

5 Análise final e conclusão

Estudos empíricos da série de preços mostram que suas flutuações têm comportamento complexo. Eventos extremos tem probabilidade de ocorrência não-desprezível e são também observadas correlações não lineares não-triviais (volatilidade-volatilidade e volatilidade-retorno). Estas anomalias estatísticas são muito importantes para uma estimativa confiável do risco financeiro e para o apreamento de opções, que requerem uma modelagem acurada da estatística dos retornos sobre diferentes horizontes temporais.

A análise empírica dos retornos diários do IBOVESPA aqui desenvolvida também indica a existência de um processo estocástico subjacente governando a magnitude dessas flutuações, que é o processo da volatilidade. Assim, para uma modelagem adequada do mercado acionário brasileiro, deve-se investigá-la.

A volatilidade provê importantes informações aos agentes do mercado, porém, pelo fato de não ser diretamente observável, não é claro o quão confiáveis são as estimativas utilizadas de tal processo escondido. Dessa forma, é mais difícil chegar-se a uma conclusão com relação ao melhor modelo para descrevê-la.

Para inferir a série temporal da volatilidade do mercado, existem vários tipos de estimadores. Uma possibilidade é supor que exista uma equivalência entre a volatilidade e o volume de negociação, uma vez que ambos fornecem uma medida da intensidade da atividade do mercado, e assim, a partir da série observável dos volumes, inferir-se a série da volatilidade. Pode-se também utilizar a informação contida nos preços de opções, obtendo-se a chamada “volatilidade implícita”, que na verdade corresponde à crença do mercado sobre o valor da volatilidade. Consideramos neste trabalho um estimador de tipo mais usual, no qual a volatilidade é inferida a partir dos retornos de preços. Em particular, utilizamos o estimador de volatilidade diária dado pela eq.(2.6.2), que

guarda informação sobre as flutuações de preços intra-diárias a partir da escala temporal de $\tau = 15$ min.

Nosso estimador para a volatilidade diária do IBOVESPA gerou série temporal mostrada na Figura 3.4.1., que preserva a propriedade de *clustering* ou de memória presentes na magnitude dos retornos diários.

A investigação da auto-correlação linear e não-linear da volatilidade mostrou:

- (i) Existência de efeito de memória relevante até a ordem de 100 dias
- (ii) Existência de ao menos 2 escalas temporais características, uma longa e outra curta
- (iii) Truncamento exponencial das correlações em horizontes temporais longos

Uma vez considerado o estimador, resta a investigação da classe apropriada de modelos estocásticos cujos parâmetros possam descrever a diversidade de ativos e de mercados. Dentro desta perspectiva, trabalhamos com uma classe de processos nos quais a volatilidade age como uma partícula difusiva presa em um poço de potencial. O quadro é análogo ao de processos difusivos que têm sido aplicados a vários fenômenos físicos.

Avaliamos vários modelos da literatura através do ajuste de um indicador estatístico fundamental – a densidade de probabilidade incondicional. Tendo como objetivo principal encontrar modelos que descrevam bem o comportamento dos dados extremos, priorizamos o ajuste na cauda da distribuição empírica, aplicando-o à distribuição em escala logarítmica.

Um resultado interessante é que os modelos (OU-geométrico, Feller e Heston), cuja distribuição assintótica tem decaimento exponencial, não produziram ajuste satisfatório, enquanto os modelos cuja distribuição tem decaimento em lei de potência explicam melhor a cauda da distribuição empírica.

Para avaliação comparativa dos modelos que melhor refletem a distribuição incondicional de volatilidade diária do IBOVESPA, apresentamo-los a seguir em um só gráfico a modo de uma análise visual. A Figura 5.1, Figura 5.2 e Figura 5.3 apresentam as distribuições superpostas em escala semi-log, linear e log-log, respectivamente, dos modelos Harmônico com ruído multiplicativo Linear, Hull-and-White, e A-M (com $r = 0$; $s = 1/2$).

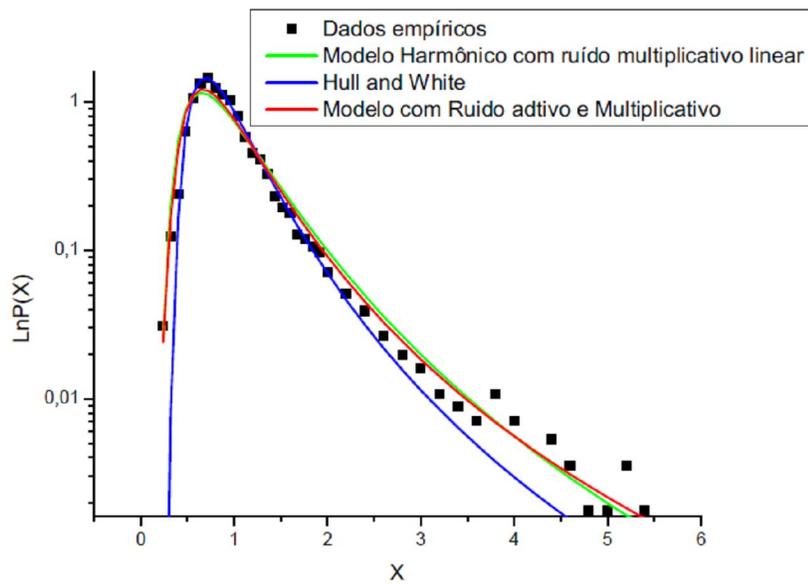


Figura 5.1. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala semi-log

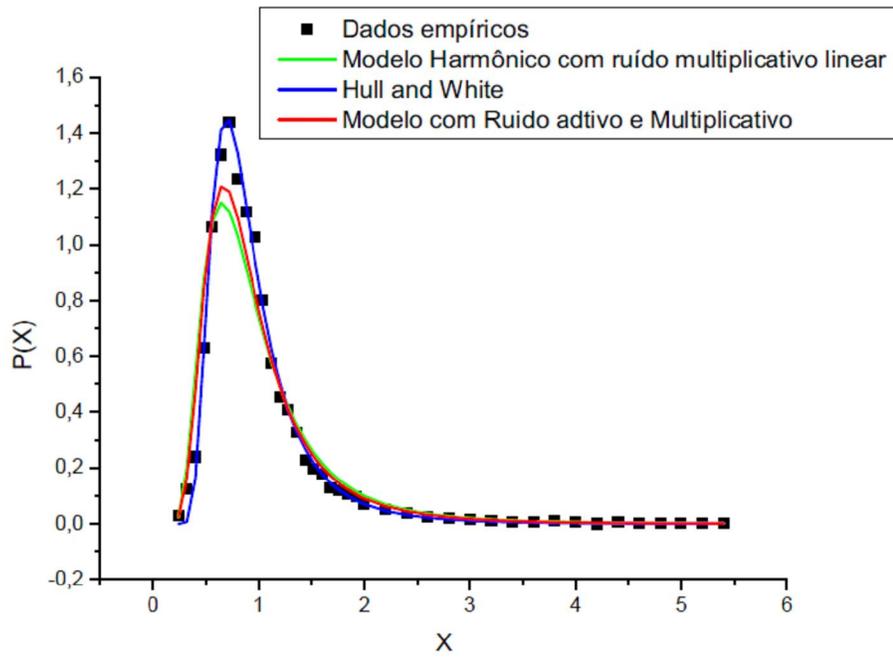


Figura 5.2. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala linear

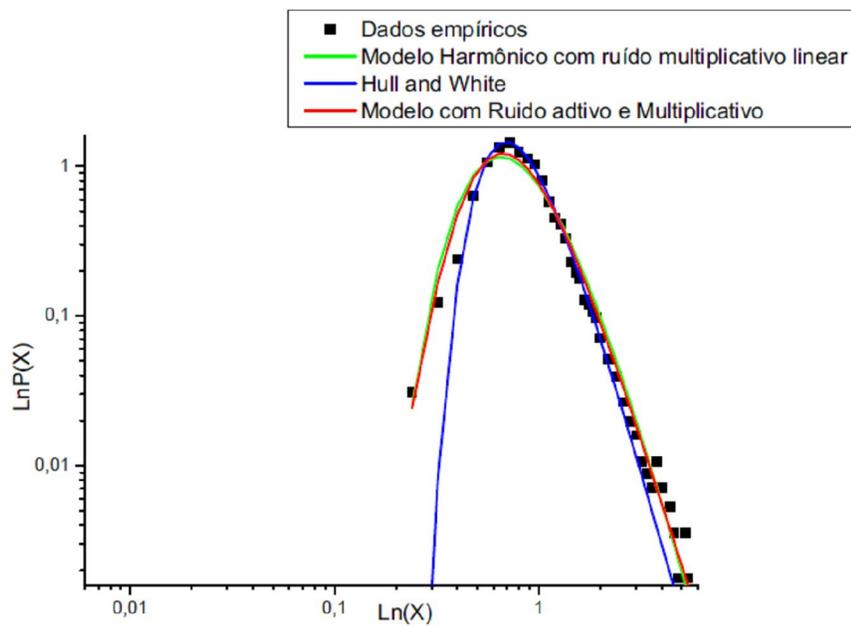


Figura 5.3. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala log-log

Visualmente nenhum modelo se mostrou discrepante. Com a finalidade de utilizar um teste estatístico como critério de escolha, utilizou-se o teste Qui-quadrado. Mostramos na Tabela 5.1 os resultados.

Modelo	p-valor
Harmônico com Ruído Multiplicativo	
Linear	0,101
Hull White	0,167
com Ruído Aditivo e Multiplicativo	0,071

Tabela 5.1. Resultados do teste Qui-quadrado

Considerando-se o nível de confiança $\alpha = 0.10$, o único modelo aceito é o modelo (não-harmônico) com ruído aditivo e multiplicativo. A previsão desse modelo é consistente com a distribuição dos dados empíricos, com exceção dos valores baixos de volatilidade, onde se observam desvios sistemáticos entre as distribuições.

Procedemos então à geração da série artificial produzida por este modelo, integrando numericamente a equação de Itô-Langevin para $x \equiv v^2$:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{-1}dt + \xi\sqrt{x}dW + \zeta dZ \quad \text{eq.(5.1)}$$

A partir dos parâmetros ótimos da distribuição q-Gama mostrados na Tabela 4.6.2 para a distribuição empírica da volatilidade quadrática e as transformações de parâmetros dadas na eq.(4.6.5):

$$v = \eta\theta \quad 1/(q-1) \equiv 1 + \eta\theta + \alpha \quad (q-1)/x_0 \equiv \lambda^2 \rightarrow x_0 \equiv (q-1)\alpha/\eta$$

obtivemos os parâmetros originais da equação diferencial estocástica eq.(5.1).

Lembrando que $\alpha \equiv \frac{\gamma}{\xi^2}$, os resultados estão mostrados na Tabela 5.2 .

Parâmetro	Valor
θ	0.53
α	1.69
η	10.44

Tabela 5.2. Parâmetros originais da eq.(5.1) obtidos da Tabela 4.6.2 através da eq.(4.6.5).

Observamos ainda que, de acordo com as propriedades da distribuição q-Gama ,

$$\langle x \rangle \equiv \langle v^2 \rangle = \frac{\theta + 1/\eta}{1 - 1/\alpha} \cong 1.5$$

que é aproximadamente o valor empírico ≈ 1.4 encontrado para a volatilidade quadrática.

A Figura 5.4 mostra o resultado preliminar para a série artificial obtida através do método de Euler [23]. O passo de integração foi $\gamma dt = 10^{-4}$ e os dados gravados a cada $\gamma 10^4$ passos, consistente com a escala temporal unitária de 1 dia. Para comparação, mostramos na Figura 5.5 a série empírica da volatilidade quadrática.

Observando a série artificial gerada, vemos que o modelo escolhido descreve os períodos de alta volatilidade produzidos pelo ruído multiplicativo, separados períodos mais longos de baixa volatilidade governados pelo ruído aditivo, produzindo uma trajetória similar à volatilidade diária do IBOVESPA.

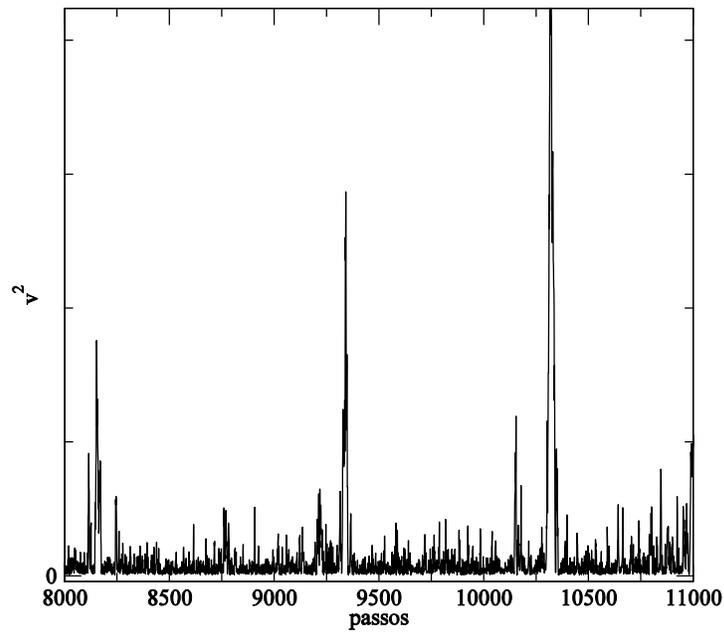


Figura 5.4. Série artificial gerada por integração numérica da eq.(5.1)

Volatilidade normalizada quadrática

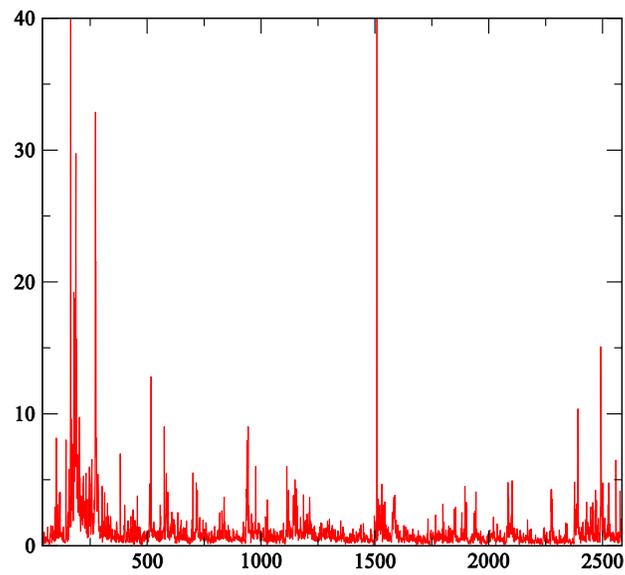


Figura 5.5. Série empírica da volatilidade (normalizada) quadrática diária do IBOVESPA

Concluimos que o modelo A-M analisado apresenta os seguintes resultados promissores:

- (i) O modelo é computacionalmente viável
- (ii) A distribuição do estimador de volatilidade empírica é consistente com o modelo
- (iii) A série artificial com os parâmetros ótimos reproduz a série empírica razoavelmente

A assimetria temporal observada na correlação *Leverage* em outros mercados ocorre também para o IBOVESPA. Este efeito pode ser utilizado como mais um "stylized effect" na busca pela melhor modelagem da volatilidade de nosso mercado.

Conforme mostrado na seção 2.8, modelos de volatilidade estocástica governados por um processo difusivo genérico (na formulação de Itô) são consistentes com a assimetria da correlação *Leverage*.

Por outro lado, vimos que o confronto dos diversos modelos com a distribuição empírica só produziu valores de parâmetros relativos. A correlação *Leverage* provê a possibilidade de estimativa dos parâmetros envolvidos na classe de modelos aqui estudados, em particular do parâmetro γ do modelo com ruído aditivo-multiplicativo.

No entanto, a principal consequência dos resultados empíricos para a auto-correlação da volatilidade é que modelos que produzem uma única escala temporal característica devem ser descartados. Este é o caso dos modelos estocásticos com potencial de reversão harmônico considerados (com parâmetro $r=1$ na eq.(4.1.1), onde γ é o inverso do tempo característico).

Logo, novos modelos para descrever a dinâmica dos mercados financeiros devem ser analisados, que levem em conta a coexistência de memória com diferentes escalas. Para obtenção de auto-correlação que contemple duas escalas características (onde $\tau_2 \gg \tau_1$), considerando variável financeira descrita por

potencial de reversão à média harmônico, foram propostas generalizações [24] nas quais os parâmetros do potencial harmônico, como por exemplo o nível de referência θ , são também dependentes do tempo, flutuando mais lentamente, com escala característica τ_2 .

No caso do modelo proposto aqui, regido pela eq.(5.1), vemos que esta equação equivale a:

$$dx = -\gamma_{ef}(t)(x - \theta)dt + \xi\sqrt{x}dW + \zeta dZ \quad \text{eq.(5.2)}$$

com $\gamma_{ef}(t) = \gamma/x(t)$. Neste caso, podemos distinguir dois regimes extremos, os de alta (baixa) volatilidade, onde $\gamma_{ef}(t)$ é pequeno (grande), levando à coexistência de memória com diferentes escalas temporais.

Além disso, é importante lembrar que processos estocásticos com ruído aditivo-multiplicativo têm sido estudados em conexão com a estatística não-extensiva [24], justificando a existência de fortes correlações que inibem a convergência de acordo com o TCL. Isto sugere que correlações análogas persistam nos processos com reversão à média com potenciais generalizados tal como o descrito na eq.(5.1).

As duas propriedades mencionadas nos parágrafos anteriores, juntamente com o acordo com a distribuição empírica sugerem que o modelo A-M (com $r = 0$; $s = 1/2$) seja considerado o como um “*null model*” para modelos de reversão a média com memória de múltiplas escalas temporais, encorajando o aprofundamento da análise de suas propriedades estatísticas para fins de modelagem da volatilidade de preços.