



Ricardo Vela de Britto Pereira

**Volatilidade:
um processo estocástico escondido**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação de Física da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Profa. Rosane Riera Freire

Rio de Janeiro
Junho de 2010



Ricardo Vela de Brito Pereira

Volatilidade: um processo estocástico escondido

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Rosane Riera Freire

Orientadora

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Luca Moriconi

UFRJ

Prof. Anderson Alexander Gomes Cortines

IFF

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de junho de 2010.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho, sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ricardo Vela de Britto Pereira

Graduou-se em Estatística na ENCE (Escola Nacional de Ciências Estatísticas).

Ficha Catalográfica

Pereira, Ricardo Vela de Brito

Volatilidade : um processo estocástico escondido / Ricardo Vela de Britto Pereira ; orientadora: Rosane Riera Freire. – 2010.
106 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física, 2010.
Inclui bibliografia

1. Física – Teses. 2. Volatilidade. 3. Processo estocástico. 4. Econofísica. I. Freire, Rosane Riera. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. III. Título.

CDD: 530

A minha família, amigos e a Associação Cultural Nova Acrópole,
Pelo apoio em cada momento em que foi necessário.

Agradecimentos

A minha orientadora, prof^a. Rosane Riera Freire, por ter estado ao meu lado e ter me ajudado a concluir mais uma etapa da minha vida.

Ao Anderson e Josué pelas contribuições dadas neste trabalho.

Ao Juan pela paciência e dedicação de amizade nos momentos de dificuldade durante o curso de mestrado.

A Giza pelo carinho e agilidade para resolver todas as pendências que proporcionaram o prosseguimento e bom curso desta trajetória.

Ao Professor Michel Echenique Isasa que me apoiou no momento em que decidi seguir a carreira acadêmica.

A todos aqueles que não foram citados pela falta de espaço ou esquecimento, mas que contribuíram de alguma forma para o fechamento desta dissertação.

A CNPq, FAPERJ e a PUC-Rio pelo apoio financeiro através das bolsas que me foram concedidas.

Resumo

Pereira, Ricardo Vela de Britto Pereira; Freire, Rosane Riera. **Volatilidade: um processo estocástico escondido**. Rio de Janeiro, 2010. 106p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A volatilidade é um parâmetro importante de modelagem do mercado financeiro. Ela controla a medida de risco associado à dinâmica estocástica de preço do título financeiro, afetando também o preço racional dos derivativos. Existe evidência empírica que a volatilidade é por sua vez também um processo estocástico, subjacente aos preços. Assim, a volatilidade não pode ser observada diretamente e tem que ser estimada, constituindo-se de um processo estocástico escondido. Nesta dissertação, consideramos um estimador para a volatilidade diária do índice da BOVESPA, baseado em banco de dados intradiários. Fazemos uma análise estatística descritiva da série temporal obtida, obtendo-se a função densidade de probabilidade, os momentos e as correlações. Comparamos os resultados empíricos com as previsões teóricas de vários modelos de volatilidade estocástica. Consideramos a classe de equações de Itô-Langevin formada por um processo de reversão à média e um processo difusivo de Wiener generalizado, com componentes de ruído multiplicativo e/ou aditivo. A partir dessa análise, é sugerido um modelo para descrever as flutuações de volatilidade dos preços do mercado acionário brasileiro.

Palavras-chave

Volatilidade; Processo estocástico; Econofísica

Abstract

Pereira, Ricardo Vela de Britto Pereira; Freire, Rosane Riera (Advisor). **Volatility: a hidden stochastic process**. Rio de Janeiro, 2010. 106p. MSc. Dissertation - Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Volatility is a key model parameter of the financial market. It controls the risk associated to the stochastic dynamics of the asset prices and also affects the rational price of derivative products. There are empirical evidences that the volatility is also a stochastic process, underlined to the price one. Therefore, the volatility is not directly observed and must be estimated, constituting a hidden stochastic process. In this work, we consider an estimate for the daily volatility of the BOVESPA index, computed from the intraday database. We perform a descriptive statistical analysis of the resulting time series, obtaining the probability density function, moments and correlations. We compare the empirical outcomes with the theoretical forecasts of many stochastic volatility models. We consider the class of Itô-Langevin equations composed by a mean reverting process and a generalized diffusive Wiener process with multiplicative and/or additive noise components. From this analysis, we propose a model that describes the volatility fluctuations of the Brazilian stock market.

Keywords

Volatility ; Stochastic process ; Econophysics

Sumário

| | |
|---|----|
| 1 Introdução | 17 |
| 1.1 Motivação | 17 |
| 1.2 Estrutura dos capítulos da dissertação | 19 |
| 2 Análise Estatística de Dados Financeiros | 21 |
| 2.1 Estocasticidade do Preço | 21 |
| 2.2 Tempo financeiro contínuo | 22 |
| 2.3 Retorno de Preços | 23 |
| 2.4 Modelo Padrão para o processo estocástico de preços | 25 |
| 2.5 Volatilidade: um processo estocástico escondido | 26 |
| 2.6 Estimadores de Volatilidade | 28 |
| 2.7 Auto-correlação temporal da Volatilidade | 33 |
| 2.8 Efeito de Alavancagem | 34 |
| 3 Análise Empírica do IBOVESPA | 39 |
| 3.1 Índices de Bolsas de Valores | 39 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3.2 | Análise Empírica dos Retornos Diários do IBOVESPA | 41 |
| 3.3 | Flutuabilidade da Volatilidade | 43 |
| 3.4 | Análise empírica da volatilidade diária do IBOVESPA | 45 |
| 3.5 | Avaliação do estimador de volatilidade | 48 |
| 3.5.1 | Correlação dos retornos intradiários | 49 |
| 3.5.2 | Salto intradiário | 50 |
| 3.6 | Auto-correlação da volatilidade diária | 52 |
| 3.6.1 | Função de auto-correlação linear | 52 |
| 3.6.2 | Função de auto-correlação generalizada | 56 |
| 3.7 | Efeito de Alavancagem | 62 |
| 4 | Volatilidade Estocástica com Reversão a Média | 69 |
| 4.1 | Equação de Ito-Langevin | 69 |
| 4.2 | Modelo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U aritmético) | 72 |
| 4.3 | Modelo O-U exponencial (expOU) | 73 |
| 4.4 | Modelos com distribuição estacionária com decaimento exponencial | 75 |
| 4.4.1 | Modelo O-U geométrico | 75 |
| 4.4.3 | Modelo de Heston [20] | 77 |
| 4.5 | Modelos com distribuição estacionária com decaimento em lei de potência | 79 |

| | |
|--|-----|
| 4.5.1 Modelo Harmônico com ruído multiplicativo Linear | 80 |
| 4.5.3 Modelo Econométrico | 83 |
| 4.6 Modelos com ruído Aditivo e Multiplicativo (A-M) | 84 |
| 4.6.1 Modelo A-M ($x \equiv v$) | 85 |
| 4.6.2 Modelo A-M ($x \equiv v^2$) | 86 |
| 5_ Análise final e conclusão | 90 |
| 6_ Referências Bibliográficas | 98 |
| Apêndice A | 99 |
| Apêndice B | 105 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 2.8.1 Efeito de alavancagem do índice diário Dow-Jones no período entre 1900 e 2000, com o ajuste da função dada pela eq.(2.8.5). | 35 |
| Figura 3.1.1 – Série temporal diária do IBOVESPA nominal e corrigido (valor de referência 01/08/1994 – ver texto) | 40 |
| Figura 3.2.1 - Série Temporal de retornos logarítmicos diários do IBOVESPA | 41 |
| Figura 3.2.2 Histograma da ocorrência de retornos logarítmicos diários no período janeiro de 1991 a junho de 2009 (foi utilizado o valor de bin=0,08). | 42 |
| Figura 3.4.1 Série temporal da volatilidade no período de janeiro de 1998 a maio de 2009, obtida através do estimador dado pela eq.(2.6.2), com $\tau = 15$ min e $\bar{n}_\tau = 29$ | 46 |
| Figura 3.4.2 Série temporal do retorno diário no período de janeiro de 1998 a maio de 2009, assinalando-se os períodos de maior oscilação de preços. | 47 |
| Figura 3.4.3. Distribuição de valores empíricos da volatilidade diária no período de janeiro de 1998 a maio de 2009. | 47 |
| Figura 3.5.1 Gráfico de auto-correlação de retorno intra-diário ($\tau = 15$ minutos) | 49 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.5.2.1 Gráfico da evolução do preço intra-diário a cada $\tau = 15$ minutos, de 8 a 11 de janeiro de 2002 | 50 |
| Figura 3.6.1.1 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com função com decaimento em lei de potência dada pela eq.(3.6.1.1) | 52 |
| Figura 3.6.1.2 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com a função dada pela eq.(3.6.1.2) | 53 |
| Figura 3.6.1.3 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajuste com função bi-exponencial dada pela eq.(3.6.1.3) | 55 |
| Figura 3.6.1.4 Auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA em escala log-log e ajuste com eq.(3.6.1.2) (vermelho) e eq.(3.6.1.3) (azul). | 55 |
| Figura 3.6.2. :Auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = -1$ e $\beta = +1$ (ver texto) | 57 |
| Figura 3.6.2.2: Auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = -1$ e $\beta = -1$ (ver texto). | 58 |
| Figura 3.6.2.3 :Auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = +2$ e $\beta = +2$ (ver texto) | 58 |
| Figura 3.6.2.4: Comparação entre a auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = \beta = -1$ e a auto-correlação linear da volatilidade ($\alpha = \beta = +1$). | 59 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.6.2.5: Comparação entre a auto-correlação generalizada da volatilidade com $\alpha = \beta = +2$ e a auto-correlação linear da volatilidade ($\alpha = \beta = +1$). | 59 |
| Figura 3.6.2.6: Gráfico de auto-correlação da volatilidade diária quadrática do IBOVESPA e ajuste com a função dada pela eq.(3.6.1.2).($\tau \leq 100$). | 60 |
| Figura 3.6.2.7 Gráfico de auto-correlação da volatilidade diária quadrática do IBOVESPA e ajuste com a função bi-exponencial dada pela eq.(3.6.1.3) | 61 |
| Figura 3.7.1: Correlação Leverage $\langle r(t)v^2(t+\tau) \rangle$ do IBOVESPA diário e ajuste com a curva dada pela eq.(2.8.5) | 63 |
| Figura 3.7.2: Correlação $\langle r(t)v(t+\tau) \rangle$ do IBOVESPA diário e ajuste com a curva dada pela eq.(2.8.5) | 65 |
| Figura 3.7.3 Gráfico de correlação $\langle r(t)v^{-2}(t+\tau) \rangle$ | 66 |
| Figura 3.7.4 Gráfico de correlação $\langle r^{-1}(t)v^2(t+\tau) \rangle$ | 66 |
| Figura 3.7.5 Gráfico de correlação $\langle r^{-1}(t)v(t+\tau) \rangle$ | 67 |
| Figura 3.7.6 Gráfico de correlação $\langle r^{-1}(t)v^{-1}(t+\tau) \rangle$ | 67 |
| Figura 4.1.1 Gráfico da distribuição de valores empíricos da volatilidade diária do IBOVESPA em escala linear e logarítmica respectivamente | 72 |
| Figura 4.3.1 Gráfico do ajuste, em escala linear, da distribuição Lognormal dada pela eq.(4.3.1) à distribuição empírica da volatilidade | 74 |
| Figura.4.4.1 Gráfico do ajuste da distribuição Gama dada pela eq.(4.4.1) à distribuição empírica da volatilidade | 77 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.4.2 Gráfico do ajuste da distribuição Gama Generalizada dada pela eq.(4.4.5) aos dados empíricos de volatilidade diária | 79 |
| Figura.4.5.1 Gráfico do ajuste da Distribuição Gama Inversa dada pela eq.(4.5.1) à distribuição empírica da volatilidade | 81 |
| Figura 4.5.2 Gráfico do ajuste da Distribuição Gama Inversa Generalizada dada pela eq.(4.5.3) à distribuição empírica da volatilidade | 82 |
| Figura.4.5.3 Gráfico do ajuste da Distribuição Gama Inversa Generalizada dada pela eq.(4.5.7) à distribuição de volatilidade | 84 |
| Figura.4.6.1 Gráfico do ajuste da Distribuição q-Gama transformada dada pela eq.(4.6.7) à distribuição empírica da volatilidade | 88 |
| Figura.4.6.2 Gráfico da Distribuição q-Gama dada pela eq.(4.6.4) superposto à distribuição empírica da volatilidade quadrática do IBOVESPA | 89 |
| Figura 5.1. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala semi-log | 91 |
| Figura 5.2. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala linear | 92 |
| Figura. 5.3. Ajuste dos modelos estocásticos à distribuição empírica, em escala log-log | 92 |
| Figura 5.4. Série artificial gerada por integração numérica da eq.(5.1) | 95 |

Figura 5.5. Série empírica da volatilidade (normalizada)
quadrática diária do IBOVESPA

95

Lista de Tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 3.2.1 Estatística descritiva da distribuição de retornos logarítmicos | 42 |
| Tabela.3.3.1 Análise empírica da flutuabilidade da volatilidade diária (ver texto) | 44 |
| Tabela 3.4.1. Estatística descritiva da distribuição de volatilidade diária | 48 |
| Tabela 3.6.1.1 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.1) para a auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA | 53 |
| Tabela 3.6.1.2 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.2) para a auto-correlação da volatilidade diária do IBOVESPA | 54 |
| Tabela 3.6.1.3 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para a auto-correlação da volatilidade | 55 |
| Tabela 3.6.2.7 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para o gráfico de auto-correlação da volatilidade quadrática | 61 |
| Tabela 3.6.2.8 Parâmetros obtidos com o ajuste da expressão eq.(3.6.1.3) para o gráfico de auto-correlação da volatilidade quadrática. ($\tau \leq 100$). | 62 |
| Tabela 3.7.1: Parâmetros de ajuste de $\langle r(t)v^2(t+\tau) \rangle$ pela eq.(2.8.5) | 63 |

| | |
|--|----|
| Tabela 3.7.2: Parâmetros de ajuste de $\langle r(t)v(t+\tau) \rangle$ pela eq.(2.8.5) | 65 |
| Tabela 4.3.1 Parâmetros de ajuste em escala linear da distribuição Lognormal à distribuição empírica | 74 |
| Tabela 4.3.2 Parâmetros de ajuste em escala logarítmica da distribuição Lognormal à distribuição empírica | 75 |
| Tabela.4.4.1 Parâmetros do ajuste da distribuição Gama dos modelos OU-geométrico e Feller | 76 |
| Tabela.4.4.2. Parâmetros de ajuste da distribuição Gama Generalizada do modelo de Heston | 78 |
| Tabela. 4.5.1 Parâmetros de ajuste da distribuição Gama Inversa do modelo Harmônico-Linear | 79 |
| Tabela.4.5.2 Parâmetros obtidos com o ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada do modelo de Hull and White | 82 |
| Tabela.4.5.3 Parâmetros do ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada do modelo Econométrico | 83 |
| Tabela.4.6.1 Parâmetros de ajuste da distribuição q-Gama transformada do modelo com ruído-multiplicativo | 87 |
| Tabela.4.6.2 Parâmetros da distribuição q-Gama utilizados na comparação com a distribuição empírica da volatilidade quadrática | 88 |
| Tabela 5.1. Resultados do teste Qui-quadrado | 93 |
| Tabela 5.2. Parâmetros originais da eq.(5.1) obtidos da Tabela 4.6.2 através da eq.(4.6.5) | 94 |