

9 CÁLCULOS

9.1. Indutância mútua.

Dedução da expressão da corrente no secundário de um transformador (dois indutores acoplados) em função da corrente no primário.

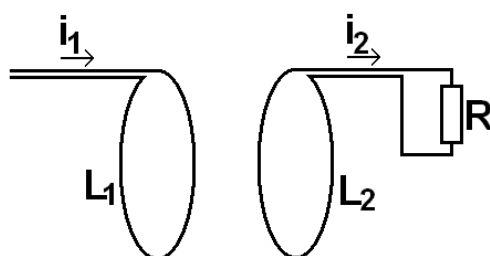


Figura 47: Esquema de dois indutores acoplados

Onde $i_1 = I_{1max} \sin(\omega t)$ é gerado por uma fonte de corrente alternada. O objetivo é determinar i_2 (corrente induzida).

As auto-indutâncias são definidas como:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Phi_{11}}{i_1} \\ L_2 &= \frac{\Phi_{22}}{i_2} \end{aligned} \quad (65)$$

Onde Φ_{11} é a parte do fluxo em L_1 devido a sua própria corrente (i_1). A segunda é análoga, mas em relação a L_2 .

As indutâncias mútuas são assim definidas:

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} \equiv \mathcal{M} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \quad (66)$$

Onde Φ_{12} é a parte do fluxo em L_1 devido à corrente da outra bobina (i_2) e Φ_{21} é o oposto.

Sendo então Φ_1 e Φ_2 os fluxos totais nas bobinas L_1 e L_2 respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = i_1 L_1 + i_2 \mathcal{M} \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{21} = i_2 L_2 + i_1 \mathcal{M}\end{aligned}\quad (67)$$

Substituindo $i_1 = I_{1\max} \text{sen}(\omega t)$,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= I_{1\max} \text{sen}(\omega t) L_1 + i_2 \mathcal{M} \\ \Phi_2 &= i_2 L_2 + I_{1\max} \text{sen}(\omega t) \mathcal{M}\end{aligned}\quad (68)$$

Usando a lei de Faraday,

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\frac{d}{dt} \Phi_2 = -L_2 \frac{d}{dt} i_2 - I_{1\max} \mathcal{M} \omega \cos(\omega t) \\ i_2 &= \frac{\varepsilon_2}{R} = -\frac{L_2}{R} \frac{d}{dt} i_2 - \frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{R} \cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt} i_2 + \frac{R}{L_2} i_2 &= -\frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{L_2} \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (69)$$

A solução desta equação diferencial deve ser da forma:

$$i_2 = I_{2\max} \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (70)$$

Onde $I_{2\max}$ e φ são parâmetros a determinar. Substituindo na equação diferencial temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (I_{2\max} \text{sen}(\omega t + \varphi)) + \frac{R}{L_2} (I_{2\max} \text{sen}(\omega t + \varphi)) &= -\frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{L_2} \cos(\omega t) \\ I_{2\max} \omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{I_{2\max} R}{L_2} \text{sen}(\omega t + \varphi) &= -\frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{L_2} \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (71)$$

Verificando as condições de contorno temos:

→ Para $t = 0$ (ou $t = 2\pi n/\omega$)

$$I_{2\max} \omega \cos \varphi + \frac{I_{2\max} R}{L_2} \text{sen} \varphi = -\frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{L_2} \quad (72)$$

→ Para $t = (2\pi n - \varphi)/\omega$

$$I_{2\max} \omega = -\frac{I_{1\max} \mathcal{M} \omega}{L_2} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{I_{2\max} L_2}{I_{1\max} \mathcal{M}} \quad (73)$$

→ Para $t = (2\pi n + \pi/2 - \varphi)/\omega$

$$\Phi_T = \Phi_{T_T} + \Phi_{T_SQ} = i_T L_T + i_{SQ} \mathcal{M}$$

$$L_{Tefet} = \frac{\Phi_T}{i_T} = L_T + \frac{i_{SQ}}{i_T} \mathcal{M} \quad (80)$$

O circuito eletrônico equivalente do circuito tanque acoplado ao SQUID é descrito em [36] como:

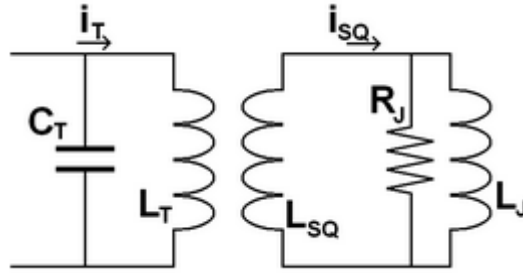


Figura 48: Esquema do circuito eletrônico equivalente do circuito tanque acoplado ao SQUID.

Baseado no estudo do item 9.1 temos:

$$i_{SQ} = \frac{\omega \mathcal{M}}{\sqrt{R_J^2 + \omega^2 L_{SQefet}^2}} I_{Tmax} \operatorname{sen} \left(\omega t + \pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{R_J}{\omega L_{SQefet}} \right) \right)$$

Quando :

$$i_T = I_{Tmax} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Logo :

$$\frac{i_{SQ}}{i_T} = \frac{\omega \mathcal{M}}{\sqrt{R_J^2 + \omega^2 L_{SQefet}^2}} \frac{\operatorname{sen} \left(\omega t + \pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{R_J}{\omega L_{SQefet}} \right) \right)}{\operatorname{sen}(\omega t)} \quad (81)$$

De acordo com [36], a resistência da junção (R_J) pode ser considerada pequena. Logo,

$$\frac{i_{SQ}}{i_T} = \frac{\mathcal{M}}{L_{SQefet}} \frac{\operatorname{sen}(\omega t + \pi)}{\operatorname{sen}(\omega t)} = -\frac{\mathcal{M}}{L_{SQefet}} \quad (82)$$

Então a (80) fica:

$$\begin{aligned}
L_{T_{efet}} &= L_T - \frac{\mathcal{M}^2}{L_{SQ_{efet}}} \\
L_{T_{efet}} &= L_T - \frac{k^2 L_T L_{SQ}}{L_{SQ} + L_J} \\
L_{T_{efet}} &= L_T \left(1 - k^2 \frac{L_{SQ}}{L_{SQ} + L_J} \right)
\end{aligned} \tag{83}$$

9.3.

Relação corrente e fluxo no SQUID

A função de onda quântica que representa os pares de Cooper num caminho fechado num material supercondutor pode ser apresentada como [36]:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho_S(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \tag{84}$$

De tal forma que

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = \rho_S(\mathbf{r}, t) \tag{85}$$

Onde $\rho_S(\mathbf{r}, t)$ representa a densidade de pares de Cooper.

É interessante destacar que, neste caso, esta função de onda representa todos os pares de Cooper deste caminho fechado. Apesar de cada elétron ser um férmion, em que vale a exclusão de Pauli, ao formar um par de Cooper, eles podem ser encarados como constituindo uma nova partícula (quasi-partícula) que é um bóson. Então a exclusão de Pauli não é válida para os pares de Cooper e vários pares de Cooper podem ser representados por uma única função de onda. No caso de um anel supercondutor é possível representá-los no caminho fechado em torno do material não supercondutor com uma função de onda macroscópica nesse caminho.

A supercorrente em um material supercondutor isotrópico pode ser representada como:

$$\Lambda \mathbf{J}_s = - \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{2e} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) \right) \quad (86)$$

onde Λ é o coeficiente isotrópico de London

$$\Lambda = \frac{m_s}{(q_s)^2 \rho_s} = \frac{2m_e}{(2e)^2 \left(\frac{\rho}{2} \right)} = \frac{m_e}{e^2 \rho} \quad (87)$$

$\rho_s(\mathbf{r}, t)$ representa a densidade de pares de Cooper, m e q representam a massa e a carga, os índices “S” e “e” referem-se aos pares de Cooper e aos elétrons respectivamente. A densidade $\rho_s(\mathbf{r}, t)$, em um caminho isotrópico, é uniforme e constante.

No caso da corrente supercondutora formar um circuito fechado, a função de onda passa a ser finita e fechada em si, em anel. Fazendo a integral no anel da expressão da densidade de corrente acima e usando o teorema de Stokes temos:

$$\oint_{\Gamma} (\Lambda \mathbf{J}_s) \cdot d\mathbf{l} + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2e} \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} \quad (88)$$

Como o caminho é fechado, a integral do lado direito só tem como valores possíveis, os múltiplos de 2π .

$$\oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n \quad (89)$$

onde n é inteiro.

E os valores da função de onda

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho_s} e^{i(\theta + 2\pi n)} \quad (90)$$

são os mesmos para qualquer n inteiro.

Então a equação acima fica

$$\oint_{\Gamma} (\Lambda \mathbf{J}_s) \cdot d\mathbf{l} + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2e} 2\pi n = \frac{h}{2e} n \equiv n \Phi_0 \quad (91)$$

Isto indica que a expressão à esquerda é quantizada em números inteiros de $(h/2e)$, chamado de quantum de fluxo (Φ_0). A expressão à esquerda é chamada de fluxóide. Isto significa que, em geral, não é o fluxo que é quantizado, mas sim o fluxóide. Se no caminho de integração escolhido não existir corrente a primeira integral vai a zero e, neste caso, podemos falar que há quantização do fluxo.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = n \Phi_0 \quad (92)$$

Onde a área de integração é a delimitada por uma curva fechada numa região dentro do material supercondutor onde não existe corrente. Logo, neste fluxo é incluído o que é gerado pelo campo $\mathbf{B}$ que penetra no supercondutor próximo da superfície.

Para analisar o funcionamento de um anel supercondutor com uma junção Josephson, vamos usar novamente o teorema de Stokes para voltar a expressar a integral do fluxo em termos do potencial vetor $\mathbf{A}$.

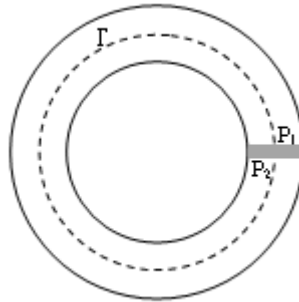


Figura 49: Representação de um anel supercondutor com uma junção Josephson.

O caminho de integração Γ está todo em região sem corrente. Logo a expressão para um anel sem junção fica:

$$2\pi n = \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (93)$$

E para um anel com a junção fica:

$$2\pi n = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{anti horário}} + \theta_J \Big|_{\text{anti horário}}^{\text{anti}} \quad (94)$$

Onde θ_J é a defasagem da função de onda na junção. Mas esta defasagem pode ser vista como a soma do efeito na fase da parte que falta para completar o caminho da integral com a diferença de fase efetiva θ_J' .

$$\theta_J \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} = \underbrace{\theta_J \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}}}_{\theta_J' \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}}} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} \quad (95)$$

$$\theta_J \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} + \theta_J' \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}}$$

Substituindo na expressão acima temos:

$$2\pi n = \underbrace{\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}}}_{\frac{2\pi}{\Phi_0} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} + \theta_J' \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} \quad (96)$$

Mas por definição

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \equiv \Phi \quad (97)$$

Então:

$$\theta_J' \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}} = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (98)$$

Onde Φ é o fluxo total dentro da área delimitada pela curva de integração Γ .

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i \quad (99)$$

Φ_e é o fluxo aplicado e

Φ_i é o fluxo gerado pela corrente no supercondutor.

Podemos então dizer, pela definição de indutância, que

$$\Phi_i = Li \quad (100)$$

A corrente que atravessa a junção Josephson está ligada ao acréscimo de fase θ_J' que aparece.

$$J = J_C \text{sen}\left(\theta_J' \Big|_{\text{horário}}^{\text{anti}}\right) \quad (101)$$

Ou seja, dois fatores provocam a evolução espacial da fase: a parte da integral do potencial vetor e a corrente. Logo, esta corrente está definida, no caso do fluxo externo não variar ($d\Phi_e/dt=0$) como

$$i = -I_C \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (102)$$

O fluxo Φ pode ser substituído por $\Phi_e + \Phi_i$ e a expressão da corrente fica

$$\begin{aligned} i &= -I_C \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi_e + Li}{\Phi_0}\right) \\ i &= -I_C \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} + 2\pi \frac{Li}{\Phi_0}\right) \end{aligned} \quad (103)$$

Onde L é a indutância definida por $\Phi_i = Li$.

Substituindo a expressão da corrente em função de Φ (102) na expressão de Φ (99) com a (100) temos

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_e + L \left(-I_C \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \right) \\ \Phi &= \Phi_e - LI_C \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \\ \Phi &= \Phi_e - \frac{\beta_e}{2\pi} \Phi_0 \text{sen}\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \end{aligned} \quad (104)$$

Onde

$$\beta_e \equiv \frac{2\pi L I_c}{\Phi_0}$$

$$i = -I_c \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} + \beta_e \frac{i}{I_c} \right) \quad (105)$$

As eqs. **(104)** e **(105)** relacionam respectivamente o fluxo (Φ) e a corrente (i) com o fluxo aplicado (Φ_e).

9.4.

Passagem de CGS para SI da equação (4)

$$\dim[H_{k[CGS]}] = Oe \quad ; \quad \dim[H_{k[SI]}] = A \cdot m^{-1}$$

$$Oe = G = 10^{-4} T = 10^{-4} \mu_0 A \cdot m^{-1}$$

$$\dim[M_{sb[CGS]}] = emu \cdot cm^{-3} \quad ; \quad \dim[M_{sb[SI]}] = A \cdot m^{-1}$$

$$emu \cdot cm^{-3} = 10^3 A \cdot m^{-1} \quad (*)$$

$$\dim[K_{CGS}] = erg \cdot cm^{-3} \quad ; \quad \dim[K_{SI}] = J \cdot m^{-3}$$

$$erg = 10^{-7} J \quad ; \quad cm = 10^{-2} m$$

$$erg \cdot cm^{-3} = 10^{-7} \cdot 10^6 J \cdot m^{-3}$$

$$erg \cdot cm^{-3} = 10^{-1} J \cdot m^{-3}$$

então

$$H_k = \frac{2K}{M_{sb}} \quad (CGS)$$

vai a :

$$10^{-4} \mu_0 H_k = \frac{2(10^{-1} K)}{10^3 M_{sb}} \quad (SI)$$

$$H_k = \frac{2K}{\mu_0 M_{sb}} \quad (SI)$$

(*) ver referência [51]