

2 Análise Estatística de Dados Financeiros

2.1 Estocasticidade do Preço

O Mercado Financeiro é formado por agentes que, além de serem conectados informacionalmente de forma heterogênea, também processam de forma independente as diferentes fontes de informação e possuem objetivos em diferentes horizontes temporais.

Como resultado, a dinâmica dos observáveis financeiros é governada por um *network* de processos de diferentes escalas espaço-temporais. Por um lado, tem-se modos de larga escala, de variação mais lenta, resultante da informação agregada ou de consenso do mercado. Por outro lado, existem modos locais rápidos, representando as diversas atuações dos agentes, decorrentes do processamento próprio independente das informações sucessivas que chegam ao mercado.

O preço de uma ação cotada na Bolsa de Valores varia de forma imprevisível à medida que novas informações chegam ao mercado, pois muitas delas, que alteram o valor da empresa no cenário econômico, são fatores exógenos imprevisíveis. Da mesma forma, a tomada de decisão de compra e/ou venda dos agentes do mercado inclui aspectos privados e subjetivos tais como nível de capital empregado e aversão ao risco, gerando um grau de incerteza nos preços negociados, de acordo com a lei de oferta/demanda.

Além dessas componentes aleatórias, existe uma taxa de crescimento dos preços que pode ser prevista. Isso se dá porque na formação dos preços estão embutidas a taxa de inflação e a compensação do risco de se guardar o título por um longo prazo. Além disso, os negociadores têm como identificar outras

variações previsíveis, através por exemplo, da identificação de preços que estão subestimados ou superestimados.

Assim, o preço de um ativo pode ser descrito por um processo estocástico cuja dinâmica é governada, por um lado, por forças econômicas estocásticas (difusivas) oriundas das novas informações que chegam ao mercado e de seu processamento imediato pelos agentes, e por outro, por forças determinísticas (*drift*) representadas por grandezas cujas taxas de variação são de médio ou longo prazo oriundas de informações macroeconômicas fundamentais que são absorvidas de forma coletiva pelo mercado.

Apesar da presença de ruído na dinâmica dos preços, isso não significa que não é possível prever ou estimar o preço futuro da ação, e sim que esta previsão poderá ser dada de forma probabilística. Desta forma, ao analisarmos o comportamento dos preços, as questões financeiras de interesse tais como lucro, risco e previsão serão respondidas através de estimativas de grandezas estatísticas que expressam valores médios esperados.

2.2 Tempo financeiro contínuo

Os preços de mercado são formados em tempo discreto, a partir de cada negociação. Em alguns mercados já se pode obter o registro dos preços “*tick-by-tick*”, isto é, a sucessão de preços em cada negociação ao longo do pregão. No entanto, vamos considerar aqui a amostragem dos preços atualizados a cada intervalo de tempo mínimo de 1 minuto, fazendo-se uma aproximação para o tempo contínuo e desprezando também o caráter discreto dos preços

No caso de cotações de preços de ações, existe ainda a suspensão do pregão de um dia para o outro, assim como nos fins de semana e feriados. Portanto este banco de dados é do tipo misto – onde há dados discretos e “contínuos” ao longo do pregão. Descartando-se os períodos de fechamento do

pregão, e considerando a variação de preços em tempo contínuo ao longo do pregão, essa aproximação é chamada de tempo financeiro contínuo, para a qual é definida a função $S(t)$ para os preços do ativo.

2.3 Retorno de Preços

A variação de preços definida em relação a determinado preço inicial, denomina-se retorno de preço. Para o investidor, a informação relevante do índice é sua lucratividade, e não seu valor monetário absoluto. A lucratividade é medida pelo lucro relativo ao investimento, ou seja, o quanto houve de retorno comparado a quanto houve de investimento. Esta informação não pode ser observada na simples variação do preço e por isso deve-se calcular a variação relativa de preço, ou retorno percentual.

Definindo-se $S(t)$ como sendo o preço de um ativo no tempo t , o retorno percentual de preço entre t e $t-1$ (no intervalo temporal $\Delta t = 1$) é definido como a razão entre o incremento de preço passado e o preço atual.

$$R(t) = [S(t) - S(t-1)] / S(t-1) \quad \text{eq.(2.3.1)}$$

O retorno logarítmico $r(t)$ (no intervalo temporal $\Delta t = 1$) é definido como sendo o incremento de preço em escala logarítmica natural:

$$r(t) = \ln S(t) - \ln S(t-1) \quad \text{eq.(2.3.2)}$$

$$r(t) = \ln[S(t) / S(t-1)]$$

$$r(t) = \ln [1 + R(t)]$$

Caso seja necessário trabalhar com mudanças de preço em escalas temporais múltiplas é preciso verificar como se realiza a composição dos retornos em escala temporal unitária.

O retorno percentual no intervalo $\Delta t=k$, é dado por:

$$R_k(t) = [S(t) - S(t-k)] / S(t-k) \quad \text{eq.(2.3.3)}$$

$R_k(t)$ pode ser obtido a partir da seguinte composição dos retornos percentuais de escala temporal unitária $\Delta t=1$:

$$S(t)/S(t-k) = [S(t) / S(t-1)].[S(t-1) / S(t-2)]....[S(t-k+1)/S(t-k)]$$

$$1 + R_k(t) = [1+R(t)].[1+R(t-1)].....[1+R(t-k+1)]$$

Assim, o retorno logarítmico na data t , na escala temporal $\Delta t=k$, definido como:

$$r_k(t) = \ln [S(t)/S(t-k)] \quad \text{eq.(2.3.4)}$$

é a soma dos k retornos logarítmicos de escala unitária, como pode ser visto a seguir:

$$r_k(t) = \ln [1 + R_k(t)]$$

$$r_k(t) = \ln \{ [1+R(t)].[1+R(t-1)].....[1+R(t-k+1)] \}$$

$$r_k(t) = r(1) + r(t-1) + \dots + r(t-k+1) \quad \text{eq.(2.3.5)}$$

Como consequência importante da propriedade acima de aditividade de retornos logarítmicos, espera-se que haja uma dispersão maior de retornos na escala k em relação à escala unitária. Mais precisamente, a seguinte propriedade de escala é válida:

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 k^{2H} \quad \text{eq.(2.3.6)}$$

sendo H um expoente de escala (expoente de Hurst) e σ o desvio padrão em escala unitária arbitrária. Observa-se para retornos logarítmicos de preços de ações que $H \approx 1/2$, isto é, um crescimento aproximadamente linear da dispersão de retornos, em escalas temporais que vão de alguns minutos até anos. Este

resultado é equivalente à asserção de que mudanças relativas de preço são não-correlacionadas em primeira ordem.

2.4 Modelo Padrão para o processo estocástico de preços

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) foi introduzido pelo físico Osborne em 1959 [2] e é o modelo mais utilizado em finanças para caracterizar a evolução temporal dos preços. O preço do ativo $S(t)$ é descrito pela equação de Itô-Langevin:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t) \quad \text{eq.(2.4.1)}$$

Onde μ é um *drift* determinístico, indicando uma eventual tendência do mercado, $W(t)$ é um processo de Wiener padronizado e σ é a volatilidade, que determina a escala das flutuações estocásticas e portanto, o grau de incerteza dos preços. Nesse modelo, a volatilidade é assumida constante.

Conseqüentemente, as flutuações relativas de preço são regidas pelo processo Browniano Aritmético:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad \text{eq.(2.4.2)}$$

A partir da aplicação do Lema de Itô [3] na eq.(2.4.1), obtém-se a equação de evolução dos retornos logarítmicos $r'(t) \equiv \ln[S(t)/S(0)]$:

$$dr' = \underbrace{\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right]}_{\mu'} dt + \sigma dW(t) \quad \text{eq.(2.4.3)}$$

De acordo com eq.(2.4.3), retornos logarítmicos possuem distribuição Gaussiana. No entanto, inúmeros estudos de distribuições de diferentes ativos - tais como *commodities*, taxas de câmbio e ações - nos mercados mundiais, mostram que, de fato, a forma da distribuição de retornos varia continuamente, de acordo com a escala temporal k dos retornos. Para escalas suficientemente longas, observam-se distribuições empíricas quase-Gaussianas enquanto para escalas curtas, observa-se que a forma é fortemente não-Gaussiana, com as caudas decaindo mais devagar do que a distribuição Gaussiana, significando que os eventos extremos são bem mais prováveis.

Podemos citar como exemplo a distribuição de retornos logarítmicos de índices de mercados líquidos como o S&P 500 que apresentam decaimento em lei de potência $|r|^{-(1+\mu)}$ com $\mu \approx 3$ [4-5]. Outro dado da literatura recente foi a modelagem para retornos de alta frequência (escala temporal intradiária) do mercado americano utilizando as chamadas distribuições q-Gaussianas [6]. Por outro lado, foi observado decaimento exponencial nas caudas das distribuições de retornos de alguns mercados estrangeiros [7-8], assim como do brasileiro [9-10].

A existência de caudas longas pode ser atribuída ao fato de que, no mercado real a atualização dos preços não é imediata, existindo, além disso, custo nas transações. Ambos os fatores implicam na tendência de limitação do número de transações, o que leva a um maior volume de ações negociadas em cada transação, gerando assim maior variação de preços. Como consequência, esse grau de ineficiência permite oportunidades de lucro que motivam o investimento no mercado financeiro.

2.5

Volatilidade: um processo estocástico escondido

De acordo com o Modelo Padrão, os retornos logarítmicos seguem um processo difusivo regido pela eq.(2.4.3), sugerindo que a volatilidade

σ represente o coeficiente de difusão do caminho aleatório dos preços, determinante da magnitude dessas flutuações. Assim, neste modelo, a probabilidade de certo valor de retorno é constante no tempo. Este tipo de processo é chamado de homocedástico.

Existem, no entanto fenômenos nos quais a distribuição de probabilidade associada à variável estocástica depende do tempo, sendo chamados de heterocedásticos. Uma forma simples de obtê-los é considerando a mesma forma funcional da distribuição para todos os instantes mas variando sua largura.

Assim, para explicarmos o desvio da normalidade da distribuição empírica de retornos, uma possível generalização do Modelo Padrão, assumindo que os retornos sejam realmente independentes e governados pelo processo difusivo eq.(2.4.3), é considerar o *random-walk* dos retornos com coeficiente de difusão dependente do tempo, isto é, a volatilidade como uma variável estocástica, com sua dinâmica própria.

Entre as propriedades observadas mais importantes (fatos estilizados das séries temporais financeiras) descritas pelo processo estocástico da volatilidade, está o fenômeno de intermitência das magnitudes de mudanças de preço, no qual grandes magnitudes de flutuações de preço são usualmente sucedidas por grandes magnitudes de novas flutuações, o mesmo ocorrendo com as flutuações de pequena magnitude. A existência de períodos persistentes de alta ou de baixa volatilidade é conhecido como “*clustering*” da volatilidade. Este efeito pode ser analisado quantitativamente através da auto-correlação temporal da volatilidade, que é significativa em escalas temporais de pelo menos 100 dias, em contraposição às mudanças de preços, que apresentam auto-correlação linear desprezível desde escalas temporais de alguns minutos.

Portanto, apesar da não-gaussianidade da distribuição de retornos diminuir à medida que consideram-se horizontes temporais mais longos, existe um grau de dependência que sobrevive. Estas propriedades estatísticas “anômalas” observadas requerem a introdução de um processo estocástico

subjacente ao dos preços, que em última análise, está associado ao da volatilidade.

No entanto, apesar da volatilidade fornecer uma importante informação sobre a dinâmica das flutuações de preço, o maior obstáculo para uma análise empírica apropriada da volatilidade é que ela não é diretamente observável, constituindo-se de um processo escondido. É necessário, portanto, utilizar estimadores para inferir o nível de volatilidade do ativo, porém sem se conhecer a priori o quão confiável é o estimador.

2.6

Estimadores de Volatilidade

Existem vários estimadores de volatilidade propostos na literatura. Portanto, o valor da volatilidade encontrada depende da escolha de um destes estimadores a serem aplicados aos dados históricos dos retornos do ativo. Existem diferentes motivações para escolher uma definição em detrimento da outra. A seguir serão apresentadas as definições mais usadas na literatura, tendo como base (escala unitária) a escala temporal diária.

Módulo do Retorno

Em finanças, a volatilidade é usualmente identificada com o valor absoluto dos retornos. Adotando a notação simplificada $r(t)$ e $v(t)$ respectivamente para o retorno e volatilidade diários na data t , o estimador mais simples seria:

$$v(t) = |r(t)|.$$

De fato, considerando-se a eq.(2.4.3) e extraindo-se a tendência ou o valor médio dos retornos logarítmicos,

$$dx \equiv dr - \mu' dt, \quad \text{eq.(2.6.1)}$$

a dinâmica do mercado fica então descrita por uma equação diferencial estocástica mais simples:

$$dx(t) = \sigma(t) dW(t) \quad \text{eq.(2.6.2)}$$

Como uma primeira aproximação, substituindo-se o termo de ruído pelo seu valor esperado obtém-se:

$$\sigma(t) \cong \frac{|dx(t)|}{\langle |dW(t)| \rangle}$$

que mostra que a volatilidade é aproximadamente proporcional ao retorno absoluto no intervalo temporal correspondente. Considerando-se que

$\langle |dW_1(t)|^2 \rangle = dt$ (“*mean square sense*”), para intervalos de tempo unitários,

$$\sigma(t) \cong |dx(t)|.$$

No entanto, esse estimador superestima a fluatibilidade da volatilidade local, pois ela acompanhará a variação do retorno do mercado, enquanto espera-se que a volatilidade flutue mais lentamente que os retornos, uma vez que ela expressa uma média (ou o valor típico) da magnitude das flutuações de retorno. Na tentativa de “desconvoluir” o retorno do ruído Gaussiano, outros estimadores tem sido considerados.

Média Móvel dos Módulos do Retorno

Neste caso a volatilidade é calculada através do valor médio dos módulos dos retornos de preços em uma janela temporal de tamanho n . Considerando-se a série de retornos sem tendência, i. é., extraído seu valor médio:

$$v_t = \frac{1}{n} \sum_{t'=t-n}^t |r_{t'}|$$

Quanto maior o tamanho da janela considerada, menor é a flutuabilidade da volatilidade encontrada. Para $n = 1$ temos o caso anterior em que se leva em consideração apenas o módulo do retorno atual.

Uma vantagem desse estimador em relação ao anterior é que a média dos valores possibilita uma menor sensibilidade a *ouliers* (presença de valores extremos). Em contrapartida, uma crítica feita a esse modelo é de que os dados recentes têm o mesmo peso que dados mais remotos no tempo.

Desvio Padrão Móvel

Neste estimador, a volatilidade corresponde ao desvio padrão dos retornos do ativo, presentes em uma janela móvel de extensão finita a partir da data t , obtida a partir da seguinte equação:

$$v_t = \left[\sum_{t'=t-n}^t \frac{1}{n} (r_{t'} - \bar{r})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Onde $r_{t'}$ é o retorno do dia t' , \bar{r} é a média dos retornos na janela e n é a extensão da janela de tempo.

Uma das desvantagens dos últimos estimadores é que, à medida que n cresce a precisão da estimação da volatilidade aumenta, porém dados de retorno muito antigos acabam tendo a mesma relevância os dados mais recentes. Este problema vem a ser solucionado com outras propostas de estimadores a seguir.

Desvio Padrão com Alisamento Exponencial

Os cálculos do desvio padrão com o alisamento exponencial (DPAE) assemelham-se ao do desvio padrão móvel simples, contudo dá-se maior peso

relativo para informações mais recentes, ou seja, maior relevância para o cálculo da volatilidade.

A fim de obter a volatilidade por intermédio desse estimador, atribui-se o peso ρ (que varia entre zero e um) para previsão anterior, e incorpora-se o quadrado do retorno mais recente com peso $(1-\rho)$. Considerando a série de retornossem tendência, utiliza-se a relação de recorrência a seguir:

$$v_t = [v_{t-1}^2\rho + r_t^2(1-\rho)]^{\frac{1}{2}}$$

A simples manipulação desta equação permite observar que o DPAE acaba por atribuir aos dados mais recentes maior relevância:

$$v_t = [(1-\rho)(r_t^2 + r_{t-1}^2\rho + r_{t-2}^2\rho^2 + \dots)]^{\frac{1}{2}}$$

Da equação acima, conclui-se que quanto maior o valor de ρ , maior o peso relativo das observações passadas remotas em comparação ao passado mais recente, obtendo-se assim série temporal de volatilidade mais suave. O valor de ρ sugerido na literatura econômica é 0,94 para observações diárias. No mercado brasileiro, por haver uma maior turbulência, a otimização dos fatores de decaimento costuma utilizar valores menores, com ρ entre 0,85 e 0,94.

Uma das desvantagens desse estimador é o fato de apresentar dois parâmetros arbitrários, referentes à janela de tempo considerada (n) e ao fator de memória (ρ).

Desvio padrão intra-diário re-escalonado

Os estimadores de volatilidade apresentados até aqui, utilizam os valores de retornos diários. No entanto, a variação do preço de fechamento de um dia para o outro não fornece a informação completa sobre a incerteza dos preços do ativo, pois filtra a informação da incerteza dos preços ao longo do dia. Uma maneira de incluí-la é considerar os retornos intra-diários a cada intervalo τ e o alcance das flutuações ao longo do dia, considerando-se o número $n_\tau(t)$ de intervalos intra-diários que totalizam a duração do pregão (tempo entre a

primeira e a última tomadas de preço do pregão diário). Teremos assim $n_\tau(t)$ retornos intra-diários de preços na escala temporal τ para cada dia t , para os quais calculamos e o desvio padrão $v_\tau(t)$. Assim encontramos o estimador $v_\tau(t)$ para a volatilidade associada à escala temporal τ na data t .

Considerando eq.(2.3.5), o retorno logarítmico diário é a soma de n_τ retornos logarítmicos intra-diários de escala τ . De acordo com eq.(2.3.6), a seguinte propriedade de escala é válida:

$$v(t) = v_\tau(t) n_\tau^H(t) \quad \text{eq.(2.6.1)}$$

sendo H um expoente de escala (expoente de Hurst). Para procedermos ao reescalonamento do valor encontrado de $v_\tau(t)$ para a escala diária, devemos notar que:

- 1- Se considerarmos $H=1$, estaremos superestimando a volatilidade diária e considerando apenas os eventos extremos onde há apenas movimentos de subida de preços ou de descida consecutivos, quando na verdade a probabilidade disso acontecer é muito baixa no regime normal de mercado.
- 2- Se considerarmos movimentos de subida e descida de preços aleatórios, o valor para o expoente de escala é $H=1/2$, de acordo com a propriedade do movimento Browniano.

Assumindo uma dependência fraca dos retornos intra-diários consecutivos na escala τ considerada, o valor para volatilidade diária na data t será estimado por:

$$v(t) = \sqrt{n_\tau(t)} v_\tau(t) \quad \text{eq.(2.6.2)}$$

2.7. Auto-correlação temporal da Volatilidade

Um dos fatos estilizados mais conhecidos é a existência de correlação temporal de longo alcance nas flutuações de volatilidade.

Considere a correlação temporal de duas séries temporais $\{X(t)\}$ e $\{Y(t)\}$ dada por:

$$\rho_{x,y}(\tau) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{eq.(2.7.1)}$$

com:

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_{i+\tau} - \mu_y) \quad \text{eq.(2.7.2)}$$

onde N é o tamanho da amostra, τ é o intervalo de translação temporal entre as séries e onde μ_x e μ_y (σ_x e σ_y) são respectivamente o valor médio (desvio padrão) da série $\{X(t)\}$ e $\{Y(t)\}$. Note que $-1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$.

Estudos empíricos [11] mostram que o decaimento da auto-correlação da volatilidade é bem lento, podendo ser ajustado por lei de potência assintótica $\tau^{-\lambda}$ caracterizado por um expoente λ bem pequeno, na faixa de 0.1 e 0.3. Por outro lado modelos recentes postulam a existência de auto-correlação da volatilidade caracterizada por decaimento exponencial com múltiplas escalas temporais [12] além daqueles que, tendo como base modelos multifractais [13] com uma infinidade de escalas temporais, produzem modelagem auto-similar com auto-correlação em lei de potência.

2.8. Efeito de Alavancagem

Alavancagem (*leverage*) em finanças é a razão entre a quantidade de dinheiro que a companhia toma emprestado e o valor da companhia. A dívida é feita com o objetivo de investimento, como uma forma de amplificar ganhos potenciais, atingindo uma taxa de retorno superior ao custo dos juros da dívida. Essa prática pode maximizar os ganhos, porém gera ao mesmo tempo maiores riscos dado que o retorno do investimento é uma variável imprevisível. Por outro lado, a ocorrência de retornos negativos também tem o efeito de aumentar a alavancagem financeira, uma vez que o valor da empresa decresce.

A propriedade chamada de “*leverage effect*” tem sua origem na observação de que a volatilidade é negativamente correlacionada com os retornos logarítmicos de preço. A primeira explicação para este fato empírico foi dada por Black [14] no sentido de que retornos negativos aumentam a alavancagem financeira, aumentando o risco da empresa e, portanto, a volatilidade da respectiva ação. No entanto, a causa deste efeito ainda não era clara, uma vez que poderia haver uma outra explicação, no sentido inverso, no qual o aumento de volatilidade, refletindo a maior incerteza no valor das ações, produziria uma queda da demanda fazendo o preço cair.

Em um estudo importante recente, [15] foi analisado o efeito de alavancagem em ações individuais do mercado americano assim como no conjunto de 7 índices entre os maiores do mercado mundial (S&P 500, NASDAQ, CAC 40, FTSE, DAX, Nikkei e Hang Seng). Constatou-se que este efeito é mais forte para índices de mercado do que para ações individuais, porém com decaimento com escalas temporais características mais curtas do que as escalas temporais observadas para a auto-correlação da volatilidade.

Considere a função de correlação *Leverage*:

$$L(\tau) = \langle r(t)v^2(t + \tau) \rangle \quad \text{eq.(2.8.1)}$$

e o retorno logarítmico do preço extraída a tendência ou o valor médio:

$$x(t) \equiv r'(t) - \mu't \quad \text{eq.(2.8.2)}$$

De acordo com a seção 2.6, utilizando-se como primeiro estimador da volatilidade a magnitude dessas flutuações no intervalo de tempo unitário:

$$v(t) \equiv |dx(t)| \quad \text{eq.(2.8.3)}$$

a correlação *Leverage* eq.(2.8.1) é calculada através do estimador:

$$L(\tau) \equiv \frac{1}{Z} \langle dx(t)[dx(t + \tau)]^2 \rangle \quad \text{eq.(2.8.4)}$$

onde Z é uma constante de normalização. O resultado empírico para o índice Dow Jones [16] está mostrado na Figura 2.8.1.

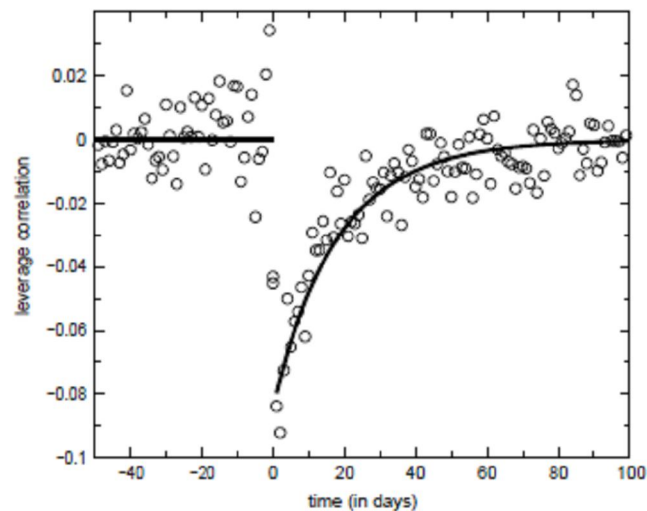


Figura 2.8.1 Efeito de alavancagem do índice diário Dow-Jones no período entre 1900 e 2000, com o ajuste da função dada pela eq.(2.8.5).

Um resultado importante é que, tanto para ações individuais quanto para índices de mercado, a correlação retorno-volatilidade é de curto alcance.

Observa-se ainda que a correlação entre o retorno e a volatilidade tem uma direção definida no tempo. Existe uma correlação negativa entre as mudanças de preços no passado e a volatilidade futura, mas não é encontrada correlação entre volatilidade passada e as alterações de preços no futuro. Desta forma, este resultado determina uma relação de causalidade no efeito de alavancagem.

De fato, este resultado reflete o efeito de “pânico” do mercado no qual ele se torna mais ativo após uma queda de preço e tende a se acalmar quando os preços crescem. O efeito de alavancagem é também responsável pela propriedade de assimetria negativa da distribuição dos retornos.

Foi sugerida [15] a seguinte expressão para ajuste dos dados empíricos ($A, b > 0$), que se mostrou eficaz, como apresentado na Figura 2.8.1 :

$$L(\tau) = \begin{cases} -Ae^{-b\tau}, & \text{se } \tau > 0 \\ 0, & \text{se } \tau < 0 \end{cases} \quad \text{eq.(2.8.5)}$$

Este resultado contrasta com o comportamento da auto-correlação linear e não-linear da volatilidade, que não podem ser descritas por um único tempo característico.

Posteriormente foi também demonstrada [16] a validade da expressão eq.(2.8.5) para o estimador da correlação *Leverage*, eq.(2.8.4), para uma ampla classe de modelos estocásticos de volatilidade, em acordo com observações experimentais. O ponto de partida desta análise é o Modelo Padrão eq.(2.4.3) para descrever o processo estocástico das flutuações de preço:

$$dr' = \mu dt + \sigma(t)dW_1(t) \quad \text{eq.(2.8.6)}$$

porém, com a volatilidade dependente do tempo, sendo descrita por $\sigma(t) = \sigma(Y(t))$ e onde $Y(t)$ é um processo de difusão regido pela equação:

$$dY = f(Y)dt + g(Y)dW_2(t) \quad \text{eq.(2.8.7)}$$

Nas eqs.(2.8.6-2.8.7) $W_i(t)(i=1,2)$ é um processo de Wiener, i.e. $dW_i(t) = \xi_i(t)dt$ onde $\xi_i(t)$ tem uma distribuição normal com média zero e correlação cruzada dada por:

$$\langle \xi_1(t)\xi_2(t') \rangle = \rho\delta(t-t') \quad \text{eq.(2.8.8)}$$

onde $-1 \leq \rho \leq 1$.

Considerando os retornos sem tendência eq.(2.8.2), a partir da eq.(2.8.6), obtém-se:

$$dx = \sigma(t) dW_1(t) \quad \text{eq.(2.8.9)}$$

O estimador eq.(2.8.4) para a correlação Leverage eq.(2.8.1) é então dado por:

$$L(\tau) = \langle \sigma(t)dW_1(t)\sigma(t+\tau)^2 dW_1(t+\tau)^2 \rangle / Z \quad \text{eq.(2.8.10)}$$

Como é comum em finanças, as eqs.(2.8.7-2.8.9) são interpretadas de acordo com a convenção de Itô [3]. Assim, quando $\tau > 0$, $dW_1(t+\tau)$ é não-correlacionado com o resto dos termos e a eq.(2.8.10) se reescreve como:

$$L(\tau) = \langle \sigma(t)dW_1(t)\sigma^2(t+\tau) \langle dW_1^2(t+\tau) \rangle \rangle / Z \quad \text{eq.(2.8.11)}$$

Levando-se em conta que $\langle dW_1^2(t+\tau) \rangle = dt$, obtém-se que:

$$L(\tau) \propto \langle \sigma(t)dW_1(t)\sigma^2(t+\tau) \rangle dt \quad (\tau > 0) \quad \text{eq.(2.8.12)}$$

Por outro lado, quando $\tau < 0$ $dW_1(t)$ é não-correlacionado com o restante dos termos, e assim, de eq.(2.8.10) segue-se que:

$$L(\tau) = \left\langle \sigma(t)\sigma^2(t+\tau) dW_1^2(t+\tau) \right\rangle \left\langle dW_1(t) \right\rangle / Z \quad \text{eq.(2.8.13)}$$

Uma vez que $\left\langle dW_1(t) \right\rangle = 0$, $L(\tau) = 0$ se $\tau \leq 0$, concluindo-se que:

$$L(\tau) \propto \theta(\tau) \left\langle \sigma(t)dW_1(t)\sigma^2(t+\tau) \right\rangle \quad \text{eq.(2.8.14)}$$

onde $\theta(\tau)$ é uma função degrau. A eq.(2.8.14) reproduz o resultado empírico da existência de correlação entre volatilidade futura e retorno passado, mas não vice-versa. O valor de correlação retorno-volatilidade futura negativo é obtido quando a correlação entre os ruídos dado pela eq.(2.8.8) fornece $\rho < 0$. Note também que a dedução é válida independentemente do processo subjacente $Y(t)$ eq.(2.8.17) e da fórmula específica de $\sigma(Y)$.