

4. Precificando as Opções Asiáticas Americanas

Este capítulo é dedicado à precificação das opções asiáticas americanas de compra e de venda dos tipos Floating Strike e Fixed Strike baseadas em média Aritmética e Geométrica. Para tanto, utilizaremos o Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) introduzido no capítulo anterior.

4.1.Considerações Iniciais

A aplicação do método é efetuada em quatro casos distintos de Opções Asiáticas Americanas (*Amerasian*) *Fixed-Start Time Window*⁹, definidos aqui como: Caso 1 - Opção Asiática Americana *Floating Strike* Aritmética; Caso 2 - Opção Asiática Americana *Floating Strike* Geométrica; Caso 3 - Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Aritmética; e Caso 4 - Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Geométrica.

Em todos os casos descritos, é utilizada a Opção Asiática Bermuda como uma aproximação discreta da Opção Asiática Americana (*Amerasian*), portanto, o preço do ativo objeto é observado mensalmente. Todas as opções precificadas têm prazo de um ano, sendo permitido seu exercício a partir do terceiro mês de sua emissão. Assume-se que o preço do ativo objeto segue um movimento geométrico browniano neutro ao risco.

Seja,

$t_j \equiv$ instante de tempo referente ao mês j , em que $j = 1, 2, \dots, 12$.

$S(t_j) = S_j \equiv$ preço do ativo básico observado no j -ésimo mês da série de preços.

$\bar{S}(t_j) = \bar{S}_j \equiv$ média da série de preços até o instante j .

Esta pode ser aritmética ou geométrica.

$K \equiv$ preço de exercício (ou *strike price*)

$y \equiv$ dividend yield

$r \equiv$ taxa de juros sem risco

$\sigma \equiv$ volatilidade do ativo básico

⁹ *Fixed-Start Time Window* são opções asiáticas cujo número de elementos componentes da média aumenta no decorrer da passagem de tempo, tendo seu início fixo em algum ponto da linha tempo.

$$\overline{S}_j = A_j \equiv \frac{\sum_{k=1}^j S_k}{j} \Rightarrow \text{média aritmética computada no instante } j.$$

$$\overline{S}_j = G_j \equiv \left(\prod_{k=1}^j S_k \right)^{1/j} \Rightarrow \text{média geométrica computada no instante } j.$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{se opção de compra,} \\ -1 & \text{se opção de venda.} \end{cases}$$

$$\text{payoff}_{\substack{\text{Floating} \\ \text{Strike} \\ \text{Aritmética}}} = \max \left\{ \eta \left[S_j - A_j \right], 0 \right\}$$

$$\text{payoff}_{\substack{\text{Floating} \\ \text{Strike} \\ \text{Geométrica}}} = \max \left\{ \eta \left[S_j - G_j \right], 0 \right\}$$

$$\text{payoff}_{\substack{\text{Fixed} \\ \text{Strike} \\ \text{Aritmética}}} = \max \left\{ \eta \left[A_j - K \right], 0 \right\}$$

$$\text{payoff}_{\substack{\text{Fixed} \\ \text{Strike} \\ \text{Geométrica}}} = \max \left\{ \eta \left[G_j - K \right], 0 \right\}$$

Na aplicação do MQMC, a Simulação de Monte Carlo é executada com a utilização de seqüências de números pseudo-aleatórios. A técnica de redução de variância usada é a técnica de variáveis antitéticas.

A estrutura usada na regressão de mínimos quadrados nos instantes de exercício antecipado é similar à utilizada em Longsattff & Schwartz (2001), sendo composta, portanto, de uma constante, dos dois primeiros graus do polinômio escolhido e do produto cruzado destes até o terceiro grau, totalizando oito bases. Portanto seja:

$$F(S_j, \overline{S}_j) = \alpha_1 + \alpha_2 \Phi_1(S_j) + \alpha_3 \Phi_1(\overline{S}_j) + \alpha_4 \Phi_2(S_j) + \alpha_5 \Phi_2(\overline{S}_j) + \alpha_6 \Phi_1(S_j) \cdot \Phi_1(\overline{S}_j) + \alpha_7 \Phi_1(S_j) \cdot \Phi_2(\overline{S}_j) + \alpha_8 \Phi_2(S_j) \cdot \Phi_1(\overline{S}_j)$$

Em que $\Phi_n(x)$ é a base polinomial de grau n em função da variável de estado x .

Os polinômios utilizados são os de Potência, Legendre, Laguerre e Hermite A expressos de modo a tornar o procedimento operacional consistente. Adicionalmente, os dados iniciais são:

$S(t_1) = K = 100$; $\sigma = 20\%$; $r = 5\%$; $y = 0$. As rotinas são executadas em MATLAB 6.5.

4.2.Bases Polinomiais

Os polinômios a serem usados nos experimentos são os de Potência, Legendre, Laguerre e Hermite A os quais podem ser expressos¹⁰ através da fórmula de Rodrigues, dada por:

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n \cdot \rho(x)} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\rho(x) \cdot (g(x))^n]$$

Onde, $n \geq 0$ denota o grau do polinômio.

Para cada um dos polinômios usados, os coeficientes e funções, que constam da fórmula de Rodrigues, encontram-se na Tabela 12.

	$f_n(x)$	a_n	$\rho(x)$	$g(x)$
Potência	$W_n(x)$	$\frac{(2n)!}{n!}$	x^{2n}	1
Legendre	$P_n(x)$	$(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!$	1	$1 - x^2$
Laguerre	$L_n(x)$	$n!$	e^{-x}	x
Hermite A	$H_n(x)$	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1

Tabela 12 – Coeficientes e funções da fórmula de Rodrigues para os polinômios considerados

Alternativamente, pode-se escrevê-los usando a forma explícita, dada por:

$$f_n = d_n \sum_{m=0}^N c_m \cdot g_m(x)$$

Onde, $n \geq 0$ denota o grau do polinômio.

Assim como anteriormente, cada um de seus termos difere de acordo com o polinômio considerado, o que é mostrado na Tabela 13.

¹⁰ Abramowitz e Stegun(1972).

	$f_n(x)$	N	d_n	c_m	$g_m(x)$
Potência	$W_n(x)$	0	1	1	x^n
Legendre	$P_n(x)$	$[n/2]$	2^{-n}	$(-1)^m \cdot \binom{n}{m} \cdot \binom{2n-2m}{n}$	x^{n-2m}
Laguerre	$L_n(x)$	n	1	$\frac{(-1)^m}{m!} \cdot \binom{n}{n-m}$	x^m
Hermite A	$H_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$n!$	$(-1)^m \cdot \frac{1}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$

Tabela 13 – Coeficientes e funções da forma explícita

Ou ainda, podemos usar a lei de recorrência descrita por:

$$a_{n+1} \cdot f_{n+1}(x) = (a_n + b_n \cdot x) \cdot f_n(x) - a_{n-1} \cdot f_{n-1}(x)$$

Onde, $n \geq 0$ denota o grau do polinômio, para expressar estes polinômios.

A Tabela 14 especifica cada um dos termos da lei de recorrência.

	$f_n(x)$	a_{n+1}	a_n	b_n	a_{n-1}	$f_0(x)$	$f_1(x)$
Potência	$W_n(x)$	1	0	1	0	1	x
Legendre	$P_n(x)$	$n+1$	0	$2n+1$	n	1	x
Laguerre	$L_n(x)$	$n+1$	$2n+1$	-1	n	1	$1-x$
Hermite A	$H_n(x)$	1	0	2	$2n$	1	$2x$

Tabela 14 – Termos da lei de recorrência para os polinômios considerados

O formato usado para escrever um polinômio é escolhido de forma a tornar o procedimento de precificação operacionalmente mais prático, além do que, este procedimento mostrou-se eficaz ao longo de todo o processo, já que excluiu a possibilidade de ocorrência de matrizes de regressão com rank insuficiente. Assim sendo, aplica-se a forma explícita para os polinômios de Potência e de Laguerre, usando a lei de recorrência para expressar o polinômio de Hermite A e, por fim, utiliza-se a fórmula de Rodrigues para escrever o polinômio de Legendre.

4.3.Resultados

Aplicando o Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) utilizando-se, para tanto, de diferentes bases polinomiais nos Casos 1,2,3 e 4 outrora enunciados, obtêm-se os dados apresentados nas tabelas 15, 16, 17 e 18, nas quais tem-se os preços médios das opções de compra (*call*) e de venda (*put*).

Caso 1 - Opção Asiática Americana Floating Strike Aritmética						
Put						
NumSim	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	5,1979	4,8606	4,7808	4,7143	4,7147	4,7204
Legendre	5,2130	4,8408	4,7788	4,7098	4,7174	4,7229
Laguerre	5,2938	4,8348	4,7848	4,7183	4,7229	4,7227
Hermite A	5,1864	4,8718	4,7642	4,7359	4,7296	4,7177
Call						
NumSim	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,1035	3,1133	3,1238	3,1105	3,1195	3,1199
Legendre	3,0762	3,0802	3,1373	3,1075	3,1243	3,1246
Laguerre	3,1406	3,1232	3,1316	3,1216	3,1286	3,1251
Hermite A	3,0371	3,1139	3,1224	3,1285	3,1395	3,1277

Tabela 15 - Estimativa dos preços da *Amerasian Floating Strike Aritmética* ao longo de diversos conjuntos de trajetórias simuladas (NumSim = número de trajetórias simuladas)

Caso 2 - Opção Asiática Americana Floating Strike Geométrica						
Put						
NumSim	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	5,0113	4,7120	4,6387	4,6285	4,6321	4,6238
Legendre	4,9925	4,6258	4,6852	4,6430	4,6296	4,6241
Laguerre	5,1817	4,7095	4,6570	4,6279	4,6275	4,6183
Hermite A	5,1508	4,7439	4,6589	4,6179	4,6219	4,6241
Call						
NumSim	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,0561	3,1580	3,1711	3,1741	3,1833	3,1754
Legendre	3,0559	3,1726	3,1941	3,1795	3,1852	3,1757
Laguerre	3,0838	3,1368	3,1877	3,1653	3,1835	3,1750
Hermite A	3,0555	3,1449	3,1654	3,1580	3,1800	3,1769

Tabela 16 - Estimativa dos preços da *Amerasian Floating Strike Geométrica*

Considerando as Tabelas 15, 16, 17 e 18, respectivamente Casos 1, 2, 3 e 4, observa-se que dado um mesmo conjunto de trajetórias (por exemplo, NumSim = 5.000) a diferença entre a estimativa de preço nas diferentes bases polinomiais é pequena a despeito do tipo de Opção Asiática Americana

estudada, ou seja, independe se estamos precificando uma *Amerasian Floating Strike* Aritmética ou mesmo uma *Amerasian Floating Strike* Geométrica.

Nesse sentido, se considerarmos a diferença entre o maior e o menor valor obtido para a estimativa de preços dado um Caso determinado e para cada conjunto de paths simulados, verifica-se que esta diferença decresce. Exemplificativamente, a diferença entre o maior e o menor valor computada no Caso 3 para uma *put*, descrita na Tabela 17, é de 0,1202 com 100 trajetórias simuladas, tornando-se 0,0112 com 5.000 *paths* simulados, chegando a 0,0022 se 50.000 caminhos são gerados.

Esse padrão repete-se não só para as opções de venda (*put*), como também para as opções de compra (*call*) de todas as *Amerasian* estudadas (Casos 1,2, 3 e 4).

Caso 3 - Opção Asiática Americana Fixed Strike Aritmética						
<i>Put</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,5465	3,5143	3,4976	3,4935	3,4948	3,4934
Legendre	3,6065	3,4713	3,5169	3,4960	3,5069	3,4912
Laguerre	3,4935	3,4877	3,5054	3,4866	3,4903	3,4931
Hermite A	3,4863	3,5643	3,5050	3,4848	3,4916	3,4931
<i>Call</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	2,0348	2,0746	2,0937	2,0867	2,0794	2,0780
Legendre	2,0410	2,0515	2,1043	2,0963	2,0786	2,0781
Laguerre	2,0418	2,0731	2,0841	2,0818	2,0890	2,0792
Hermite A	2,0653	2,0939	2,0909	2,0842	2,0859	2,0791

Tabela 17 - Estimativa dos preços da *Amerasian Fixed Strike* Aritmética

Caso 4 - Opção Asiática Americana Fixed Strike Geométrica						
<i>Put</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,5935	3,6128	3,6100	3,6111	3,6101	3,6134
Legendre	3,8037	3,6459	3,6152	3,6070	3,6047	3,6111
Laguerre	3,6569	3,6239	3,6555	3,6196	3,6082	3,6110
Hermite A	3,6336	3,6235	3,6327	3,5896	3,6170	3,6143
<i>Call</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	1,9404	2,0312	2,0239	2,0319	2,0247	2,0290
Legendre	2,0443	2,0309	2,0368	2,0271	2,0264	2,0311
Laguerre	2,0183	2,0235	2,0451	2,0277	2,0280	2,0282
Hermite A	1,9812	2,0309	2,0369	2,0382	2,0306	2,0291

Tabela 18 - Estimativa dos preços da *Amerasian Fixed Strike* Geométrica

Verifica-se, portanto, nas tabelas acima que, quando bases distintas são utilizadas tem-se, em todos os conjuntos de trajetórias simuladas, uma diferença pequena entre as estimativas obtidas para o preço da opção. Essa mesma diferença torna-se ínfima quando um número maior de trajetórias simuladas é usado.

Este resultado acarreta duas conclusões fundamentais, a primeira vem corroborar um dos pilares teóricos do método, ou seja, sendo todas as bases polinomiais ortogonais, então, em tese, todas elas podem ser indistintamente utilizadas na precificação do derivativo, fato este comprovado pelos resultados mostrados nas Tabelas 15 a 18.

Outra conclusão advinda da análise dessas tabelas é que o decréscimo gradual da diferença entre as estimativas de preço, em cada uma das bases, dado o aumento paulatino do número de trajetórias simuladas, é resultado direto da lei dos grandes números.

O aumento do número de trajetórias simuladas diminui sensivelmente o desvio padrão da estimativa de preço para todas as bases utilizadas, caracterizando, portanto, a convergência da estimativa para seu valor verdadeiro. Este aspecto é consistente tanto para as opções asiáticas americanas de compra quanto para suas congêneres de venda.

Na seqüência, por meio das Figuras 1, 2, 3 e 4, verifica-se a convergência da estimativa em todos os casos estudados tanto para as opções de venda (*put*) quanto para as opções de compra (*call*). Ao longo de todos os conjuntos de trajetórias simuladas e para cada um dos casos estudados dada a utilização das quatro bases polinomiais, computa-se o desvio padrão.

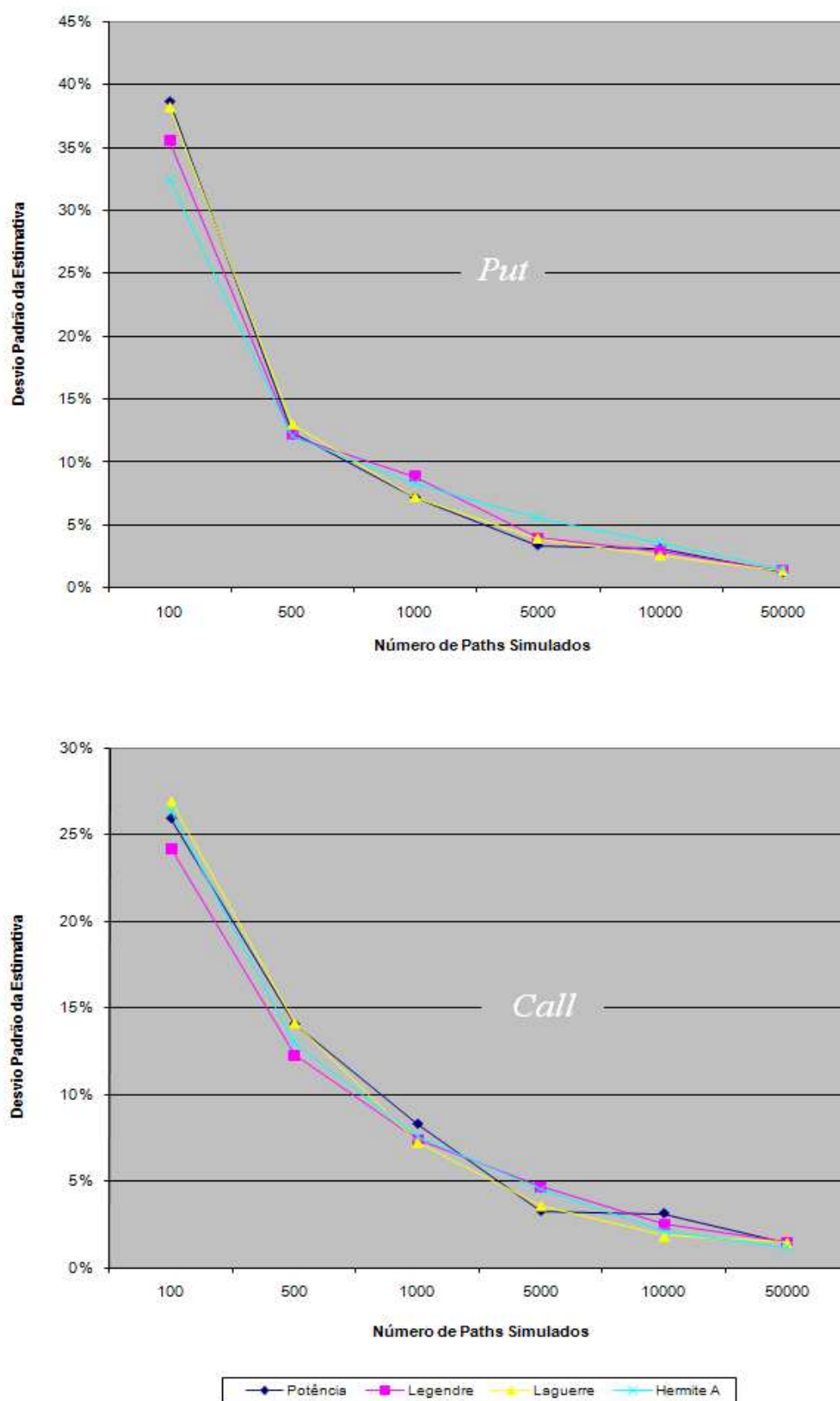
Caso 1 – Opção Asiática Americana *Floating Strike* Aritmética

Figura 1 - Desvio-padrão da opção de venda (*put*) e da opção de compra (*call*) em função do número de *paths* simulados para o Caso 1

Caso 2 - Opção Asiática Americana *Floating Strike* Geométrica

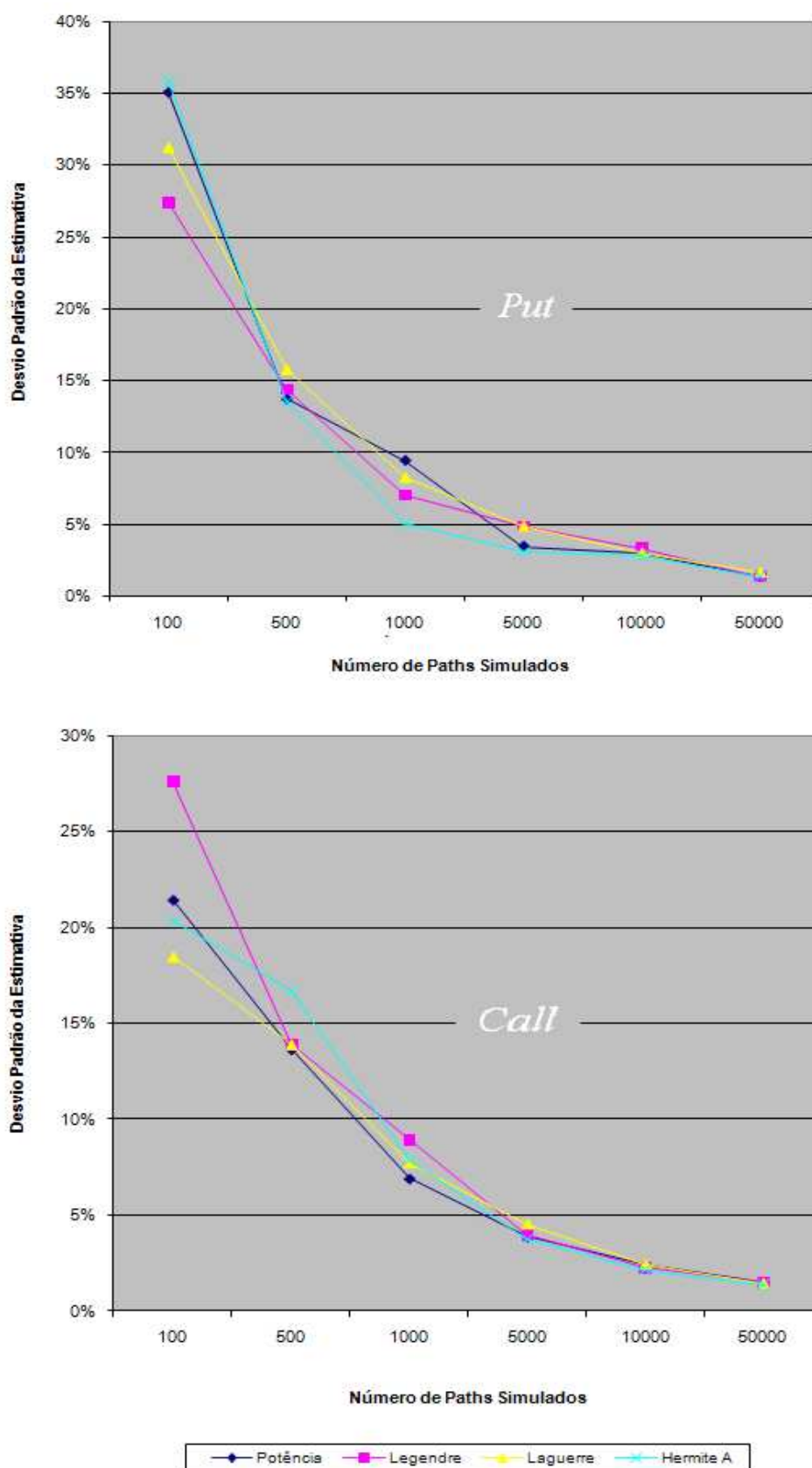


Figura 2 – Desvio-padrão da opção de venda (*put*) e da opção de compra (*call*) em função do número de *paths* simulados para o Caso 2

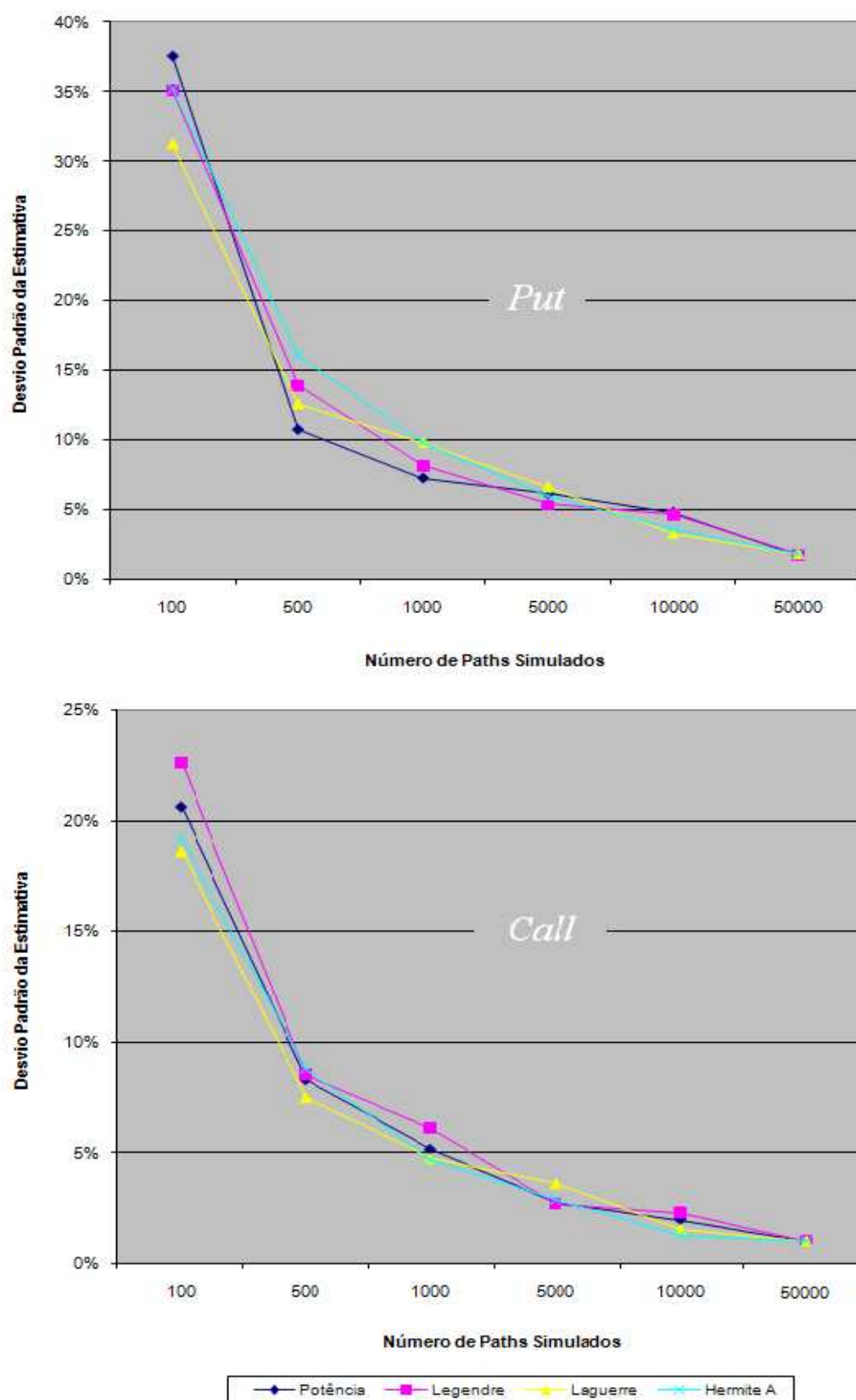
Caso 3 - Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Aritmética

Figura 3 – Desvio-padrão da opção de venda (*put*) e da opção de compra (*call*) em função do número de *paths* simulados para o Caso 3

Caso 4 - Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Geométrica

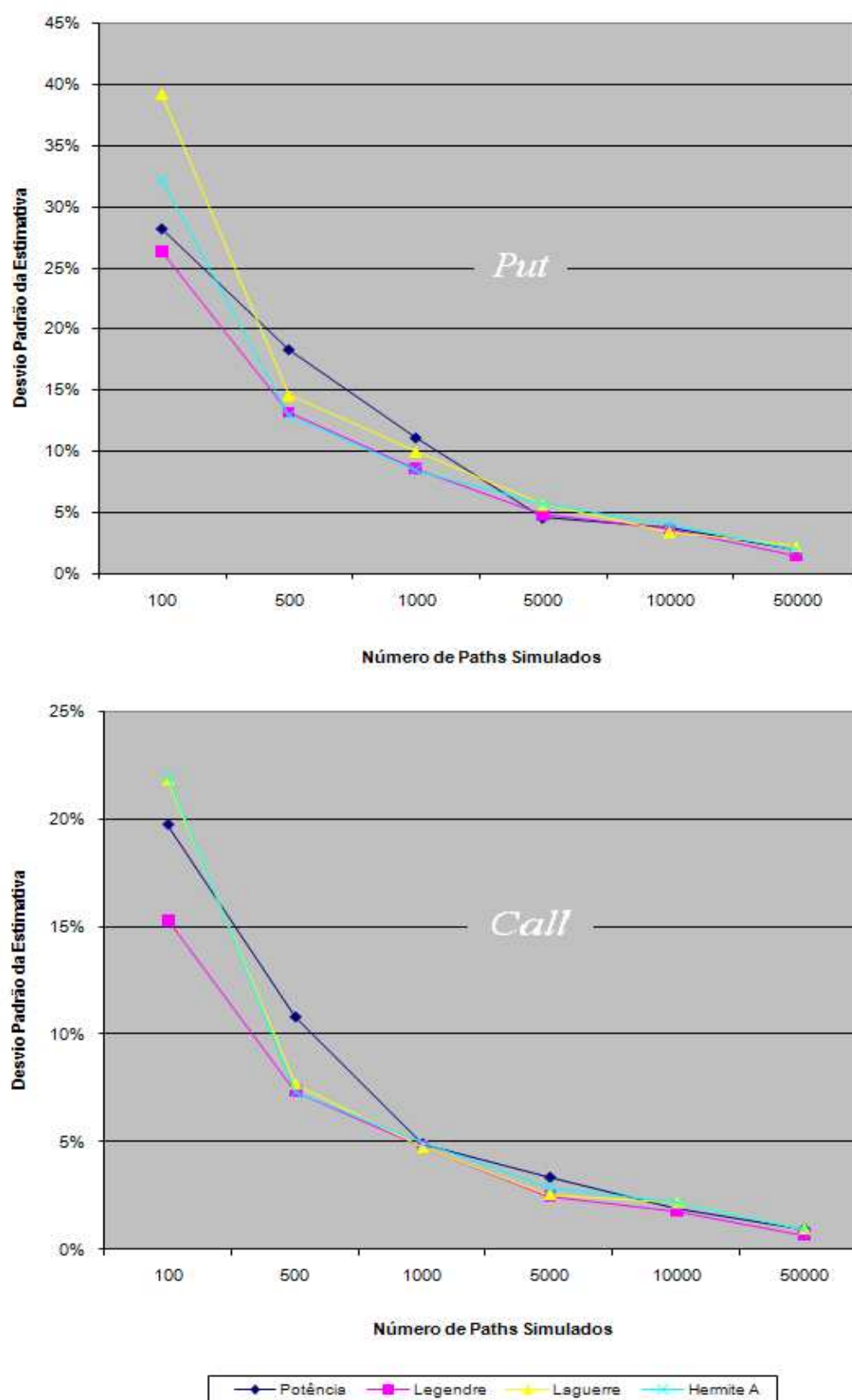


Figura 4 - Desvio-padrão da opção de venda (*put*) e da opção de compra (*call*) em função do número de *paths* simulados para o Caso 4

Na Tabela 19, observa-se que os resultados sugerem certa uniformidade no que toca à base mais precisa. Isto se deve ao fato de que para três dos quatro dos Casos (ou tipos) estudados há, dentre todas as bases, uma que apresenta o menor desvio padrão para a estimativa de preços.

<i>Opções Asiáticas Americanas Precificadas</i>			Bases			
			<i>Potência</i>	<i>Legendre</i>	<i>Laguerre</i>	<i>Hermite</i>
<i>Caso 1</i>	<i>Floating Strike Aritmética</i>	<i>Put</i>	1,2311%	1,3493%	1,3714%	1,5009%
		<i>Call</i>	1,3950%	1,4589%	1,4619%	1,1954%
<i>Caso 2</i>	<i>Floating Strike Geométrica</i>	<i>Put</i>	1,3363%	1,3560%	1,6667%	1,3560%
		<i>Call</i>	1,4736%	1,4746%	1,4336%	1,3428%
<i>Caso 3</i>	<i>Fixed Strike Aritmética</i>	<i>Put</i>	1,7160%	1,7489%	1,7968%	1,7954%
		<i>Call</i>	1,0105%	1,0093%	1,0048%	1,0019%
<i>Caso 4</i>	<i>Fixed Strike Geométrica</i>	<i>Put</i>	1,9197%	1,5011%	2,2860%	1,9770%
		<i>Call</i>	0,9541%	0,6708%	0,9581%	0,9179%

Tabela 19 – Desvio-padrão da estimativa com 50.000 paths simulados para todas as bases polinomiais e todos os tipos de *Amerasian*

Nesse sentido, de acordo com a tabela anterior, para as opções compra nos Casos 1, 2 e 3, a base de Hermite A obteve um menor desvio, enquanto que nos Casos 1, 2 e 3 na valoração de opções de venda a base de Potência foi comparativamente mais precisa. Ainda com base na mesma tabela, observa-se que para o Caso 4, a base de Legendre apresenta sempre o menor desvio padrão, seja na valoração de uma *put* ou de uma *call*. Além disso, detendo-nos um pouco mais ao Caso 4, especificamente, no segundo menor desvio padrão obtido nos experimentos, verifica-se que a base de Potência apresenta o segundo menor desvio padrão para a *put*, enquanto que para a *call*, a base de Hermite A apresenta o segundo menor desvio padrão.

Dessa forma, a vantagem relativa de uma das bases polinomiais em comparação às outras, mostrada na Tabela 19, sugere, que na precificação de Opções Asiáticas Americanas usando o Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, pode-se eleger uma base polinomial específica para a precificação deste derivativo complexo independentemente do tipo de *Amerasian*, mas dependente somente do fato de estarmos precificando uma *Amerasian* de venda (*Put*) ou de compra (*Call*) o que é verificado na maioria dos casos estudados. Por sua vez, este resultado empírico é teoricamente imprevisto, dado que a princípio as bases podem ser utilizadas indistintamente quando da precificação do derivativo.

Neste sentido, de acordo com os resultados descritos na Tabela 19, sem perdas significativas por conta da generalidade, se o objeto de precificação é uma *Amerasian* de compra (*Call*), a base polinomial sugerida seria a de Hermite A. Por outro lado, caso fosse uma *Amerasian* de venda (*Put*), a base polinomial sugerida seria a de Potência.