

1

Introdução

De acordo com o que o título parcialmente sugere, neste trabalho será apresentada uma investigação filosófica acerca do estatuto dos diagramas ao longo da história da prática da geometria. Para isso, serão apresentados, por um lado, alguns detalhes de geometria propriamente dita, e por outro, detalhes da história desta ciência (bem como da matemática em geral). Tais componentes, entretanto, não devem ser vistos como centrais, e este trabalho, portanto, tampouco deve ser considerado como voltado tanto para um quanto para o outro. Não se pretende fazer aqui, com efeito, nem história, nem geometria. Tais elementos, entretanto, devem ser apresentados na medida em que se fazem necessários para a investigação filosófica acerca de um certo ator, o qual, inicialmente, atuou como personagem principal de uma certa trama, mas que com o passar do tempo sucumbiu à aparição de novos atores, e à revelada complexidade da referida personagem. Este ator é o diagrama, a trama é a geometria, e a personagem principal, o objeto desta ciência. Com o presente trabalho, pretende-se tornar mais clara, para continuar usando a metáfora teatral, a relação entre o ator e a personagem, entre a notação e o tema da geometria. Pretende-se, em especial, realçar suas qualidades cênicas, e, eventualmente, devolver-lhe o papel que outrora lhe fora concedido – ou, ao menos, dar-lhe uma posição mais importante do que a de mero coadjuvante, ou, pior que isso, de operário dos bastidores.

Abandonando por ora as figuras de linguagem, o objetivo principal deste trabalho, é reforçar a tese de que, para uma interpretação adequada da geometria euclideana, os diagramas devem ser considerados como parte da linguagem do sistema, e não como expedientes auxiliares, como exemplificadores do que está sendo demonstrado.

A fim de apresentar o tema em maior nível de detalhe, o primeiro capítulo trata do surgimento do método axiomático na Grécia antiga, cristalizado na obra de Euclides. Seus *Elementos* serão descritos como o fruto de uma tentativa de organização de vários resultados conhecidos mas ainda não sistematizados de maneira satisfatória. Com vistas a aprofundar a análise e possibilitar as discussões posteriores, serão descritos os princípios e as demonstrações do

Livro I dos *Elementos*, de modo que fique claro o quanto a presença do diagrama é fundamental para determinados passos nas demonstrações.

No capítulo seguinte, serão apresentados os eventos que fizeram com que, por um lado, a obra de Euclides deixasse de ser um modelo de rigor dedutivo, e, por outro lado, que serviram para relegar os diagramas a um segundo plano. A título de introdução, e para que seja possível a comparação entre dois momentos distintos com relação ao que se considerava como sendo o papel dos diagramas, serão contrastadas as críticas antigas, dos primeiros comentadores dos *Elementos*, com as críticas dos autores modernos. Na sequência, são apresentadas as mudanças em geometria que fazem com que as críticas modernas se diferenciem das antigas, e que ocasionaram uma reconstrução da geometria euclídea sem os diagramas.

A primeira delas é a geometria analítica, ou cartesiana, cujo surgimento pode ser visto como o primeiro golpe significativo sofrido pelas representações diagramáticas. As vantagens dos métodos e da notação da álgebra (em conjunção com a aritmética) para a solução dos problemas geométricos fizeram com que, de candidato natural ao papel principal na trama, os diagramas passem a ser vistos apenas como mais um ator, o qual, diante do surgimento de concorrentes mais qualificados, começava a ser visto como um tanto desajeitado para desempenhar papel tão importante. Logo na sequência, será apresentada a geometria projetiva, como uma tentativa de retomada e aperfeiçoamento do simbolismo diagramático, e em nome da preservação dos métodos e peculiaridades da geometria em seus domínios de investigação. Como se pretende mostrar, embora tivessem sido apresentados casos para os quais os diagramas são insubstituíveis, a geometria projetiva também acabou sucumbindo ao domínio da metodologia algébrica, e neste sentido não alcançou seu objetivo com relação aos diagramas – muito embora, posteriormente, viesse a ser tida como o chão comum sobre o qual todas as demais geometrias repousam.

A segunda razão para que se abandonassem os diagramas diz respeito a outro evento que abalou a sua reputação e ameaçou seu uso em geometria: o surgimento das geometrias não-euclidianas. Neste caso, o problema era relacionado à suposição de que os diagramas estão diretamente vinculados à intuição, o que caracterizaria uma limitação dos mesmos. Afinal seu apelo intuitivo fez com que se acreditasse que apenas uma geometria era possível, quando na verdade teorias igualmente consistentes poderiam ser desenvolvidas adotando-se princípios que vão contra o que a intuição sugere. Por razões

muitas vezes difíceis de explicar, o uso dos diagramas passou a ser visto como um recurso à intuição, e, conforme a matemática buscava se desvincular de uma correspondência com a realidade, tal expediente passava a ser visto como algo a ser evitado.

Finalmente, será descrita a razão mais decisiva para que se fizesse uma reconstrução da geometria de Euclides: a crise de fundamentos que se instaurou na matemática no século XIX. De acordo com o que se pretenderá frisar, esta crise é devida em grande parte à desconfiança com relação aos novos métodos, e à falta de clareza intuitiva de seus resultados. Esta crise deu origem a diversos esforços de sistematização e rigorização dos métodos da matemática com vistas a afastar as desconfianças com relação aos mesmos. E um deles diz respeito à geometria de Euclides, para a qual é apresentada uma reconstrução na qual os diagramas são completamente dispensáveis

Descrita logo em seguida, esta reconstrução formal, devida a Hilbert, dispensa os diagramas em favor de uma apresentação dos conceitos básicos da geometria em termos das relações lógicas que mantêm entre si, e não em virtude de sua correspondência a um domínio específico de entidades. Com a elaboração de um novo conjunto de axiomas, visando prover meios de se explicitar aquelas informações que os diagramas apresentavam na geometria de Euclides, torna-se possível aquilo que era demandado das teorias matemáticas menos confiáveis surgidas na modernidade: a demonstração de que o grupo de axiomas não deriva contradições. Para esta demonstração, como será mostrado, apenas a consideração da estrutura lógica dos axiomas não é suficiente, de modo que, embora os diagramas não sejam utilizados, algo que extrapola os limites da lógica é introduzido: o sistema de números. Consegue-se, assim, uma demonstração de consistência relativa à aritmética, ou seja, se alguma contradição pode surgir dos axiomas da geometria, ela também surgirá dos axiomas da aritmética.

Paralelamente a estes eventos, como será descrito na parte final do segundo capítulo, surgiu uma concepção de demonstração para a qual os diagramas ou quaisquer outros elementos que não pudessem ser organizados em termos de sequências discretas de símbolos são tidos como ilegítimos enquanto meios para as demonstrações. Com isso, os diagramas perderam de vez a cidadania no contexto de justificação das teorias matemáticas. Esta concepção é um obstáculo para as representações diagramáticas na medida em que, embora proíba o uso de representações gráficas, autoriza o uso de outro tipo de representação que, em certo sentido, pode ser considerada da mesma

natureza dos diagramas: trata-se, em ambos os casos, de símbolos. Com efeito, embora possam ser vistos como representando para a aritmética aquilo que os diagramas representam para a geometria, os números podem ser vistos como adequados aos requisitos desta concepção de demonstração. No entanto, a impossibilidade de uma demonstração de consistência para a aritmética, bem como o desenvolvimento de técnicas refinadas para manipulação de diagramas, por outro, foram alguns dos fatores que levaram a uma tentativa de resgate dos diagramas, e de reconstruções formais para as quais eles sejam importantes.

No terceiro capítulo, assim serão descritos estes desenvolvimentos em torno de uma melhor compreensão da natureza e das virtudes das representações diagramáticas. Como será mostrado, no final do século XX, fez-se sentir a necessidade de uma revisão de tais posturas extremadas com relação ao uso de diagramas em demonstrações. O sucesso da prática euclideana, confirmado tanto pelo seu duradouro sucesso quanto pela ausência de demonstrações incorretas, sugeria que algum aspecto daquela prática poderia ter sido negligenciado.

O primeiro tema abordado no referido capítulo será o modo como os diagramas são utilizados em Euclides. Ou seja, mostrar-se-ão as razões pelas quais a confiança nos diagramas não levou Euclides à demonstração de resultados incorretos. A identificação de quais aspectos dos diagramas são efetivamente utilizados por Euclides nas demonstrações dos *Elementos*, permitiu uma nova visão a respeito do rigor das demonstrações euclidianas. Isto foi feito por Kenneth Manders, cujo trabalho relevante neste sentido será descrito na primeira seção do capítulo. Com base nos resultados obtidos por Manders, foi possível, por exemplo, a construção de sistemas formais ao estilo hilbertiano que cumprem, para todos os efeitos, as funções que seus *Grundlagen der Geometrie* desempenharam. Tais desenvolvimentos serão descritos na segunda seção do capítulo.

Finalmente, o terceiro capítulo apresenta uma nova maneira de se interpretar os *Elementos*, baseada em novas considerações de cunho filosófico e principalmente histórico a respeito do contexto de surgimento da obra de Euclides. Este avanço em termos de uma nova história da prática euclideana é feito por Netz, cujo trabalho oferece boas razões para que seja considerada deficiente a maneira como os *Elementos* tinham sido considerados até então.

Tentar-se-á mostrar que as razões pelas quais os diagramas foram rejeitados nos contextos de demonstração das teorias matemáticas se originam da falta de uma discussão filosófica adequada acerca de seu caráter notacional.

Pretende-se, sobretudo, defender a adequação dos diagramas no contexto da geometria euclideana, não por representarem de algum modo os objetos daquela ciência, mas sim por terem servido como uma notação adequada para aquela teoria.

Pretende-se, por fim, mostrar a necessidade de uma nova atitude filosófica com relação à matemática, a qual não se resume nem à análise lógica de suas teorias, nem tampouco a constatações de caráter histórico a respeito das mesmas. Com isso, como se poderá perceber, será aberta uma ampla gama de problemas tipicamente filosóficos, e ainda pouco explorados, como por exemplo o da relação entre uma teoria matemática e os artefatos simbólicos que ela utiliza, ou entre estes e os supostos objetos daquela teoria. Deste modo, novos e interessantes resultados poderão ser alcançados, e uma nova perspectiva a respeito das teorias matemáticas poderá surgir.