3
Análise Empírica do IBOVESPA

Hoje a BM&F/Bovespa representa uma das maiores bolsas do mundo. Portanto, espera-se que seu comportamento acompanhe o de outros índices importantes. Como um *benchmark* do mercado acionário, nesta dissertação, damos uma contribuição, analisando a série empírica do IBOVESPA, em particular, sua volatilidade diária.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

3.1
Índices de Bolsas de Valores

O índice de Bolsa de Valores expressa o valor de mercado de uma carteira formada pelas ações mais negociadas ou pelas empresas mais representativas de certo segmento de mercado. O valor absoluto do índice da carteira mede assim o desempenho médio dos preços das ações negociadas na Bolsa de Valores.

O índice do mercado acionário é bastante útil, ainda, por refletir a dinâmica dos investimentos em ações e, em conseqüência, as tendências gerais da economia. Por meio de suas variações periódicas, é possível distinguir certos ciclos que caracterizam o funcionamento da economia, formando as expectativas dos investidores com relação ao seu comportamento.

O índice da Bolsa de Valores de São Paulo é o mais importante indicador do desempenho do mercado brasileiro. O IBOVESPA foi criado em 1968 (02/01/1968) e sua metodologia está apresentada no Apêndice A.

Ao se estudar o mercado, deve ser levado em consideração uma componente fortemente determinística refletida no índice de mercado. Essa componente nada mais é que a inflação associada a um período macroeconômico. Portanto um aumento ou decaimento do índice pode não significar o crescimento real da economia do país. Para avaliar o crescimento real do valor da carteira de ativos é necessário corrigir o valor do índice, excluindo-se a inflação da moeda de referência dos preços.

Na Figura 3.1.1 é apresentada a série temporal do índice da BOVESPA (IBOV). A série foi construída a partir dos preços de fechamento de cada dia de pregão, no período compreendido entre janeiro de 1991 e junho de 2009. Apresentamos o índice nominal e o índice corrigido, no qual todas as cotações são trazidas para unidade monetária (Real) na data de referência de 01/08/1994. O método utilizado para a correção monetária está apresentado no apêndice B.

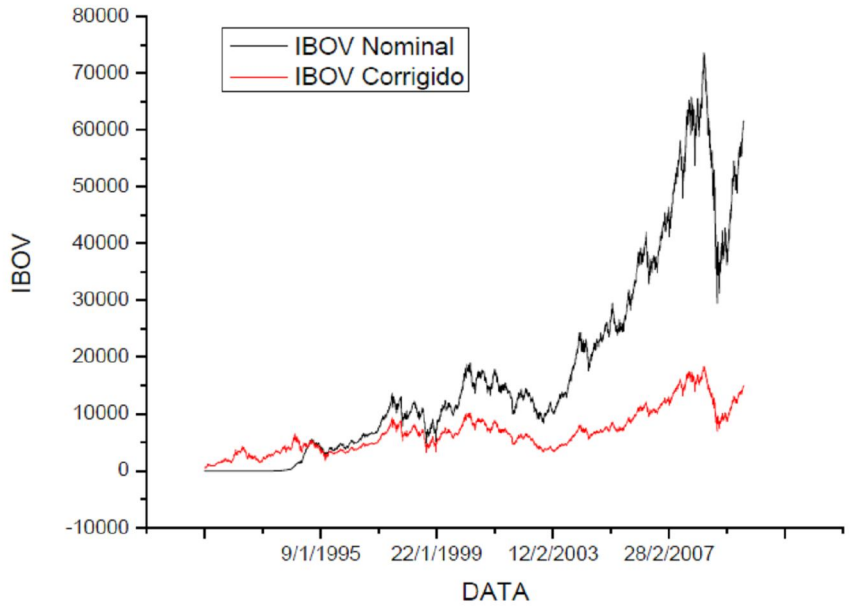


Figura 3.1.1 – Série temporal diária do IBOVESPA nominal e corrigido (valor de referência 01/08/1994 – ver texto)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

3.2
Análise Empírica dos Retornos Diários do IBOVESPA

A seguir é apresentada a série de retornos logaritmos diários obtidos através dos preços de fechamento do Índice da Bovespa, compreendidos no período de janeiro de 1991 a junho de 2009 (figura 3.2.1), seguido do seu histograma (figura 3.2.2). Esta amostra de dados corresponde a 2828 observações diárias, já extraídos os *outliers* (valores de retornos maiores do que dez vezes o desvio padrão da amostra)

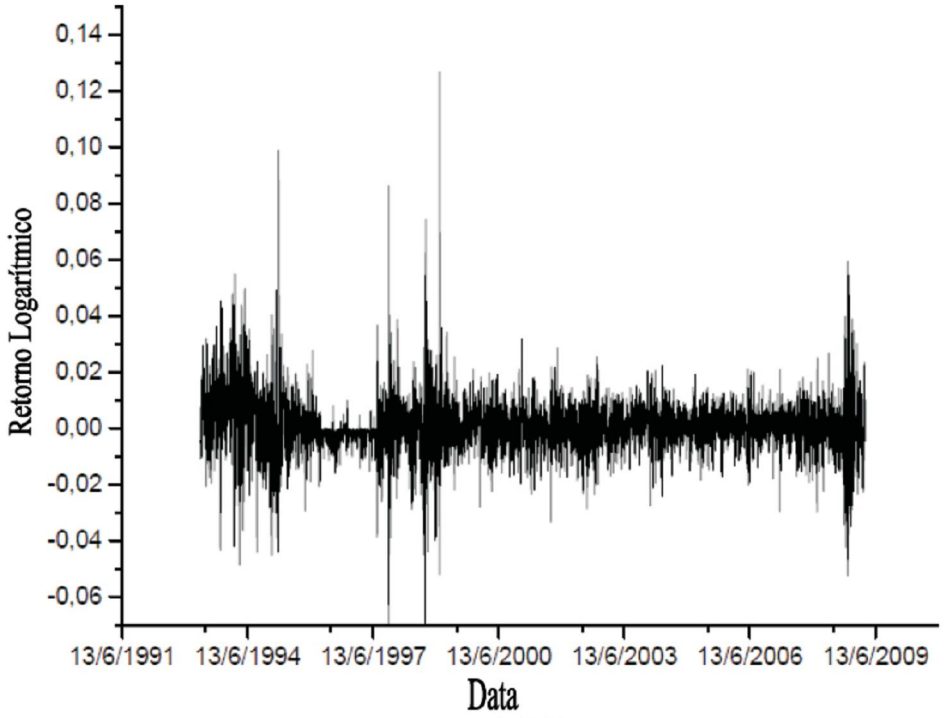


Figura 3.2.1 - Série Temporal de retornos logarítmicos diários do IBOVESPA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

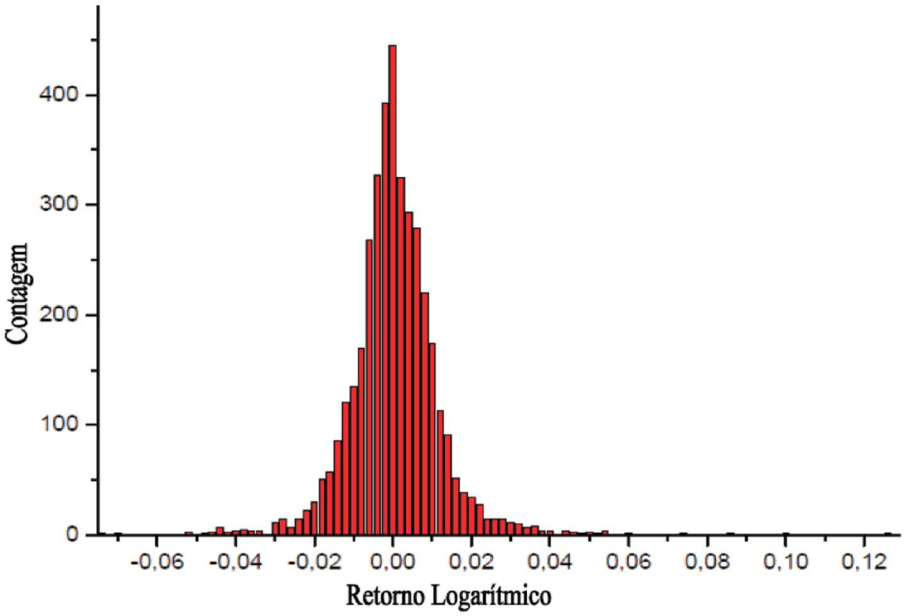


Figura 3.2.2 Histograma da ocorrência de retornos logarítmicos diários no período janeiro de 1991 a junho de 2009 (foi utilizado o valor de bin=0,08).

A seguir, apresenta-se na Tabela 3.2.1 a estatística descritiva da distribuição dos retornos empíricos.

Retorno Logarítmico	
Média	$3{,}703 \times 10^{-4}$
Mediana	$-1{,}186 \times 10^{-4}$
Variância	$1{,}288 \times 10^{-4}$
Desvio Padrão	$1{,}135 \times 10^{-2}$
Mínimo	-0,075
Máximo	+0,127
Assimetria	0,667
Curtose	9,687

Tabela 3.2.1 Estatística descritiva da distribuição de retornos logarítmicos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

A Tabela 3.2.1 apresenta as características importantes da distribuição de retornos logarítmicos de preços tais como valor médio (μ), mediana, variância, desvio padrão (σ), valor mínimo, máximo, assimetria e curtose (κ).

O valor da mediana negativo mostra que a maioria dos dados são negativos, apesar da média não ser negativa. Isto porque os valores positivos são maiores em módulo que os valores negativos, gerando por outro lado uma assimetria da distribuição para direita (assimetria > 0).

O desvio padrão dos retornos de preço do ativo objeto fornece uma medida da incerteza dos preços, ou seja, de quanto o preço do ativo pode flutuar. Como vimos na seção 2.5, esta grandeza é um estimador da volatilidade, para janela temporal correspondente ao tamanho da série.. Assim, quanto mais volátil o ativo, maior seu potencial de gerar grandes lucros ou grandes perdas.

Observa-se também que os retornos logarítmicos do IBOVESPA apresentam uma distribuição leptocúrtica (curtose > 0), o que exclui a hipótese de normalidade. O valor alto da curtose = 9,687 é indicativo de uma distribuição com cauda longa.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

3.3
Flutuabilidade da Volatilidade

A partir daqui o retorno logarítmico será denominado simplesmente retorno.

O valor dos retornos de preços pode ser medido diretamente da série temporal dos dados financeiros, porém a volatilidade (que fornece o grau de dessa flutuabilidade dos preços) não pode ser observada diretamente e precisa ser estimada. Como vimos, uma das maneiras de estimá-la é a partir da largura da distribuição dos retornos passados. Considerando-se séries temporais longas, esta medida estatística fornece a definição de volatilidade histórica ou incondicional que é uma medida de longo prazo da incerteza dos retornos.

Porém, para horizontes temporais curtos, a incerteza dos retornos de preços praticados pelo mercado não é um parâmetro constante e pode também flutuar, como analisaremos a seguir.

Tomando-se a série histórica dos retornos de preços diários do IBOVESPA no período já citado, calculou-se o desvio padrão dos retornos em janelas temporais de 5, 50, 100 e 250 dias de pregão, sem superposição de janelas equivalentes. Obteve-se assim um novo banco de dados das diferentes volatilidades (locais) diárias associadas a estas janelas temporais de pregão. A seguir, calculamos as médias das volatilidades locais para cada extensão de janela assim como suas respectivas flutuações ao longo dos 10 anos em estudo, através do desvio padrão (DP) dos valores encontrados. Os resultados estão mostrados na Tabela 3.3.1.

Janela Temporal	**5 dias**	**50 dias**	**100 dias**	**250 dias**
Volatilidade local média	0,02348	0,02567	0,02606	0,02634
Desvio Padrão (DP)	0,01625	0,01333	0,01244	0,01113
Variação Percentual (DP/média)	0,69230	0,51959	0,47757	0,42272

Tabela.3.3.1 Análise empírica da flutuabilidade da volatilidade diária (ver texto)

Observa-se que a volatilidade local para todo o período analisado tem valor médio que não varia significativamente para as diferentes janelas temporais, conforme esperado, porém apresenta flutuabilidade (volatilidade da volatilidade, dado pelo parâmetro DP) que não decai significativamente com a extensão da janela.

Como uma análise preliminar dessas flutuações, calculamos também a flutuação da volatilidade local relativa ao valor médio observado em todo período. Este parâmetro fornece a “taxa de variação” da volatilidade. Nota-se que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

a flutuação relativa da volatilidade é 70% quando se considera uma janela de 5 dias e diminui conforme a janela temporal aumenta, de acordo com o esperado. Porém, na janela temporal de longo prazo, 250 dias de pregão (representando aproximadamente um ano), a flutuação relativa ainda é de 42%. Isto mostra que há uma grande variabilidade da volatilidade mesmo se considerarmos horizontes temporais longos, significando que devemos caracterizá-la como uma grandeza não estacionária.

Motivados por esses resultados preliminares, na seção a seguir vamos investigar um estimador para volatilidade diária, de forma a quantificar sua flutuação no tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

3.4
Análise empírica da volatilidade diária do IBOVESPA

O estimador da volatilidade diária escolhido para ser adotado no trabalho, é o dado pela eq.(2.6.2), utilizando-se o intervalo intra-diário com τ = 15 minutos e H=1/2. A série histórica foi analisada no período compreendido entre janeiro de 1998 e maio de 2009. A data inicial corresponde à data na qual a BOVESPA passou a fornecer os retornos intra-diários de τ = 15 minutos. Ao todo foram contabilizados 2.818 dias de pregão, utilizando-se assim uma base de dados total de 81.800 retornos intra-diários de τ = 15 minutos.

Um dia de pregão tem aproximadamente sete horas e quinze minutos, gerando assim um número médio $\overline{n}_\tau$ = 29 retornos intra-diários de τ = 15 minutos. No entanto, como o tempo de duração do pregão não é uniforme ao longo do ano, o valor adotado para o $n_\tau(t)$ diário foi a média do mês correspondente. Notou-se que a grande maioria dos dados forneceu $n_\tau(t) = 29$ com poucos meses fornecendo os valores 28 ou 30. A seguir, apresentamos na Figura 3.4.1 a série temporal da volatilidade diária do IBOVESPA calculada de acordo com a eq.(2.6.2).

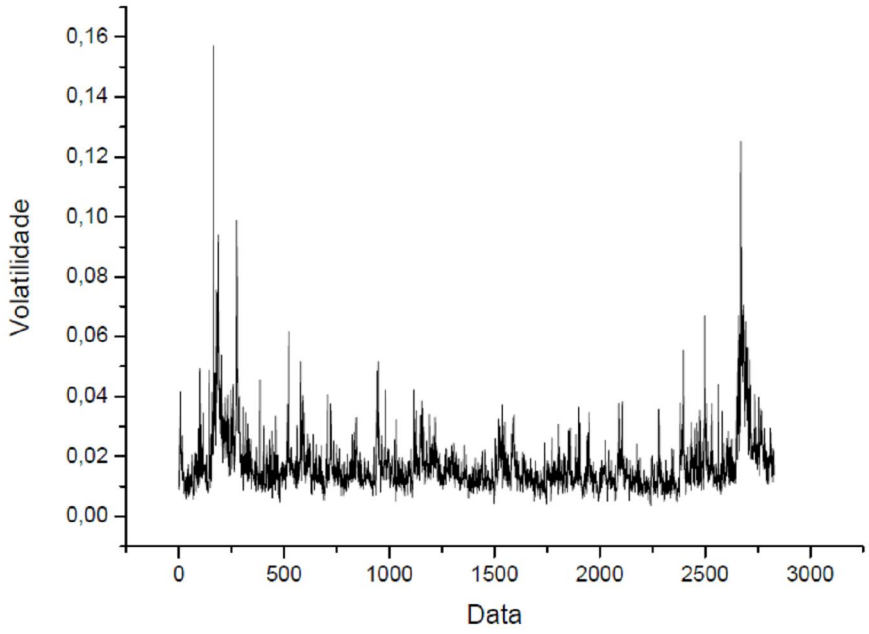


Figura 3.4.1 Série temporal da volatilidade no período de janeiro de 1998 a maio de 2009, obtida através do estimador dado pela eq.(2.6.2), com τ = 15 min e $\overline{n}_{\tau}$ = 29

Para comparação, apresentamos na Figura 3.4.2 a série dos retornos diários calculados com os preços de fechamento do pregão no período em estudo. Os gráficos comprovam que o método adotado para o cálculo de volatilidade reproduz qualitativamente as alterações de magnitude das oscilações de preço, como podemos notar pelos picos de volatilidade, que acompanham os picos de oscilações de retorno diário.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

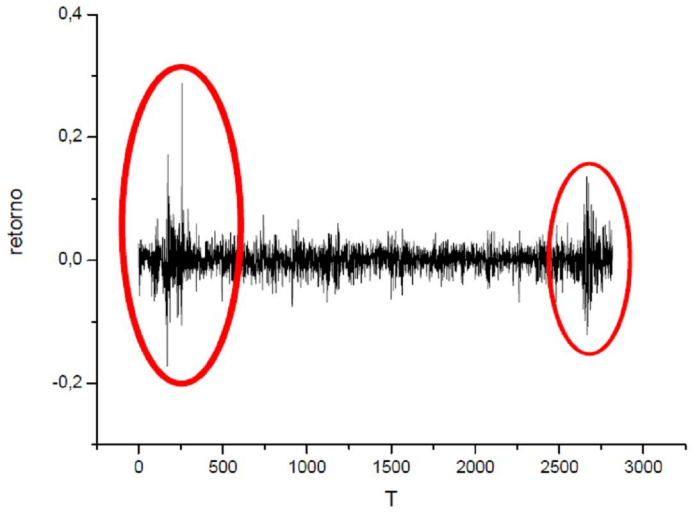


Figura 3.4.2 Série temporal do retorno diário no período de janeiro de 1998 a maio de 2009, assinalando-se os períodos de maior oscilação de preços.

O histograma da ocorrência dos valores de volatilidade diária está mostrado na Figura 3.4.3. A Tabela 3.4.1 apresenta as propriedades estatísticas importantes dessa distribuição.

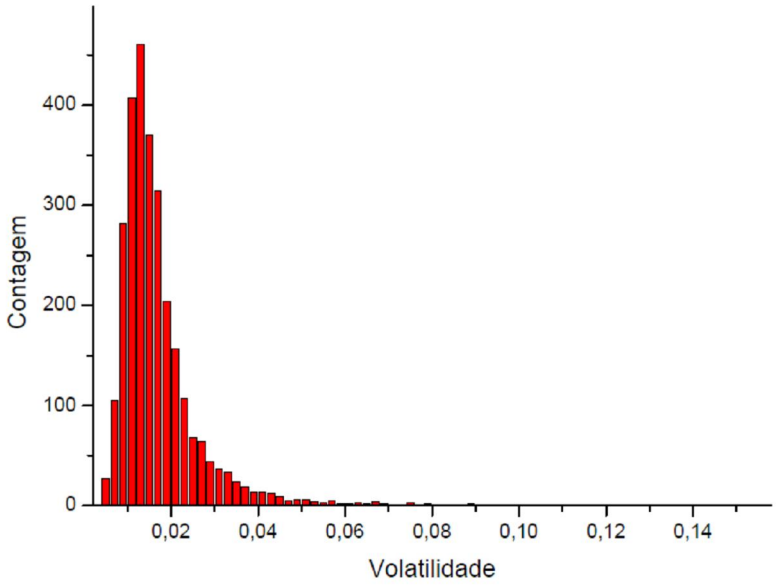


Figura 3.4.3. Distribuição de valores empíricos da volatilidade diária no período de janeiro de 1998 a maio de 2009.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Volatilidade Diária	
Média	0,01718
Mediana	0,01470
Variância	0,000104
Desvio Padrão	0,010194
Mínimo	0,003537
Maximo	0,1572
Assimetria	3,836
Curtose	27,390

Tabela 3.4.1. Estatística descritiva da distribuição de volatilidade diária

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

O valor da mediana menor que a média mostra que a maioria dos dados se apresenta do lado esquerdo na média, porém temos valores altos para volatilidade o que gera uma assimetria para direita (assimetria > 0) bem alta. A distribuição também é leptocúrtica, com alto valor de curtose.

3.5
Avaliação do estimador de volatilidade

Comparando-se os dados obtidos para retornos e volatilidade, nota-se que existe ama diferença entre a média da volatilidade diária, 0.01718, mostrada na Tabela 3.4.1 e a volatilidade histórica, dada pelo desvio padrão dos retornos diários, 0.01135, mostrada na Tabela 3.2.1. Motivados a compreender a diferença encontrada, foram feitos dois estudos apresentados a seguir.

3.5.1
Correlação dos retornos intradiários

O reescalonamento utilizado para a volatilidade entre as escalas intra-diária ($v_\tau(t)$) e diária ($v(t)$) através do fator $\sqrt{n_\tau}$ considera que a seqüência de retornos intra-diários obedece a um *random walk*. No entanto, uma amostra com número pequeno de dados, mesmo que aleatórios, pode apresentar tendências de curto prazo de natureza puramente estatística. Devido a isso, se optou por não escolher τ muito longos (para τ = 1hora, por exemplo, $\overline{n}_\tau \cong 7$), de forma a não superestimar ou subestimar a volatilidade diária.

Apesar de haver interesse em maximizar n_τ para um reescalonamento mais acurado, a escolha de escala τ mínima ($\tau = 1$minuto) não é conveniente pois neste caso existe correlação forte entre retornos sucessivos, o que violaria a hipótese de correlação nula. Devido a isso, utilizou-se a escala intra-diária intermediária de 15 minutos. Porém devido a diferença encontrada na volatilidade, citada no início dessa seção, decidiu-se analisar a auto-correlação dos retornos de $\tau = 15$ minutos, através da eq.(2.7.1).

A Figura 3.5.1 apresenta a correlação temporal dos retornos intra-diários para intervalo de tempo Δt.

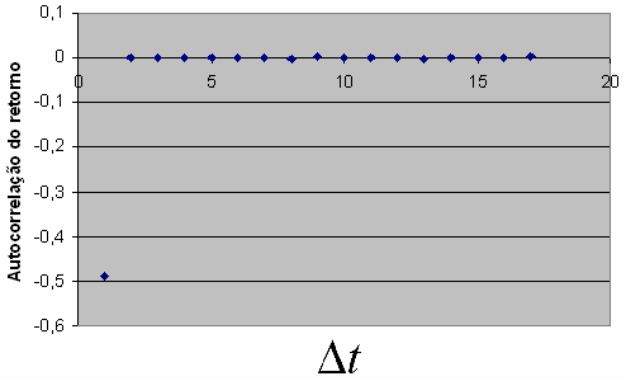


Figura 3.5.1 Gráfico de auto-correlação de retorno intra-diário (τ = 15 minutos)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Pelo gráfico nota-se que a hipótese de que a correlação nula é rejeitada, havendo uma correlação negativa para retornos sucessivos de 15 minutos. Como a aproximação de independência dos retornos sucessivos não é válida e a correlação é negativa, o fator de reescalonamento deve ser menor que $\sqrt{n}$. A volatilidade diária encontrada, com este fator, foi, portanto, superestimada. Esta é uma das justificativas para discrepância mencionada entre os estimadores de volatilidade diária mostrados nas Tabelas 3.2.1 e 3.4.1.

3.5.2
Salto intradiário

Fez-se também um estudo detalhado do banco de dados dos retornos intra-diários com o objetivo de buscar outras possíveis causas da super-estimativa da volatilidade diária..

Abaixo mostramos a Figura 3.5.2.1 como gráfico da evolução do preço intra-diário a cada τ = 15 minutos, entre os dias 8 e 11 de janeiro de 2002. Esses dias foram mencionados a modo de exemplificação.

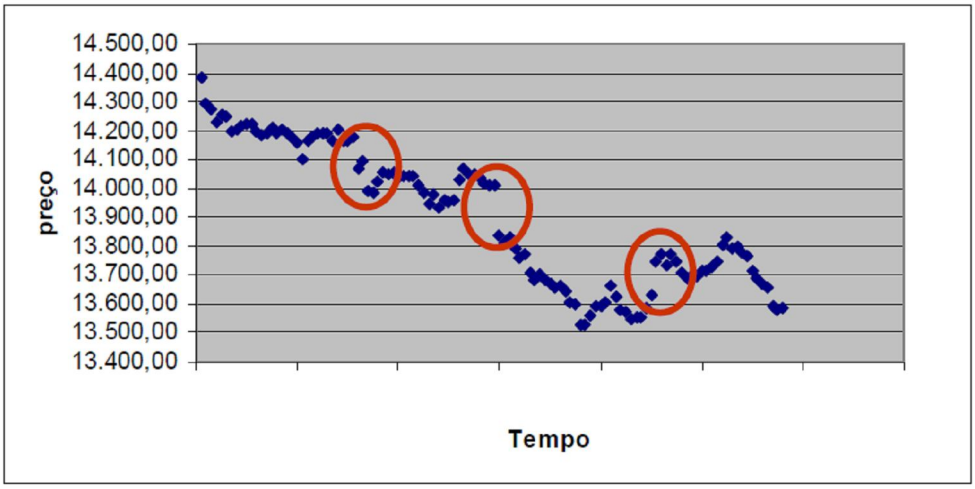


Figura 3.5.2.1 Gráfico da evolução do preço intra-diário a cada τ = 15 minutos, de 8 a 11 de janeiro de 2002

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Assinalaram-se os pontos nos quais houve uma brusca mudança no comportamento dos preços e verificou-se, a partir do banco de dados, que os saltos não ocorrem na passagem da última cotação de preço de um dia de pregão para a primeira cotação de preço do pregão seguinte, e sim entre a primeira e segunda cotação de preço, no início do pregão.

A conclusão a que se chega é que esse salto nos primeiros 15 minutos de pregão representa o agregado de informações do que aconteceu de um dia para o outro no mercado, incluindo as cotações das bolsas que operam em outros países enquanto a bolsa brasileira está fechada. Logo, a variação de preço bem no início do pregão, que é computado na escala de tempo de 15 minutos, na verdade é representativa de uma escala de tempo maior. Como conseqüência, tem-se uma majoração da estimação da volatilidade diária $v(t)$ via reescalonamento, uma vez que esse salto de preço intra-diário (espúrio) está incluído em $v_\tau(t)$.

Os fatores apresentados nas sub-seções 3.5.1 e 3.5.2 que implicam em superestimação de volatilidade diária, no entanto, afetam homogeneamente a série da volatilidade. Neste caso, aplicar-se, por exemplo, um filtro para os saltos de preço no início do pregão, apenas re-escalonaria os valores diários, sem alterar significativamente a estrutura da série.

Usualmente, a análise estatística dos dados financeiros é feita sobre os dados após ser aplicado algum tipo de normalização, para fins de comparação entre mercados. No caso da volatilidade, aplica-se a divisão pelo valor médio da amostra de dados. Adotaremos esta normalização no presente trabalho. Sendo assim, o efeito amplificador dos fatores mencionados acima é eliminado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

3.6
Auto-correlação da volatilidade diária

3.6.1
Função de auto-correlação linear

Medimos a auto-correlação temporal da série da volatilidade diária através da eq.(2.7.1), onde {X(t)}≡ {ν(t)} e {Y(t)}≡ {ν(t)}. Não foi possível o ajuste do gráfico com uma única exponencial. Fez-se o ajuste com a expressão abaixo, que possui comportamento assintótico em lei de potência:

$$F(\tau) = 1 / [\, 1 + (\tau / \tau_1)^{\lambda}] \qquad \text{eq.(3.6.1.1)}$$

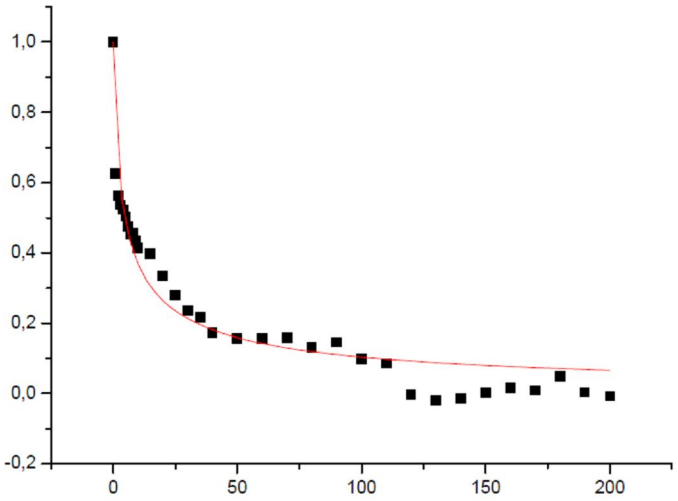


Figura 3.6.1.1 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com função com decaimento em lei de potência dada pela eq.(3.6.1.1)

Os valores dos parâmetros estão mostrados na Tabela 3.6.1.1.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
λ	0.70	+/- 0.05
τ_1	4.68	+/- 0.49

Tabela 3.6.1.1 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.1) para a auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA

No entanto, quando consideramos as escalas temporais mais longas, vê-se que este ajuste não é adequado. A auto-correlação temporal da série de volatilidade foi então ajustada pela expressão:

$$C(\tau) = \frac{\exp(-\tau/\tau_2)}{1+(\tau/\tau_1)^{\lambda}} \qquad \text{eq.(3.6.1.2)}$$

obtendo-se o ajuste mostrado na figura 3.6.1.2 :

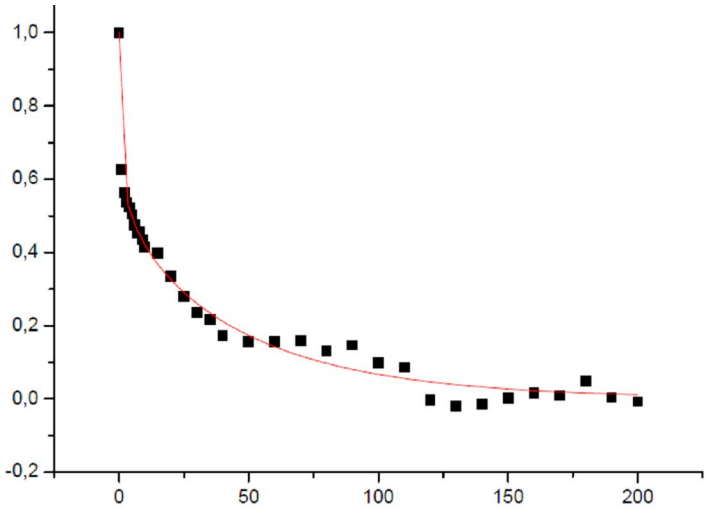


Figura 3.6.1.2 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com a função dada pela eq.(3.6.1.2)

Os seguintes parâmetros foram obtidos, mostrados na Tabela 3.6.1.2:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

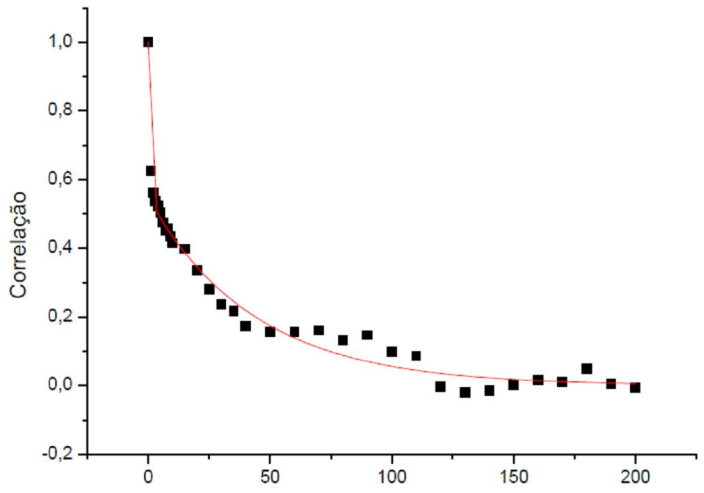
Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
λ	0.24	. +/- 0.06
τ_1	9.62	. +/- 3.00
τ_2	59.34	. +/- 7.67

Tabela 3.6.1.2 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.2) para a auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA

Nota-se que o valor do expoente $\lambda \approx 0.24$ está em acordo com os resultados da literatura para outros mercados, conforme a seção 2.7. No entanto, mecanismos de controle ou limitações dos agentes do mercado truncam exponencialmente no tempo o efeito de memória de longo alcance caracterizado pela lei de potência.

Motivados por resultado da literatura para a auto-correlação de volume negociado para o Dow Jones [17], mostramos a seguir a auto-correlação da volatilidade na Figura 3.6.1.3, juntamente com o ajuste da expressão:

$$C(\tau)=A*\exp(-\tau/\tau_1) + (1-A)*\exp(-\tau/\tau_2) \qquad \text{eq.(3.6.1.3)}$$



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Figura 3.6.1.3 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com função bi-exponencial dada pela eq.(3.6.1.3)

Foram obtidos os seguintes parâmetros mostrados na Tabela 3.6.1.3 :

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
A	0,46	. +/- 0,02
τ_1	0,70	. +/- 0,14
τ_2	43,84	. +/- 2,79

Tabela 3.6.1.3 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para a auto-correlação da volatilidade

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Abaixo, introduzimos um gráfico comparativo em escala log-log dos dois últimos ajustes, mostrando claramente a existência de dois regimes, com um forte decaimento das correlações para horizontes temporais mais longos.

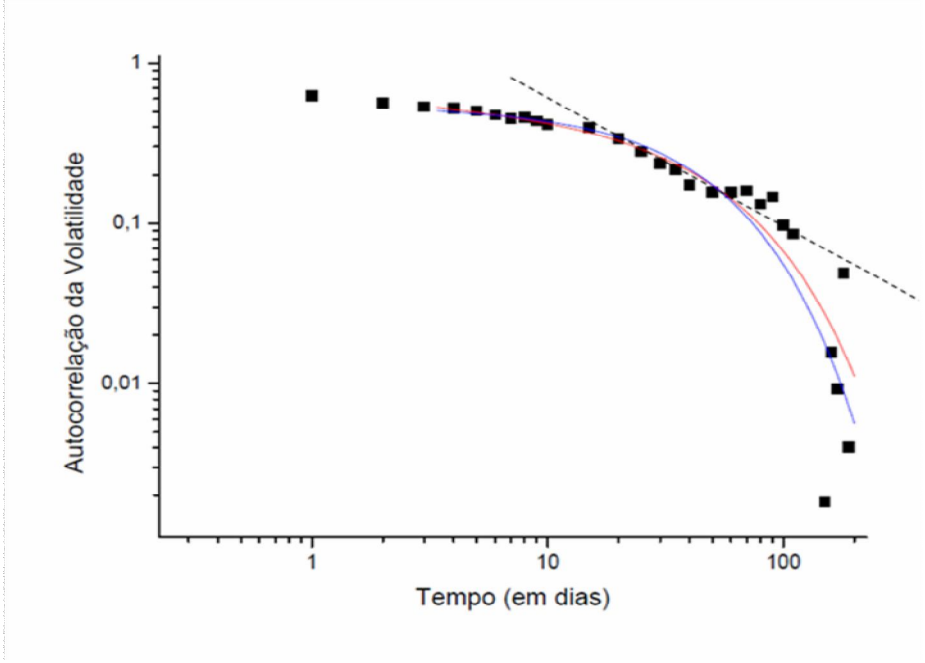


Figura 3.6.1.4 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA em escala log-log e ajuste com eq.(3.6.1.2) (vermelho) e eq.(3.6.1.3) (azul).

A análise dos dados empíricos mostrados na Figura 3.6.1.4 para tempos intermediários $10<\tau<100$ (ilustrados através da reta pontilhada), indica comportamento em lei de potência $|\tau|^{-\lambda}$ com expoente efetivo $\lambda \approx 0.30$, que é por sua vez truncado exponencialmente para tempos maiores.

Concluímos que são necessárias pelo menos duas escalas temporais para reproduzir a auto-correlação da volatilidade por todo horizonte temporal dos dados empíricos. As Tabelas 3.6.1.2 e 3.6.1.3 apresentam o tempo característico τ_1, que representa a escala temporal da correlação no curto prazo (horizonte temporal intra-diário - semanal) e τ_2, que representa o tempo característico (de horizonte temporal mensal) da correlação que passa a predominar no longo prazo.

A existência de dois tempos característicos sinaliza a ocorrência de dois mecanismos de relaxação das magnitudes de flutuação de preços, de origem diversa: um mecanismo de resposta mais rápida de ajuste ao nível local de atividade do mercado, além de uma resposta mais lenta, correspondente à mudanças de caráter menos especulativo dos preços de mercado.

Este resultado sugere que o processo estocástico da volatilidade seja um processo caracterizado por uma hierarquia de escalas temporais, de multiplicidade mínima igual a 2.

3.6.2
Função de auto-correlação generalizada

A auto-correlação linear representa uma forma analítica útil para avaliar o quanto duas variáveis aleatórias dependem uma da outra. No entanto, ela não dá informação sobre o papel das magnitudes sobre essa dependência. Uma forma simples de quantificar o efeito da magnitude, é introduzindo uma função de auto-correlação generalizada.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Analisamos assim a função dada pela eq.(2.7.1) , onde $\{X(t)\} \equiv \{v^{\alpha}(t)\}$ e $\{Y(t)\} \equiv \{v^{\beta}(t)\}$, com $\alpha,\beta = \pm 1, \pm 2$. Quando $\alpha, \beta = 2$, pequenos valores de volatilidade se tornam ainda menores e seu efeito sobre a correlação torna-se desprezível, enquanto o efeito dos grandes valores de volatilidade se magnífica. Por outro lado, quando α,β são negativos, a maior contribuição à correlação advém das magnitudes pequenas. Assim, para $\alpha=\beta$, podemos estimar como os valores de mesma ordem de magnitude se relacionam no tempo, e quando têm sinais opostos, são obtidas informações sobre a interdependência dos valores de diferentes magnitudes.

Nas figuras 3.6.2.1 a 3.6.2.3 apresentamos os resultados para diferentes pares $(\alpha,\beta) = (-1,+1), (-1,-1)$ e $(+2,+2)$.

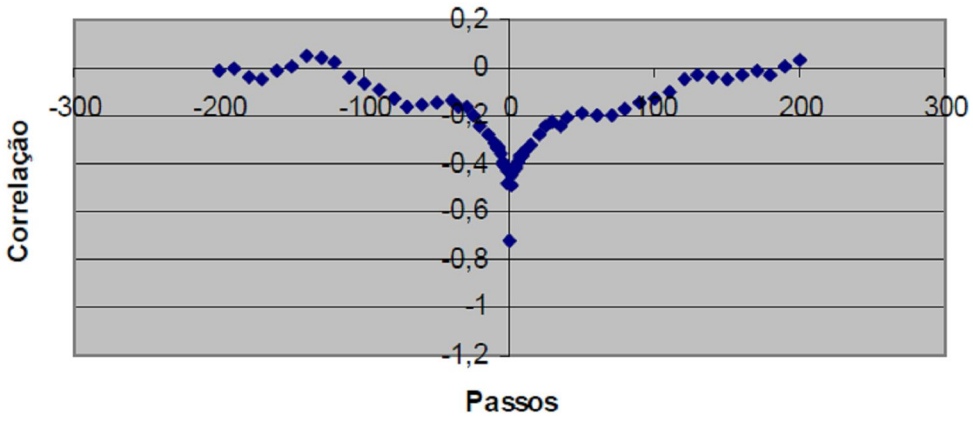


Figura 3.6.2. :Auto-correlação generalizada da volatilidade com α = - 1 e β = + 1 (ver texto)

Observa-se que as volatilidades de pequena magnitude estão majoritariamente anti-correlacionados com as de grande magnitude e que existe uma pequena assimetria temporal, (equivalente à troca $\alpha \leftrightarrow \beta$).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

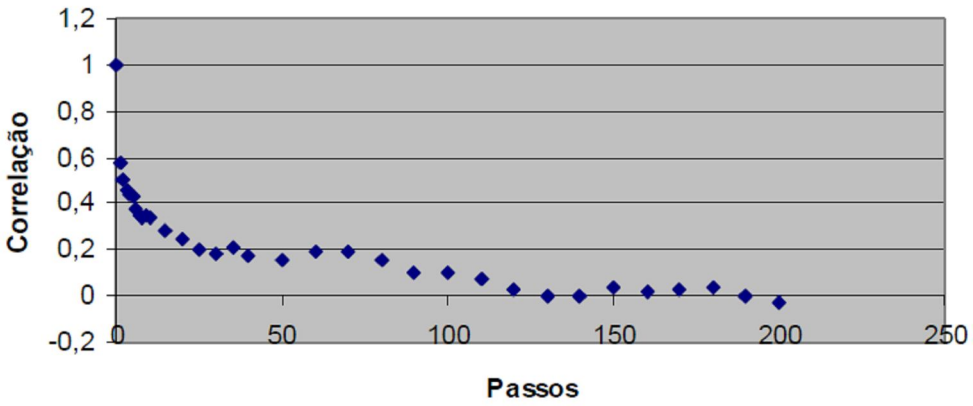


Figura 3.6.2.2: Auto-correlação generalizada da volatilidade com α = -1 e β = - 1 (ver texto).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

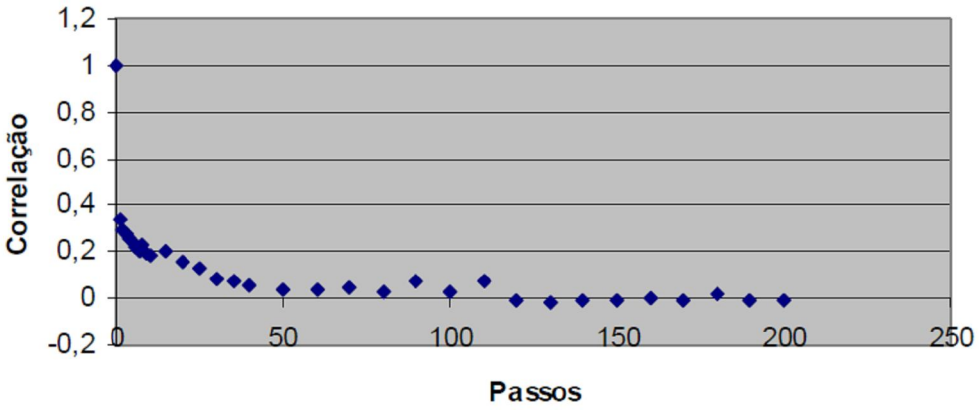


Figura 3.6.2.3 :Auto-correlação generalizada da volatilidade com α = +2 e β = + 2 (ver texto)

As Figuras 3.6.2.2 e 3.6.2.3 mostram que volatilidades de magnitudes equivalentes apresentam comportamento persistente, descrevendo quantitativamente os regimes de alta ou de baixa volatilidade do mercado.

Comparamos também os resultados das Figuras 3.6.2.2 e 3.6.2.3 com a auto-correlação da volatilidade, mostrados nas Figuras 3.6.2.4 e 3.6.2.5 respectivamente.

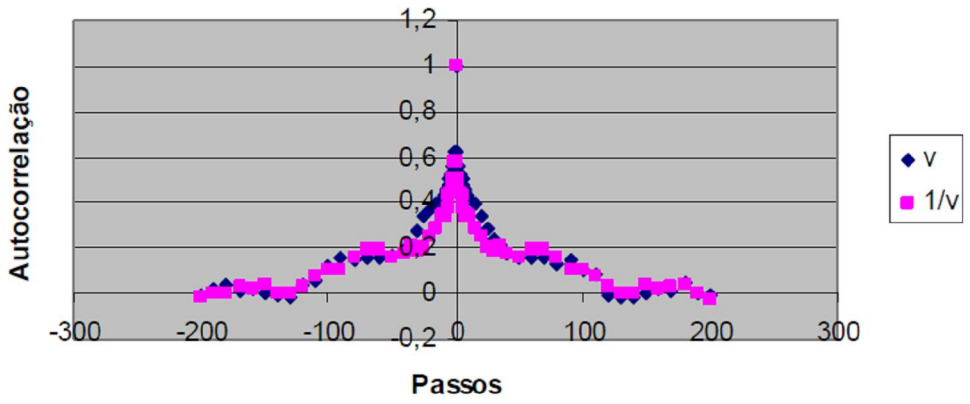


Figura 3.6.2.4: Comparação entre a auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = \beta = -1$ e a auto-correlação linear da volatilidade ($\alpha = \beta = +1$).

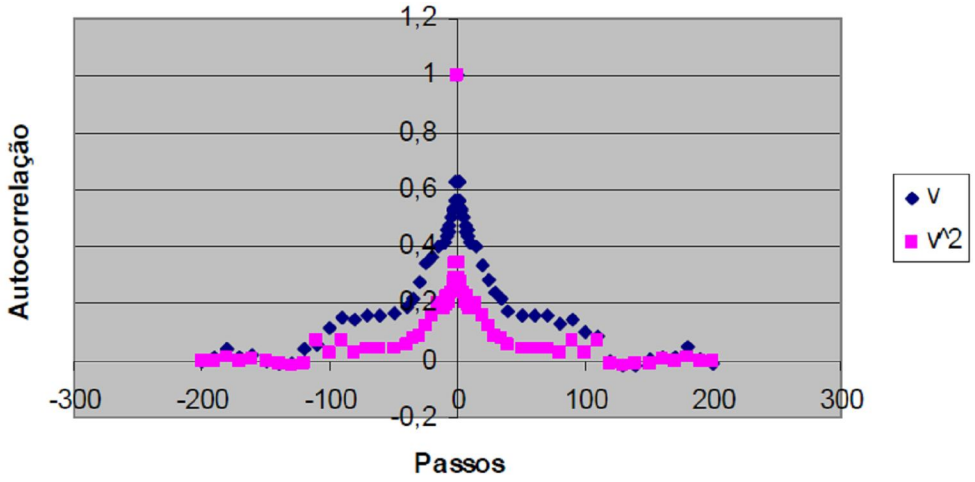


Figura 3.6.2.5: Comparação entre a auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = \beta = +2$ e a auto-correlação linear da volatilidade ($\alpha = \beta = +1$).

A análise das Figuras 3.6.2.4 e 3.6.2.5 mostra que a auto-correlação das volatilidades baixas determina o comportamento da volatilidade, por sua maior significância estatística.

Analisamos também quantitativamente o grafico de autocorrelação não-linear para $\alpha = \beta = +2$. Analogamente ao caso da auto-correlação linear da volatilidade, não foi possível ajuste com função exponencial ou lei de potência

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

com um único tempo característico. Consideramos o ajuste com a função dada pela eq.(3.6.1.2) que, ainda assim, só foi possível para intervalo temporal de até 100 dias. A Figura 3.6.2.6 apresenta o ajuste obtido, cujos parâmetros estão mostrados a seguir, na Tabela 3.6.2.6. Observa-se no entanto, que o parâmetro temporal τ_1 é estatisticamente insignificante.

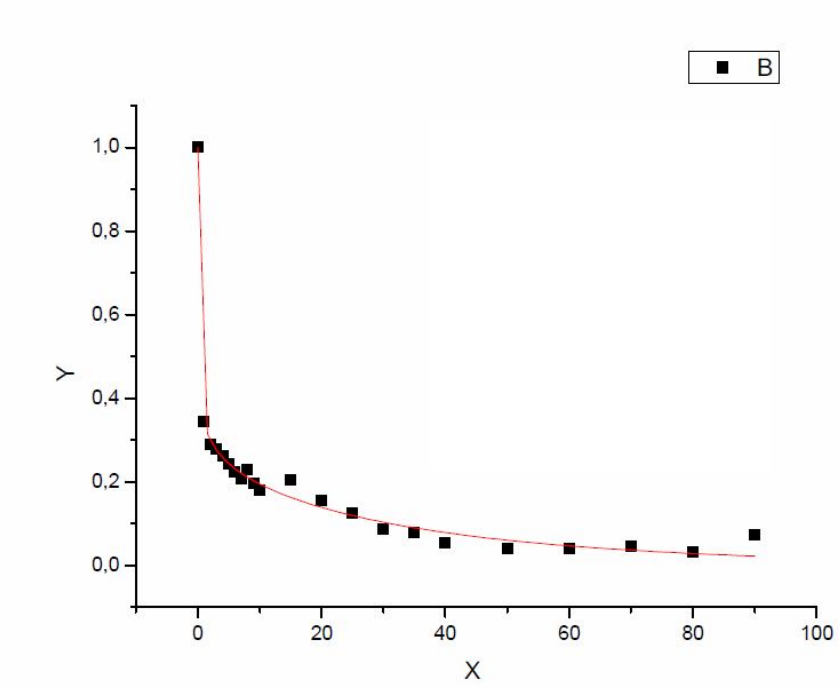


Figura 3.6.2.6: Gráfico de auto-correlação da volatilidade diária quadrática do IBOVESPA e ajuste com a função dada pela eq.(3.6.1.2] ($\tau \leq 100$).

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
λ	0.22	. +/- 0.06
τ_1	0.05	. +/- 0.06
τ_2	44.5	. +/- 9.00

Tabela 3.6.2.6 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.2) para o gráfico de auto-correlação da volatilidade quadrática

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

A seguir, na figura 3.6.2.7, apresentamos o ajuste com a função bi-exponencial dada pela eq.(3.6.1.3). Os parâmetros obtidos estão mostrados na Tabela 3.6.2.7.

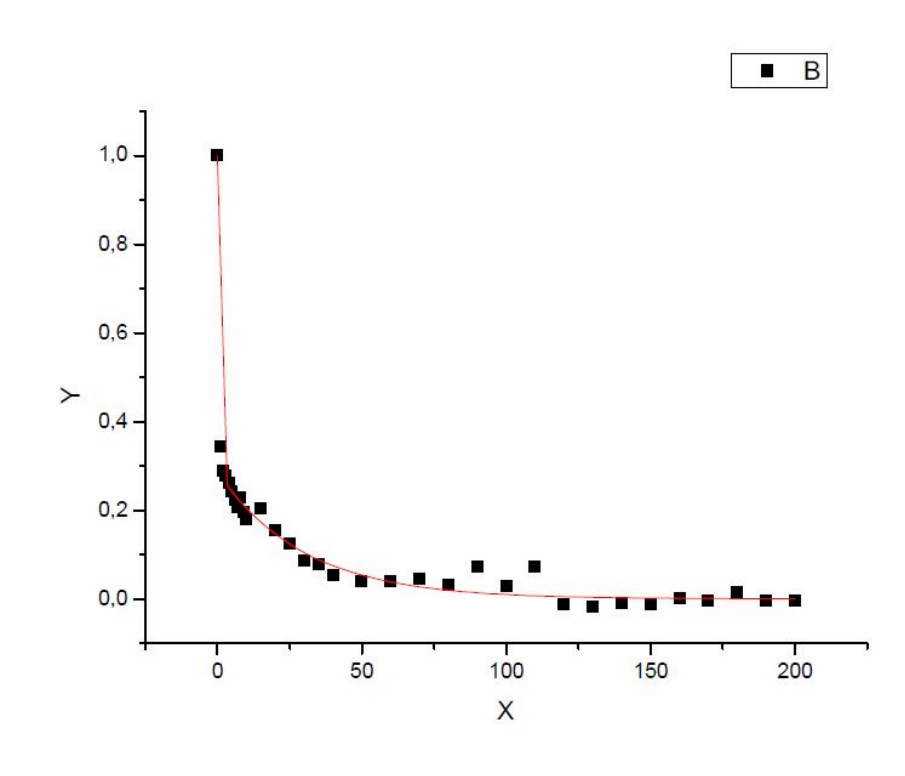


Figura 3.6.2.7 Gráfico de auto-correlação da volatilidade diária quadrática do IBOVESPA e ajuste com a função bi-exponencial dada pela eq.(3.6.1.3)

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
A	0,714	. +/- 0,012
τ_1	0,429	. +/- 0,064
τ_2	29,827	. +/- 2,805

Tabela 3.6.2.7 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para o gráfico de auto-correlação da volatilidade quadrática

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Considerando-se a menor significância estatística dos intervalos temporais mais longos, fizemos também o ajuste da função eq.(3.6.1.3) para intervalo temporal de até 100 dias, obtendo-se os parâmetros mostrados na Tabela 3.6.2.8 .

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
A	0,711	. +/- 0,011
τ_1	0,423	. +/- 0,061
τ_2	28,99	. +/- 2,65

Tabela 3.6.2.8 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para o gráfico de auto-correlação da volatilidade quadrática ($\tau \leq 100$).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Comparando-se as Tabelas 3.6.2.7 e 3.6.2.8 , vemos que os parâmetros são consistentes, indicando ser a função bi-exponencial a que melhor representa a auto-correlação da volatilidade quadrática. No entanto, comparando-se ambas as tabelas com a Tabela 3.6.1.6, obtém-se um decaimento mais rápido da correlação não-linear em relação à correlação linear, o que pode ser devido à menor freqüência de ocorrência dos valores altos de volatilidade.

A diversidade de comportamento para pequenos e grandes valores de volatilidade, associada a diferentes tempos característicos, sugere também que a dinâmica das volatilidades baixas e altas seja regida por diferentes mecanismos.

3.7. Efeito de Alavancagem

De acordo com a seção 2.8, avaliamos a correlação *Leverage*, da volatilidade quadrática com o retorno, ambos em escala diária, dada pela eq.(2.8.1) encontrando o seguinte gráfico:

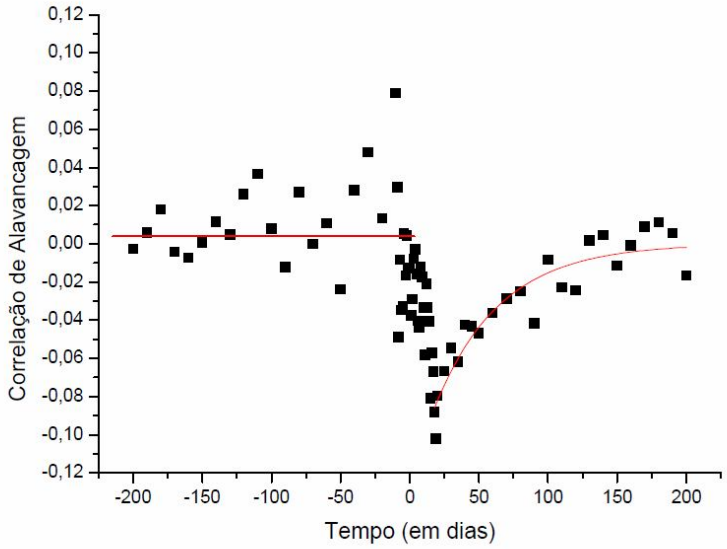


Figura 3.7.1: Correlação Leverage < r(t) $v^2(t+\tau)$ > do IBOVESPA diário e ajuste com a curva dada pela eq.(2.8.5)

Apesar de utilizarmos um estimador para a volatilidade diferente, de forma análoga aos resultados de outros mercados (ver Figura 2.8.1), a correlação entre volatilidade passada e mudanças futuras de preço ($\tau < 0$) é insignificante (a não ser por intervalos muito curtos), fornecendo o valor médio 0,0046. O ajuste com a eq.(2.8.5) para $\tau > 0$ produziu os seguintes parâmetros, mostrados na Tabela 3.7.1

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
A	0.125	. +/- 0.012
b	0.021	. +/- 0.003

Tabela 3.7.1: Parâmetros de ajuste de < r(t) $v^2(t+\tau)$ > pela eq.(2.8.5)

Considerando valores positivos de τ , nossos resultados confirmam que o efeito de alavancagem no mercado brasileiro é exponencialmente pequeno para

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

horizontes temporais longos. Por outro lado, este efeito é importante no regime de tempos curtos, conforme medida obtida pelo parâmetro A.

Note também que o tempo característico de L(τ) é b^{-1} = 47.4 ± 6.3 dias , é da mesma ordem do tempo característico de longa escala τ_1 da auto-correlação da volatilidade, mostrado na seção 3.6.1, e maior do que o da auto-correlação da volatilidade quadrática, mostrado na seção 3.6.2.

Os dados da literatura [15], para ações individuais americanas, européias e japonesas no período 1990-2000 produzem valores *A* semelhantes de correlação Leverage inicial mas tempos característicos que dependem do procedimento adotado para o cálculo do valor médio de cada mercado, fornecendo $40 < \tau < 70$. Para os índices de mercados desenvolvidos, o efeito é muito mais forte (*A* é *10* vezes maior) e o tempo de decaimento é menor, $\tau \approx 10$. Apesar de não podermos comparar o parâmetro *A* devido a diferenças na constante de normalização da correlação Leverage, podemos interpretar nosso resultado para o tempo característico como indicando que IBOVESPA é governado pelo comportamento de um número pequeno de ações.

Para investigar o papel da magnitude da volatilidade e do retorno sobre o efeito de alavancagem, que supõe-se ser devido ã dependência de grandes retornos negativos com grandes volatilidades futuras, calculou-se também a função de correlação *Leverage* generalizada $< r^{\alpha}(t)\, \nu^{\beta}(t+\tau) >$ para pares $(\alpha,\beta) = (+1,+1), (+1,-2)$ e $(-1,+2)$.

A Figura 3.7.2 mostra a correlação entre retorno e volatilidade, $(\alpha,\beta) = (+1,+1)$, e o ajuste com a função dada pela eq.(2.8.5)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

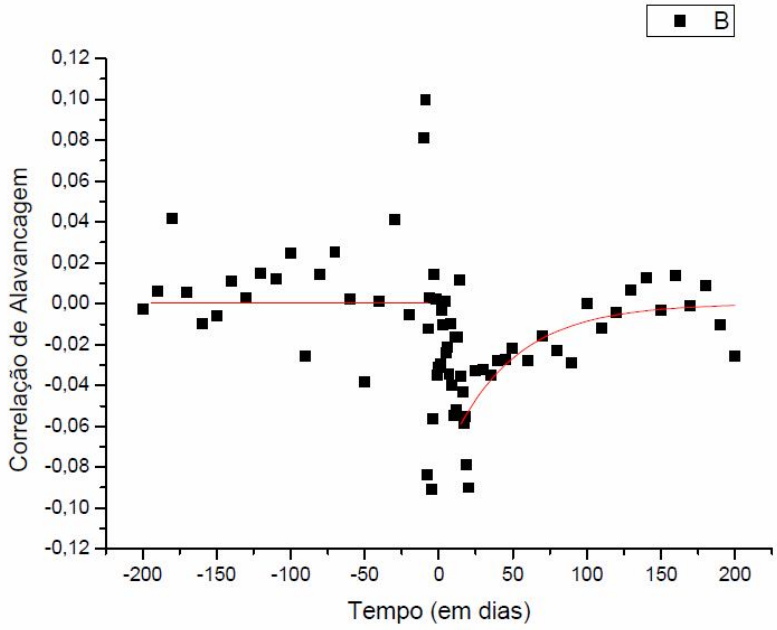


Figura 3.7.2: Correlação $< r(t)\, v(t+\tau) >$ do IBOVESPA diário e ajuste com a curva dada pela eq.(2.8.5)

Os parâmetros obtidos estão mostrados na Tabela 3.7.2 e mostram que a amplitude de alavancagem é sobretudo devido às grandes magnitudes de volatilidade, cuja influência é maior no caso $(\alpha,\beta) = (+1,+2)$,correspondente à correlação Leverage usual, mostrados na Tabela 3.7.1

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
A	0.0828	.+/- 0.0138
b	0.0226	.+/- 0.0057

Tabela 3.7.2: Parâmetros de ajuste de $< r(t)\, v(t+\tau) >$ pela eq.(2.8.5)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

A seguir os outros gráficos de correlação *Leverage* generalizada:

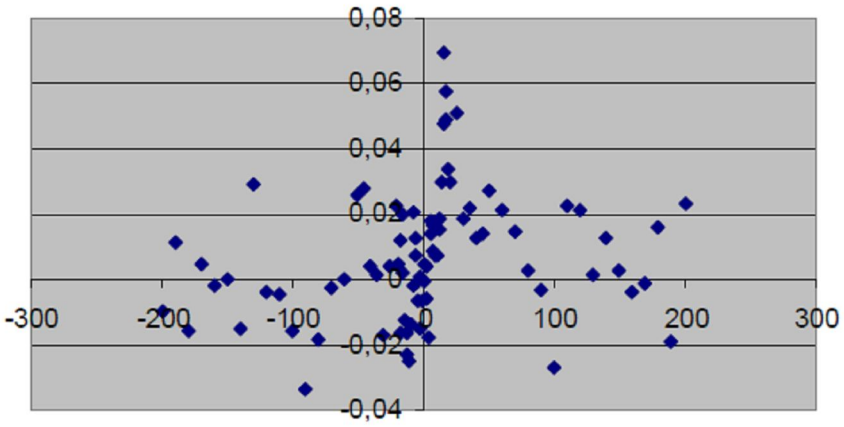


Figura 3.7.3 Gráfico de correlação $< r(t)\nu^{-2}(t+\tau) >$

A análise do gráfico nos mostra um efeito de alavancagem inverso para volatilidades pequenas, com volatilidades futuras baixas sendo preferencialmente correlacionadas com retornos passados positivos. No entanto, esta resposta do mercado também ocorre apenas no curto prazo. Este resultado corrobora a interpretação de que volatilidades altas ocorrem preferencialmente após retornos negativos.

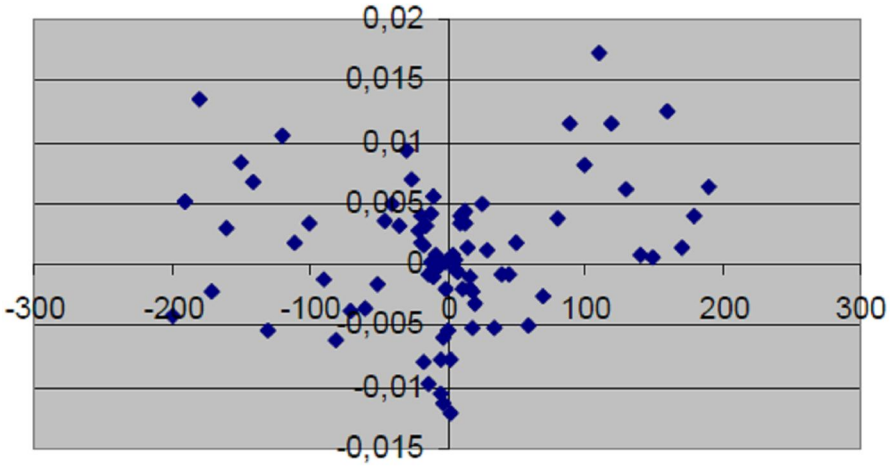


Figura 3.7.4 Gráfico de correlação $< r^{-1}(t)\nu^{2}(t+\tau) >$

.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

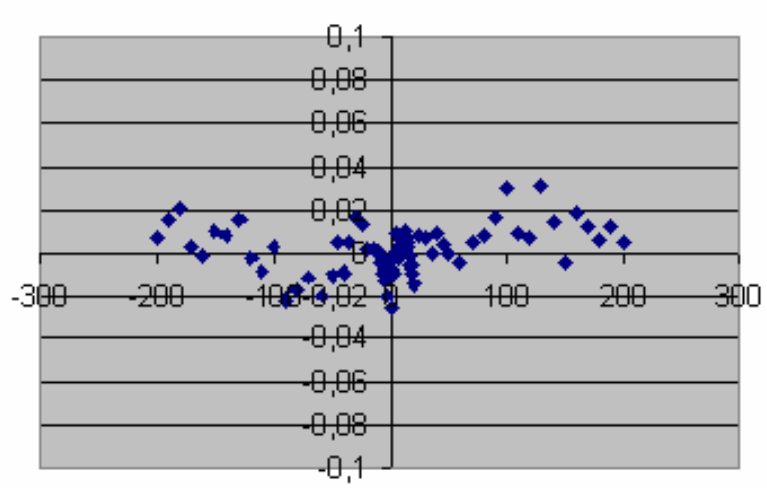


Figura 3.7.5 Gráfico de correlação $< r^{-1}(t)\nu(t+\tau) >$

A análise das Figuras 3.7.4 e 3.7.5 mostra que o efeito de alavancagem no curto prazo é destruído ao se considerar preferencialmente retornos baixos. Estes resultados indicam que existe um limiar de retorno negativo a partir do qual a aversão ao risco dos agentes produz instabilidade nos preços de mercado.

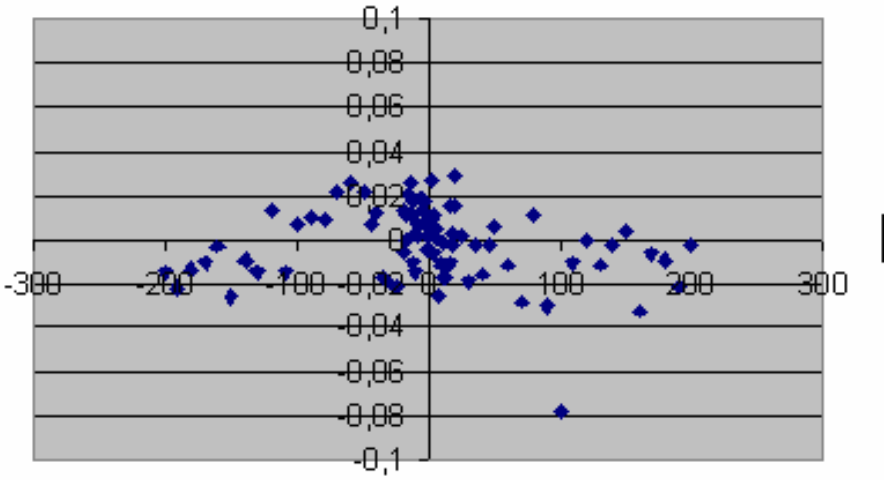


Figura 3.7.6 Gráfico de correlação $< r^{-1}(t)\nu^{-1}(t+\tau) >$

A Figura 3.7.6 mostra que existe uma homocedasticidade para o comportamento dos dados no tempo, com retornos baixos apresentando correlações residuais positivas com volatilidades baixas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA

Os resultados obtidos para a correlação *Leverage* generalizada corroboram a interpretação de que volatilidades altas ocorrem preferencialmente após retornos negativos.

Mostramos que a correlação Leverage é consistente com a hipótese de que a volatilidade $\sigma(t)$ é dada por $\sigma(Y(t))$ onde Y(t) é um processo difusivo, conforme mostrado na seção 2.8. Isto também motiva a fazer uma modelagem para este processo, onde Y é dado pelo próprio σ ou por σ^2, como apresentado no próximo capítulo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812273/CA