



Bruno Rafaelo Lopes Vaz

O Papel dos Diagramas na Geometria Euclideana

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientadores: Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Prof. Abel Lassalle Casanave

Rio de Janeiro
Outubro de 2010



Bruno Rafaelo Lopes Vaz

O Papel dos Diagramas na Geometria Euclideana

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Orientador

Departamento de Filosofia - PUC-Rio

Prof. Abel Lassalle Casanave

Co-Orientador

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho

Departamento de Filosofia - PUC-Rio

Prof. Edward Hermann Haeusler

Departamento de Informática - PUC-Rio

Prof. Frank Thomas Sautter

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

Profa. Denise Berruezo Portinari

Coordenadora Setorial do Centro de Teologia e Ciências Humanas -
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 1 de outubro de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Bruno Rafaelo Lopes Vaz

Graduou-se em Filosofia em 2004, pela UFSM (Universidade Federal de Santa Maria). Ainda naquela universidade, obteve o título de Mestre em Filosofia, em 2006. Durante o Curso de Doutorado em Filosofia, cursado na PUC-Rio (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro), foi contemplado com uma Bolsa de Doutorado Sandwich do CNPq, podendo cursar um semestre como aluno visitante na UC Berkeley (University of California at Berkeley), nos Estados Unidos. Em 2010 foi aprovado em concurso público para o cargo de Professor Adjunto do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Ficha Catalográfica

Vaz, Bruno Rafaelo Lopes

O papel dos diagramas na geometria euclideana / Bruno Rafaelo Lopes Vaz ; orientador: Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira. – 2010.

235 f. : il. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia, 2010.

Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Método axiomático. 3. Raciocínio diagramático. 4. Visualização. 5. Geometria euclideana. 6. Reconstrução formal. I. Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. III. Título.

CDD: 100

Para Mari, Mila e Ester,
por estarem sempre lá.

Agradecimentos

Ao professor Abel Lassalle Casanave, pelo impulso inicial e estímulo constante para a realização deste trabalho, pelo profissionalismo e companheirismo.

Ao professor Luiz Carlos Pereira, pela confiança, pelos desafios, pela paciência, e principalmente pela energia e eficiência com que orientou este trabalho.

Ao professor Paolo Mancosu, pela inestimável contribuição em tão pouco tempo disponível, pela competência, bem como pela simpatia e cordialidade.

Aos professores Frank Sautter, Oswaldo Chateaubriand, Déborah Danowski e Edward Hermann Haeusler, pelas contribuições.

À PUC-Rio e ao CNPq, pelo auxílio e suporte necessários para a realização deste trabalho. Também à UFSM e à UC Berkeley, pela recepção durante os períodos em que as frequentei.

Aos colegas Gisele Secco, Jaqueline Engelmann, Sérgio Schultz e Rafael Cioquetta. Também aos colegas Cássia, Camila, Mariana, Raquel, Donato, Marcos, Pedro, Renato, Walter e todos os que participaram de alguma forma. A Rachel, Olivia e Jean-Marc, minha querida família do Rio de Janeiro.

A Edna Sampaio e demais funcionários do Departamento de Filosofia da PUC-Rio, pela simpatia, competência e ajuda em momentos cruciais. A Maura Vrydaghs, por mostrar estas mesmas qualidades no Departamento de Filosofia da UC Berkeley.

A minha mãe e minha avó, por terem mostrado o caminho. Aos meus familiares, pelo apoio incondicional.

A minha esposa Mari, meu porto seguro nesta jornada.

Resumo

Vaz, Bruno Rafaelo Lopes; Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias; Lassalle Casanave, Abel. **O Papel dos Diagramas na Geometria Euclideana**. Rio de Janeiro, 2010. 235p. Tese de Doutorado - Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo deste trabalho é argumentar em favor de uma nova interpretação para o papel dos diagramas nas demonstrações da geometria euclideana. À luz de trabalhos recentes acerca do tema, pretende-se promover, em particular, uma nova avaliação daquele que é considerado o primeiro sistema dedutivo rigoroso na história da matemática: a geometria de Euclides, sistematizada nos seus Elementos. Com efeito, a utilização dos diagramas como partes essenciais das demonstrações neste sistema fez com que, na modernidade, tal sistema fosse considerado um exemplo de sistema informal, no qual as demonstrações são meros esboços do que seriam verdadeiras demonstrações. Estas, de acordo com a concepção de demonstração que se tornou comum na modernidade, devem ser compostas exclusivamente de fórmulas, as quais podem ser derivadas umas das outras apenas com base em regras lógicas ou princípios explícitos de antemão. Uma vez que tal concepção tornou-se dominante, por conta de diversos fatores nem sempre interligados, os diagramas que faziam parte das demonstrações euclidianas passaram a ser vistos como uma das principais causas de uma alegada falta de rigor por parte das mesmas. Para devolver às demonstrações matemáticas o rigor que lhes é necessário, autores como Hilbert e Pasch propuseram reconstruções formais da obra de Euclides, nas quais as demonstrações prescindem totalmente dos diagramas. No presente trabalho pretende-se reconstruir a seqüência de eventos que levou ao declínio das representações diagramáticas em geometria, bem como mostrar que é possível uma interpretação da obra de Euclides que leve em conta a participação dos diagramas nas demonstrações, sem que com isso as demonstrações sejam deficientes em termos de rigor. Serão rebatidas as críticas dos que defendem a concepção de demonstração acima mencionada, e, assim, será requerida uma revisão de tal postura - visando tanto a adoção de uma concepção mais abrangente de demonstração, quanto uma interpretação da geometria euclideana que faça mais justiça ao seu sucesso.

Palavras-chave

Método axiomático; raciocínio diagramático; visualização; geometria euclideana; reconstrução formal.

Abstract

Vaz, Bruno Rafaelo Lopes; Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias (Advisor); Lassalle Casanave, Abel (Advisor). **The Role of Diagrams in Euclidean Geometry**. Rio de Janeiro, 2010. 235p. Doctoral Thesis – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main concern of this work is to argue for new interpretations regarding the role of the diagrams in Euclidean geometry. Taking into account recent works on the subject, the goal here is to present alternative ways to evaluate the system which is considered the first rigorous deductive system in the history of mathematics: Euclid's Elements. In fact, the use of diagrams as parts of its demonstrations has been considered as a flaw of that formal system. According to the standard conception of demonstration in modern times, a demonstration must be a chain of formulae, each of them being either a principle (accepted without demonstration) or a formula that follows from some principle by logical inference. As this conception became influent, the diagrams in Euclidean geometry turned out to be seen as one of the main reasons for an alleged lack of rigor of its demonstrations. In face of this, authors like Pasch and Hilbert worked on a formalization of Euclidean geometry in modern fashion, i.e., suppressing the diagrams from its demonstrations. The present work aims at a reconstruction of the main events which led to the decline of diagrammatic representations in geometry. It will be shown that an alternative view is possible. This view takes into account the importance of diagrams for the demonstrations without denying their deductive rigor. It will be argued against the conception of demonstration mentioned above, and for a revision of such conception in order to achieve a broader and fairer conception of Euclidean geometry.

Keywords

Axiomatic method; diagrammatic reasoning; visualization; Euclidean geometry; formal reconstruction.

Sumário

1 Introdução	10
2 Os <i>Elementos</i> e o Surgimento do Método Axiomático	15
2.1. Introdução	15
2.2. A matemática grega e o contexto de surgimento dos <i>Elementos</i>	16
2.2.1. O Livro I	25
2.3. Considerações finais	64
2.4. Apêndice: Proposições sobre áreas no Livro I	67
3 Críticas, Alternativas e a Reconstrução Formal	73
3.1. Introdução	73
3.2. Depois de Euclides	74
3.2.1. As primeiras críticas	76
3.2.2. As críticas modernas	83
3.3. Alguns fatores que desencadearam a reconstrução formal dos <i>Elementos</i>	91
3.3.1. A geometria analítica	93
3.3.2. A geometria projetiva	98
3.3.3. As geometrias não-euclidianas	104
3.3.4. A crise de fundamentos	113
3.4. A reconstrução formal dos <i>Elementos</i>	119
3.5. A concepção padrão de demonstração	136
3.6. Considerações finais	143
4 Euclides Revisitado	148
4.1. Introdução	148
4.2. O uso adequado dos diagramas: aspectos exatos e co-exatos	155
4.3. Um novo sistema formal para os <i>Elementos</i>	174
4.3.1. O Sistema Formal <i>E</i>	181
4.3.2. Observações sobre novos sistemas formais para os <i>Elementos</i>	191
4.4. Uma nova história da prática euclideana	194
4.4.1. O diagrama euclideano	196
4.4.2. O texto euclideano	203

4.4.3. Generalidade e necessidade	207
4.5. Considerações finais	213
4.5.1. Respostas às críticas modernas	214
4.5.2. Em defesa dos diagramas na geometria euclidea	221
5 Conclusão	225
6 Bibliografia	232