD é formado por BA+AD, e AD=AC, fica provado que a soma de dois lados de um triângulo (no caso BA+AC) sempre será maior que o lado restante (no caso BC). Utilizando-se o mesmo método, pode-se provar a mesma propriedade para os lados restantes.

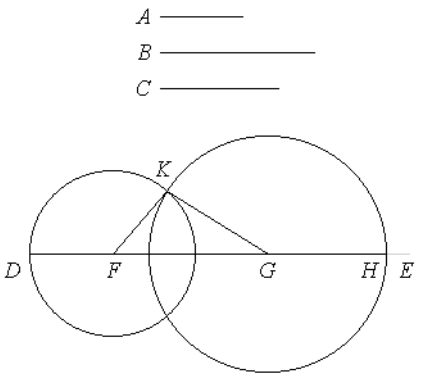
A proposição seguinte, I,21, diz que se a partir das extremidades da base de um triângulo dado são traçadas duas retas que se encontram dentro do triângulo dado, tais retas deverão ser menores que os lados do triângulo, mas o ângulo por elas contido deverá ser maior.



Na proposição seguinte, I,22, é tornada possível a construção de um triângulo qualquer a partir de três segmentos de reta, obedecida a restrição imposta por I,20. Na construção é utilizado um expediente até aqui inédito (tal como ocorrera em I,12, com estipulação de um ponto arbitrário fora de qualquer um dos elementos diagramáticos dados): a estipulação de uma reta, terminando

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

num ponto qualquer D, mas infinitamente estendida na direção de E[53]. São dados três segmentos A, B e C, os quais deverão ser usados para a construção do triângulo. Eles são então colocados sobre a reta DE, do maior ao menor. Em seguida, o maior e o menor deles são utilizados como raios na construção de dois círculos. Do ponto de intersecção destes (K) traçam-se duas retas ligando-o às extremidades do segmento intermediário (centros dos dois círculos). Este, igual a B, será a base do triângulo a ser construído. O segmento que coincide com o raio do círculo maior, que é igual a A, será um dos lados, e o coincidente com o raio do menor, igual a C, será o outro. Fica construído, desta maneira, o triângulo requerido.



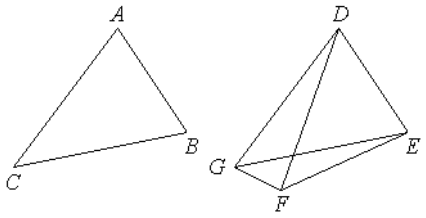
O que pode ser visto como frouxamente demonstrado nesta proposição revela-se, sob análise, mais um ponto em que o uso de diagramas pode se mostrar valioso. Pode-se perguntar, por exemplo, em que se baseia a generalidade desta construção. É verdade que, aparentemente, se o segmento intermediário do diagrama fosse um pouco maior, os dois círculos não possuiriam intersecção, e deste modo não existiria o ponto K. Isto, no entanto, contradiria a estipulação de que os segmentos dados devem ser tais que a soma de quaisquer dois deles seja maior que o restante. Afinal, os círculos são descritos tendo como raios os segmentos das extremidades, de modo que estes serão copiados sobre o segmento na posição intermediária. Se as circunferências destes círculos não se tocassem, isto indicaria que os segmentos das extremidades somados não cobririam o intermediário, e assim seriam menores que este. Assim, o único modo de a configuração diagramática apresentada não servir para a construção do triângulo seria um caso de falha no cumprimento da condição de possibilidade estipulada no enunciado.

[53] Na tradução de Bicudo lê-se “Seja posta uma reta, a DE, por um lado, limitada no D, e por outro, ilimitada no E.”

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Com I,23 realiza-se finalmente o transporte de ângulos. O enunciado do problema pede a construção, em um ponto dado sobre uma reta, de um ângulo igual a um ângulo dado. A construção é simples, e envolve escolher sobre os segmentos que encerram o ângulo dado dois pontos arbitrários, e em seguida traçar uma reta entre eles, fechando um triângulo. O próximo passo pede a construção, no ponto dado sobre a reta dada, de um triângulo igual ao que foi construído no ângulo dado.

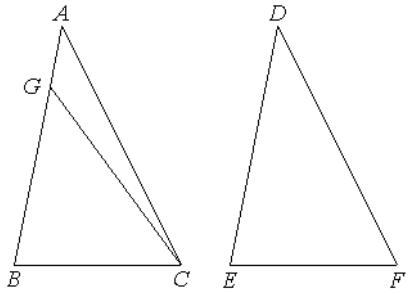
A proposição seguinte é novamente um teorema, e o triângulo ainda é o protagonista. I,24 estabelece que se dois triângulos possuem dois lados iguais entre si, mas os ângulos por eles contidos diferentes, o que possuir o maior ângulo possuirá também uma maior base. Na demonstração, é construído sobre o triângulo que contém o menor dos dois ângulos, um ângulo igual ao maior, e através das igualdades que valem para os vários triângulos que se originam com esta operação, combinadas com as relações de inclusão parcial dos ângulos e segmentos apresentados no diagrama, se conclui que a base deste triângulo deverá mesmo ser menor que a base daquele que contém o maior ângulo.



Em seguida esta propriedade é demonstrada tomando-se como dado que as bases do triângulos são desiguais, e concluindo-se que o ângulo oposto a base maior é maior que o oposto a base menor. A demonstração desta proposição, I,25, é feita por *reductio ad absurdum*. Primeiro se supõe que o respectivo ângulo não seja maior, devendo ser portanto igual ou menor. Com I,4 afasta-se a primeira possibilidade, pois as bases dos triângulos são, por hipótese, desiguais. Com I,24, afasta-se a segunda, pois ao lado menor deve ser oposto um ângulo menor. Os diagramas desta proposição não apresentam nenhuma construção, e para nada interferem na demonstração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Finalizando o que Heath considera o primeiro grupo de proposições dos *Elementos*[54], cujo foco principal é o triângulo, a longa demonstração de I,26 estabelece o terceiro critério de identidade de triângulos (ângulo-lado-ângulo, e, simultaneamente, ângulo-ângulo-lado). De acordo com o último dos critérios de identidade de triângulos, se dois triângulos possuem a base igual á base, e os ângulos em suas extremidades também iguais (os de um aos do outro), os triângulos são iguais. Também, serão iguais mesmo se os ângulos não estejam sobre o segmento igual. Resumindo, um lado igual a um lado, e dois ângulos iguais a dois ângulos, respectivamente, são suficientes para que se conclua a igualdade de dois triângulos quaisquer. Com isso, tem-se as seguintes formas de se identificar dois triângulos: se dois dos lados e o ãngulo contido por eles forem iguais nos dois triângulos (I,4); se os três lados são iguais nos dois (I,8); e se dois dos ângulos e um lado forem iguais nos dois (I,26).



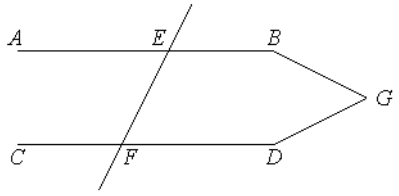
A demonstração de I,26 é um pouco mais demorada que as demais justamente por envolver duas possibilidades distintas, como mencionado acima. Para o caso de os ângulos iguais serem adjacentes ao lado igual (a saber, ABC=DEF, ACB=EFD, e BC=EF), a demonstração procede de modo indireto (por *reductio*), recorrendo basicamente à I,4 e as hipóteses, juntamente com as relações diagramáticas. Para o caso da outra distribuição (ABC=DEF, ACB=EFD, e AB=DE), a demonstração também é indireta, mas além de I,4 é usado também I,16.

O grupo de proposições que se segue ao primeiro vai de I,27 até I,32, e seu tema são as paralelas. I,27 apresenta o primeiro critério para se dizer que duas retas são paralelas: a igualdade dos ângulos alternos internos formados entre elas e uma reta concorrente. O diagrama da proposição apresenta um

[54] Heath 1921, p. 376.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

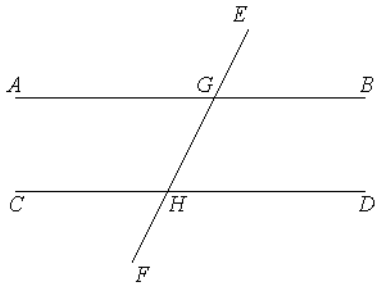
ponto de encontro entre as duas retas, que será utilizado como hipótese para a *reductio*.



Dito de maneira resumida, não se pode sustentar a igualdade dos ângulos AEF e EFD sem reconhecer o paralelismo das retas, pois caso elas se encontrassem formariam um triângulo cujo ângulo externo AEF é igual ao ângulo interno e oposto EFD (o que, de acordo com I,16, é impossível). Ou, como foi dito anteriormente no comentário aos postulados, esta proposição mostra explicitamente que o triângulo é uma figura inadequada para representar este tipo de situação entre três retas.

Seguindo o mesmo caminho, I,28 toma como hipótese que o ângulo externo formado por uma das retas e a reta concorrente é igual ao ângulo interno e oposto a ele, do mesmo lado, e que os ângulos internos de um mesmo lado somam dois retos, e partindo disso deduz o paralelismo das duas retas. Para o primeiro caso, a igualdade dos ângulos opostos do mesmo lado é estendida ao ângulo vertical oposto ao referido ângulo externo (por I,15), e como este é alterno com relação ao ângulo interno, e igual a este (por serem ambos iguais ao externo), fica demonstrado o paralelismo das retas (por I,27). Conjuntamente, estas duas proposições estabelecem, complementando o Post. 5, que o triângulo *não* pode ser usado quando os ângulos mencionados no antecedente do referido postulado são iguais a dois retos – além de não poder ser utilizado caso eles sejam maiores que isso, pelas razões aludidas acima, na descrição dos postulados.

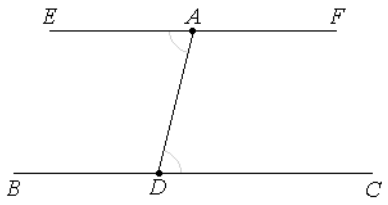
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



A proposição I,29 é a forma conversa das duas proposições anteriores. Tomando como hipótese o paralelismo de duas retas, deriva as igualdades dos ângulos apresentadas em I,27 e I,28. Esta demonstração se destaca por apresentar o primeiro uso do quinto postulado, que é usado de maneira curiosa em uma *reductio*, para provar a conversa de I,27: supondo que, a despeito de serem as retas paralelas uma a outra, um dos ângulos alternos internos (AGH), formados pela intersecção destas com uma concorrente, é menor que o outro (GHD), Euclides conclui que a soma dos ângulos internos no lado em que se encontra o menor ângulo será menor que dois retos. Sendo assim, as retas dadas deveriam, se prolongadas, encontrarem-se naquele lado (eis o uso do Post. 5), mas isto não pode acontecer uma vez que as retas são, por hipótese, paralelas. A proposição I,30 usa este resultado para provar uma espécie de transitividade da propriedade de ser paralela. O enunciado da proposição diz que se duas retas são paralelas a uma terceira, elas também serão paralelas uma a outra. Pode-se pensar que bastaria a primeira noção comum para a demonstração, e, de fato, ela é o único recurso utilizado além de I,29.

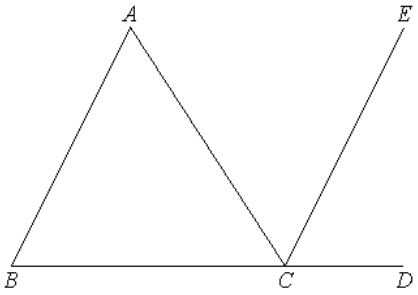
Depois de demonstradas as suas características relevantes, finalmente chega a hora, em I,31, da construção de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto externo a ela. São dados um ponto A e uma reta BC. Nesta, toma-se um ponto aleatório D, e traça-se AD. No ponto A deste segmento, constrói-se um ângulo DAE igual ao ângulo ADC. Depois prolonga-se a reta EA em direção a F. Esta reta será paralela à reta dada, uma vez que os ângulos alternos internos que ambas fazem com a concorrente são iguais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



Como não utiliza os teoremas I,29-30, e portanto não utiliza o quinto postulado, esta proposição poderia ter sido demonstrada antes. De acordo com Heath[55], Euclides parece ter desejado primeiro provar a unicidade da paralela, por meio da proposições anteriores (incluindo I,29-30), para apenas então construí-la. Todavia, como Proclo já haiva notado, a construção da perpendicular a reta dada (I,11-12) já seria suficiente para a construção da paralela, uma vez que bastaria que se construísse uma perpendicular de uma perpendicular a uma reta dada – que, por I,27, seria demonstrada paralela a esta.

I,32 fecha o grupo de proposições sobre paralelas, com a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. Enquanto na prova pitagórica para esta proposição era traçada uma reta paralela à base do triângulo dado, passando pelo vértice oposto a ela, na prova de Euclides a base é prolongada, e dois ângulos internos do triângulo são transportados de modo a serem reunidos em torno do vértice a partir do qual a base foi prolongada.



O último grupo de proposições, I,33-47, trata as figuras (paralelogramos, quadrados, retângulos, triângulos e figuras retilíneas quaisquer) em termos de

[55] Heath 1956, p.316.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

suas áreas. Como, no entanto, o conjunto de proposições até aqui analisado é suficiente para mostrar como os diagramas podem ser usados de maneira decisiva nas demonstrações, as proposições restantes serão descritas num apêndice a este capítulo, apenas com vistas a fornecer uma descrição completa do Livro I.

Para os propósitos deste trabalho, vale lembrar, a apresentação das proposições acima, juntamente com os princípios que lhes fundamentam, formam uma caracterização suficiente da axiomática euclideana. Elas são suficientes para ilustrar o modo como Euclides organizou um grande número de resultados conhecidos vinculados ao uso das assim chamadas linhas planares (correspondentes ao uso de régua e compasso, ou, para ser fiel às origens empíricas da prática, cordas esticadas). As operações autorizadas, correspondentes ao uso destas linhas, juntamente com um padrão de medida para ângulos, são postuladas, e os produtos destas operações são caracterizados de acordo com as definições. Finalmente, um conjunto de regras gerais permite a derivação de propriedades e relações para as entidades construídas.

O primeiro livro, assim, representa o alicerce sobre o qual todo o restante da obra, em última instância, repousa[56]. Ele contém as operações e os padrões que serão determinantes de todas as demais demonstrações. De maneira geral, todas elas dependerão da manipulação das figuras simples, cujas propriedades e relações são o tema do Livro I. O último teorema acima apresentado é, neste sentido, um marco especial. Nele é demonstrada uma importante propriedade daquela que, de acordo com a presente interpretação, é a última das figuras introduzidas como básicas (ou seja, às quais todas as demais devem se resumir): o triângulo. Trata-se de um resultado relativamente complexo (a soma dos ângulos internos de um triângulo), que requer a consideração dos ângulos internos do triângulo como justapostos sobre o prolongamento de um dos lados, de maneira que todos compartilhem o mesmo vértice, e, para que se atinja o resultado, que necessariamente eles coincidam, se ajustem de maneira exata, com a reta formada pelo prolongamento. O resultado é demonstrado com base na possibilidade de se executar duas operações – uma assumida como princípio (prolongar uma reta dada) e a outra demonstrada redutível aos princípios (traçar uma paralela) – bem como no reconhecimento de algumas propriedades básicas

[56] Não se levando em conta, claro, aquilo que depende das definições que são adicionadas aos outros livros conforme a necessidade.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

da figura e das relações entre suas partes (essencialmente, neste caso, do reconhecimento da magnitude dos ângulos formados sobre um lado de uma reta por outra que lhe intersecte, o que também remonta ao reconhecimento de propriedades aceitas como princípios).

Deste modo, não basta que sejam aceitas como verdadeiras ou válidas determinadas afirmações acerca dos objetos da teoria. É igualmente necessário que sejam consideradas possíveis determinadas operações envolvendo a geração, composição e decomposição de tais objetos. Como todas as figuras retilíneas a serem tratadas no restante da obra podem ser decompostas em triângulos, julga-se justificada a escolha deste teorema, que apresenta a última de suas propriedades essenciais, como um fechamento adequado para a apresentação do Livro I. Como já foi dito, as demonstrações restantes, que envolvem áreas, e que por conta disso se utilizam basicamente do triângulo, serão descritas num apêndice a este capítulo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

2.3.
Considerações finais

Pretende-se ter mostrado, por um lado, as características que fizeram com que o sistema euclideano fosse visto durante séculos como um modelo de sistema axiomático. Euclides mostra como a aplicação sucessiva de determinadas operações sobre determinados objetos é suficiente para as demonstrações dos resultados mais complexos conhecidos em geometria, de modo que estes possam ser sistematizados em função daqueles. Tanto as operações quanto os objetos referidos, vale lembrar, são de natureza tal que dispensam demonstração acerca de suas possibilidades ou atributos. Neste sentido, pode-se ver o sistema como apresentando maneiras de se tratar figuras mais complexas em termos das partes que as compõem (sejam elas outras figuras, como no caso dos quadriláteros em relação ao triângulo, ou ainda ângulos, segmentos ou pontos, no caso das figuras básicas introduzidas pelos postulados). Buscou-se evidenciar, neste sentido, o caráter misto da linguagem do sistema – parte sentencial, parte diagramática – que torna impossível a compreensão das demonstrações sem a presença simultânea e interligada do texto e do diagrama. Por conta disso, a maioria das demonstrações (se não a totalidade) utiliza informações que não aparecem textualmente explicitadas como princípios (embora sejam apresentadas explicitamente no diagrama), o que veio a originar críticas ao rigor formal das demonstrações de Euclides.

A partir desta constatação, cabe a pergunta sobre em que sentido se pode dizer, como fazem os que criticam Euclides do ponto de vista do rigor formal, que os diagramas seriam dispensáveis[57]: 1) eles são dispensáveis na medida em que é possível a construção de um sistema axiomático para geometria que não necessite deles para nada? Ou 2) eles são dispensáveis porque são recursos ilegítimos no curso de uma demonstração rigorosa, ou seja, porque nenhum sistema axiomático deve utilizá-los?

Pode-se perceber que as conseqüências do primeiro posicionamento com relação à questão são bem menos prejudiciais às representações diagramáticas do que aquelas que podem se originar do segundo. Afinal, dizer que os diagramas são eliminâveis implica apenas que eles constituem um modo de

[57] Esta pergunta é feita por Seoane num contexto mais amplo, o qual incorpora além do uso de diagramas em geometria, seu uso em outros ramos da matemática e também em lógica (Seoane 2009).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

representação que é substituível por outro, não-diagramático, enquanto que o segundo implica que eles não são, de todo, um modo de representação aceitável em demonstrações. Contudo, a primeira posição tem sido usada, por vezes, como um reforço da segunda: o uso dos diagramas caracterizaria uma teoria em estágio pré-formal, sendo que sua eliminação em favor de expedientes sentenciais daria origem a uma teoria verdadeiramente formal.

A posição dos críticos ao uso de diagramas, desde este ponto de vista, pode ser vista de duas maneiras: por um lado, pressupõe-se que uma demonstração seja sempre formalizável em termos sentenciais; e, por outro lado, que um sistema formal não pode admitir representações diagramáticas. No caso da geometria euclideana, sua formalização em termos adequados ao primeiro pressuposto foi efetuada por meio da introdução de métodos algébricos e aritméticos em geometria, o que a elevaria, de acordo com o segundo pressuposto, ao nível de uma teoria formal.

No entanto, deve-se perguntar em que medida a geometria analítica ou mesmo a reconstrução formal de Hilbert, que serão descritas no próximo capítulo, podem valer como formalizações da geometria euclideana: se é porque preservam os resultados, ou porque apresentam de maneira sentencial (formal) as demonstrações. Ao que parece, a diferença considerável que existe entre as estratégias demonstrativas destes sistemas impede que eles sejam comparados nestes termos. Seria necessário, para isso, que houvesse uma boa explicação acerca da correspondência entre as teorias (seria necessário responder, por exemplo, por que os pontos de que trata a geometria analítica correspondem àqueles que em Euclides são vistos no diagrama).

Com relação à noção restritiva de sistema formal adotada pelos defensores da dispensabilidade dos diagramas, deve-se dizer que poucos são os motivos para que ela não seja ampliada. Com efeito, ao final do século XX surgiram sistemas formais para o tratamento de recursos diagramáticos *qua* signos sujeitos à manipulação regrada. Em especial, foram desenvolvidas reconstruções formais das demonstrações euclideanas que levaram em conta o papel dos diagramas como veículos de informação, como mecanismos de prova. Tais reconstruções, por conta destas e outras peculiaridades (como uma escolha de princípios mais condizentes com os adotados por Euclides), reproduziram de maneira mais fiel, mas não menos formal, o método euclideano de demonstração. Alguns destes sistemas serão apresentados no terceiro capítulo deste trabalho. Juntamente com isso, mostrar-se-á o quão deficitário é o tratamento da teoria euclideana desde um ponto de vista histórico. Será possível

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

perceber, por exemplo, que a linguagem utilizada nas demonstrações euclideanas, tida em geral como informal, bem como a maneira como o diagrama é utilizado, estão muito mais próximos de um expediente formal do que se imaginava. Assim, cabe mostrar, no restante do trabalho, tanto as razões que fizeram com que tais demonstrações passassem a ser vistas como deficientes, quanto as razões pelas quais tal ponto de vista esteja sendo questionado nos dias de hoje.

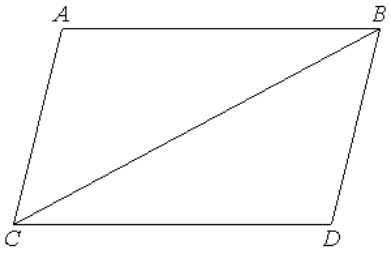
Em suma, este capítulo serve como uma introdução para uma discussão posterior a respeito de alguns tópicos importantes concernentes ao uso de diagramas nas demonstrações euclideanas. Primeiramente, ele serve para a constatação do fato que, em Euclides, não há como dispensar os diagramas e preservar a mesma estratégia demonstrativa, ou seja, os diagramas atuam como verdadeiros instrumentos de demonstração em seu sistema. As discussões que serão ulteriormente apresentadas terão como objetivo mostrar como o diagrama é utilizado, e em que medida seu uso se justifica desde uma perspectiva lógica (isto é, como questões a respeito da generalidade e necessidade dos resultados podem ser respondidas, por exemplo). Também será investigado em que medida os sistemas axiomáticos formais para a geometria euclideana podem ser vistos como uma *análise lógica* de suas demonstrações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

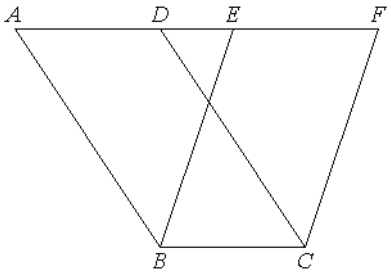
2.4.
Apêndice: Proposições sobre áreas no Livro I

A fim de que se tenha uma exposição completa das proposições do Livro I, serão apresentadas no que segue as proposições restantes, que foram deixadas de lado na discussão acima e não serão de interesse no que segue.

De I,33 a I,36 as figuras tratadas são paralelogramos. I,33 estabelece que as retas que ligam as extremidades de duas retas iguais e paralelas serão também iguais e paralelas. E I,34 demonstra a igualdade dos elementos semelhantes e opostos em um paralelogramo. Em complemento a isto, mostra a simetria dos paralelogramos com relação ao seu diâmetro ao demonstrar que a área da figura é bissecada por ele.



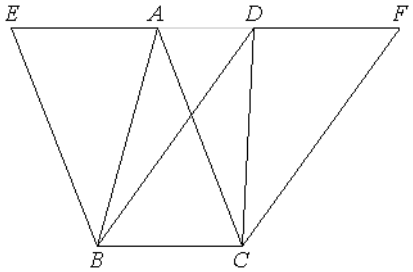
A proposição I,35 mostra que se dois paralelogramos estão contidos entre as mesmas paralelas, e se eles compartilham a mesma base, eles serão iguais. Este é o primeiro critério de identidade para paralelogramos dos *Elementos*.



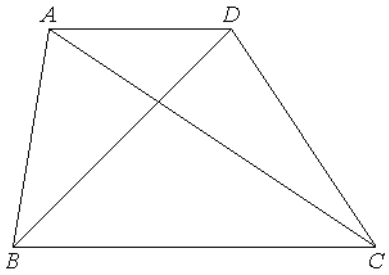
O segundo é dado por I,36, que estende a igualdade para os casos em que as bases são iguais não pelo fato de serem coincidentes, mas apenas por serem iguais (por hipótese ou demonstração).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

As proposições seguintes, I,37 e I,38 demonstram de maneira análoga às anteriores a igualdade de triângulos com bases iguais e nas mesmas paralelas. É interessante notar, nestas demonstrações, que os resultados são obtidos por meio da inclusão dos triângulos dados em paralelogramos, cujos critérios de identidade foram recentemente demonstrados. O triângulo se transforma, ao se traçar uma paralela a um de seus lados, em uma área paralelogrâmica bissecada (cuja parte é igual ao triângulo dado). Esta área é demonstrada como igual à do outro paralelogramo construído (do qual o outro triângulo também é parte), pelo que se deduz a igualdade dos triângulos.



I,39 é a forma conversa de I,37, e I,40 a conversa de I,38, ambas mostrando que se dois triângulos iguais compartilham a mesma base, ou bases iguais, e o mesmo lado, eles estão nas mesmas paralelas[58]. As demonstrações, como é de praxe no caso das proposições conversas, são por *reductio*.



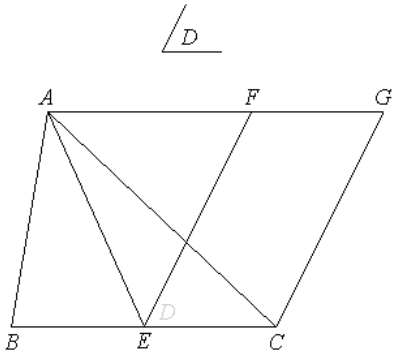
Na proposição I,41 são relacionadas pela primeira vez de modo explícito o que ficara implícito no diagrama de I,34, a saber: a relação entre a área de um

[58] De acordo com Heath 1956, pp.337-338, Heiberg oferece boas razões para que se considere a proposição I,40 como apócrifa, provavelmente adicionada por conta do que fica sugerido nas formas das demonstrações imediatamente anteriores.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

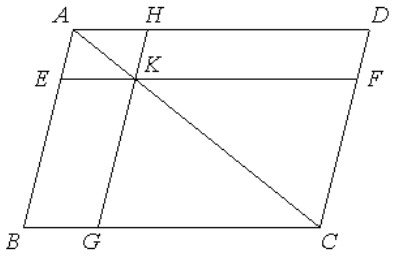
paralelogramo e de um triângulo com bases coincidentes e paralelas iguais. De acordo com a proposição, a área do paralelogramo deverá ser o dobro da do triângulo.

Em I,42 é requerida a construção, em um ângulo dado, de um paralelogramo de área igual à de um triângulo dado. O triângulo dado ABC tem inicialmente sua base BC bissecada em E, de onde se traça uma reta até A. No ponto E é construído um ângulo CEF igual ao ângulo dado D. Pelo vértice em A constrói-se AG, paralela à base, e pelo vértice em C, CG paralela a EF. FECG é, assim, o paralelogramo cuja construção foi requerida, pois ele possui área igual à do triângulo dado (já que a área daquele é igual ao dobro da metade deste), e também foi construído sobre o ângulo dado.

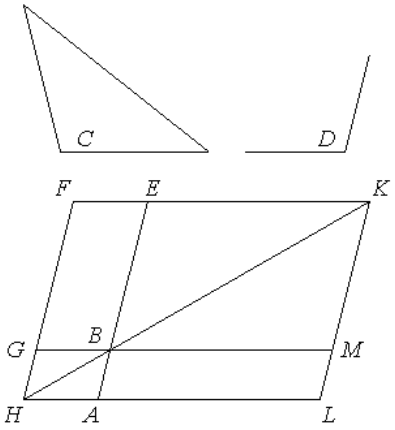


I,43 estabelece a igualdade, em áreas paralelogrâmicas, entre os paralelogramos construídos em torno do diâmetro do paralelogramo original, e as áreas que os complementam com relação à área daquele. Na demonstração, o autor se vale da igualdade das áreas dos triângulos formados pela bissetriz do paralelogramo, as quais são compostas pelas metades (triângulos) dos paralelogramos construídos em torno da bissetriz (a qual também os bisseca) somados aos mencionados complementos. Como estas metades estão presentes nos dois lados da bissetriz, e os triângulos que ela forma no paralelogramo original são compostos por elas e pelos assim chamados complementos, estes deverão ser iguais também, pois podem ser vistas como a subtração de iguais a todos iguais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

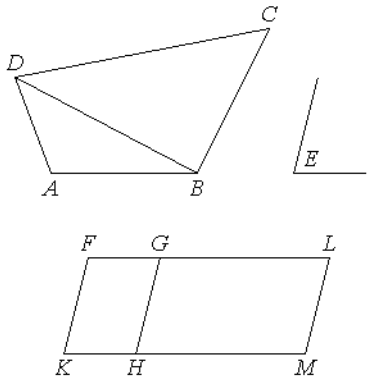


Com a demonstração acima se torna possível a aplicação, sobre uma reta finita dada e num ângulo dado, de um paralelogramo igual a um triângulo dado, que será feita em I,44. Tem-se, nesta mesma proposição, o primeiro problema sobre aplicação de áreas, e também o primeiro caso de transformação de figuras em termos de áreas. A configuração diagramática é semelhante á da proposição anterior. Digna de nota é a participação do Post. 5, utilizado para a construção do ponto de intersecção entre a reta que se tornou a bissetriz do paralelogramo maior e a que se tornou seu lado superior.



Com esta construção o transporte de áreas tornou-se irrestrito no plano, embora as áreas transportadas ainda devam ser dadas na forma de triângulos. Mas, uma vez que toda figura retilínea pode ser dividida em triângulos, tal pormenor não é mais um problema. O transporte irrestrito de áreas torna-se assim possível em I,45, que pede que se construa, num ângulo dado, um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada.

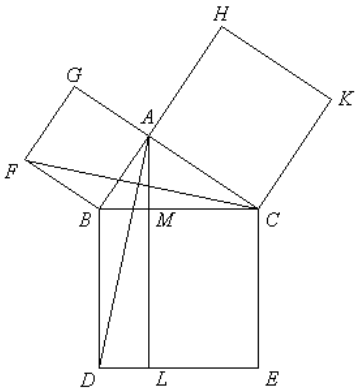
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



Em seguida, I,46 pede a construção de um quadrado sobre uma reta dada. Na extremidade desta é erigida uma perpendicular, que em seguida é cortada em uma parte igual à reta dada, e pela extremidade da perpendicular é construída uma paralela a ela. Do outro extremo do segmento dado é erigida outra perpendicular, que encontra a sua paralela em um ponto determinado. Está construído assim o quadrado requerido.

Com a demonstração da possibilidade desta construção, torna-se possível, em I,47, a demonstração das condições necessárias para a soma de duas áreas (em quadrados), e em I,48, a demonstração conversa, de que se duas áreas equivalem juntas a uma terceira, os lados que as encerram satisfazem as condições de que fala I,47.

I,47 estabelece a equivalência das áreas construídas sobre os catetos à da área construída sob a hipotenusa, num triângulo retângulo. Em outras palavras, atribui àquela figura a capacidade de somar áreas. Na demonstração as áreas quadradas sobre os lados do triângulo são divididas em triângulos, os quais serão usados para demonstrar a igualdade dos paralelogramos que compõem as três áreas quadradas envolvidas.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

A demonstração seguinte, I,48, demonstra a contrapositiva da anterior, ou seja, que o triângulo é retângulo se a referida equivalência se aplica às áreas sobre seus lados. Com isso, encerra-se o Livro I dos *Elementos*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA